

Софийски Университет „Св. Климент Охридски“

Писмен конкурсен изпит по математика

10 април 2011 година

Тема №2

Задача 1. Да се реши уравнението $x|x - 8| = -7$.

Задача 2. Три числа, със сума 18, са последователни членове на намаляваща аритметична прогресия. Ако добавим 5 към първото число, 6 към второто и 9 към третото, ще получим последователни членове на геометрична прогресия.

Да се намерят числата.

Задача 3. Да се реши неравенството:

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-5}} + \sqrt[3]{\frac{x+5}{x-1}} \geq 0.$$

Задача 4. Да се намери броят на равнобедрените триъгълници, чиито върхове са върхове на даден правилен петнадесетоъгълник.

Задача 5. В правоъгълния $\triangle ABC$, с катети $AC = 8$ и $BC = 15$, CH ($H \in AB$) е височината към хипотенузата, CL ($L \in AB$) е ъглополовящата на $\sphericalangle ACH$, а CK ($K \in AB$) — на $\sphericalangle BCH$. Да се намери радиусът на описаната около $\triangle LKC$ окръжност.

Задача 6. Да се реши уравнението $\log_6(2 - 5 \cos x) - 1 = 2 \log_6 \sin x$.

Задача 7. Точките M и N са съответно от ръбовете AB и AD на куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, като $AM = AN$. Да се намери отношението на обемите на телата, на които равнината, минаваща през M , N и върха C_1 , разделя куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ако тангенсът на ъгъла между тази равнина и равнината $ABCD$ е равен на $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Задача 8. Страните на $\triangle ABC$ са $AB = 12$, $AC = BC = 11$, точката P е вътрешна за триъгълника, а K , M и N са петите на перпендикулярите от P съответно към страните AB , AC и BC . Да се намери сумата $BN + CM$, ако $AK = 5$.

Задача 9. Да се намери разликата между най-голямата и най-малката стойност на функцията:

$$\sqrt[4]{x(6-x)} - a \cdot 2\sqrt{x(6-x)} + 1.$$

За коя стойност на параметъра a тази разлика е най-малка?

Задача 10. Да се намери най-малкото цяло число k , за което уравнението $x^3 + kx + 2k + 15 = 0$ има поне един цял корен.

Време за работа: 5 часа

Драги кандидат-студенти,

- номерирайте всички страници на беловата си;
- означавайте ясно началото и края на решението на всяка отделна задача;
- решението на всяка задача трябва да започва на нова страница;
- не смесвайте белова и чернова;
- черновата не се проверява и не се оценява.

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!