Софийски Университет "Св. Климент Охридски"

Писмен конкурсен изпит по математика

26 юли 2007г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ - ТЕМА 3

Задача 1. Решете уравнението $\log_2 \dfrac{5-x}{\sqrt{1-x}} = 2$.

Решение. Дефиниционната област е $x \in (-\infty, 1)$. Даденото уравнение е еквивалентно на $\dfrac{5-x}{\sqrt{1-x}} = 4$, и при $x \in (-\infty, 1)$ лявата му страна е положителна. След повдигане на двете страни в квадрат и освобождаване от знаменател получаваме уравнението $x^2 + 6x + 9 = 0$, и от тук $x_1 = x_2 = -3$. Тъй като $x = -3$ принадлежи на дефиниционната област, то е решение на даденото уравнение.

Задача 2. Лицето на ромб $ABCD$ е равно на 120, а радиусът на вписаната в него окръжност е равен на $\dfrac{60}{13}$. Намерете дължините на диагоналите AC и BD.

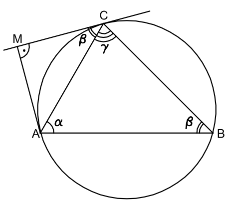
Решение. Ако a е дължината на страната на ромба, а h е височината му, имаме $S = a.h = a.2r$, т.е. $120 = a.\dfrac{120}{13}$, откъдето $a = 13$. Нека $AC = x$ и $BD = y$ $(x > 0,\ y > 0)$, тогава са изпълнени равенствата $AC.BD = 2S$ и $AC^2 + BD^2 = 4a^2$, т.е. $xy = 240$ и $x^2 + y^2 = 676$. Решенията на тази система са $x_1 = 24,\ y_1 = 10$ и $x_2 = 10,\ y_2 = 24$. Следователно за диагоналите на ромба имаме две възможности: $AC = 24$ и $BD = 10$ или $AC = 10$ и $BD = 24$.

Задача 3. Намерете всички решения на уравнението $\sin^2 x + 6\sin^2 \dfrac{x}{2} = 4$.

Решение. Заместваме в даденото уравнение $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ и $2\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$ и получаваме еквивалентното уравнение $\cos^2 x + 3\cos x = 0$, т.е. $(\cos x + 3)\cos x = 0$. От тук $\cos x + 3 = 0$ или $\cos x = 0$. Първото от тези уравнения няма решение, а решенията на второто уравнение са $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, k - цяло число.

Задача 4. Около остроъгълен триъгълник ABC със страна $BC = \sqrt{3}$ е описана окръжност с радиус 1. От върха A е спуснат перпендикуляр към допирателната към окръжността през върха C, който пресича допирателната в точка M и $CM = 1$. Намерете големината на $\sphericalangle ACB$.

Решение. От синусовата теорема за $\triangle ABC$ имаме $BC = 2\sin\alpha = \sqrt{3}$, откъдето намираме $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. По условие $\triangle ABC$ е остроъгълен, затова $\alpha = 60^o$. Имаме още $\sphericalangle ACM = \sphericalangle ABC = \beta$ (измерват се с една и съща дъга от окръжността). От правоъгълния триъгълник ACM и синусовата теорема получаваме $CM = AC.\cos\beta = 2\sin\beta\cos\beta = \sin 2\beta = 1$. Тъй като β е ъгъл в триъгълник, следва, че $\beta = 45^o$. От тук намираме



$$\sphericalangle ACB = 180^o - \alpha - \beta = 180^o - 60^o - 45^o = 75^o.$$

Задача 5. Намерете всички стойности на реалния параметър p, при които неравенствата

$$-9 \le \frac{3x^2 + px - 6}{x^2 - x + 1} \le 6$$

са изпълнени за всяко реално число x.

Решение. Забелязваме, че $x^2 - x + 1 > 0$ за всяко x, затова двете неравенства са еквивалентни на системата от квадратни неравенства $12x^2 + (p-9)x + 3 \ge 0$ и $3x^2 - (p+6)x + 12 \ge 0$. За да бъде изпълнено всяко от тези неравенства за всяко x, е необходимо и достатъчно дискриминантите на съответстващите им квадратни уравнения да са неположителни, т.е., $D_1 = (p-9)^2 - 144 \le 0$ и $D_2 = (p+6)^2 - 144 \le 0$. Решенията на $D_1 \le 0$ са $p \in [-3, 21]$, а на $D_2 \le 0$ са $p \in [-18, 6]$. Сечението на тези два интервала ни дава търсените стойности на параметъра: $p \in [-3, 6]$.

Задача 6. Най-малката и най-голямата страни в триъгълника ABC са $BC = 4$ и $AB = 9$. Намерете дължината на страната AC, ако е дадено, че ΔABC е подобен на триъгълник с дължини на страните, равни на височините на ΔABC.

Решение. Да означим $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, и нека h_a, h_b и h_c са съответните височини към тях. Съгласно условието на задачата имаме $a \le b \le c$, откъдето предвид $ah_a = bh_b = ch_c\ (= 2S_{\triangle ABC})$ е изпълнено $h_a \ge h_b \ge h_c$. Тогава двойките съответни страни в двата подобни триъгълника имат дължини a и h_c, b и h_b, c и h_a, и затова $a : b : c = h_c : h_b : h_a$. Виждаме, че трябва да е изпълнено $h_c : h_b = a : b$, а от друга страна имаме $h_c : h_b = b : c$. От тук заключаваме, че $a : b = b : c$, т.е. $b^2 = ac$. Така получаваме $AC = \sqrt{4.9} = 6$.

Задача 7. Нека n е естествено число. Докажете, че за всяко число $x > 0$ е изпълнено неравенството

$$(x+1)^n + \left(\frac{1}{x}+1\right)^n \geq 2^{n+1}.$$

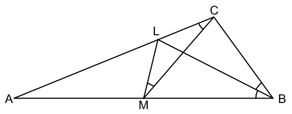
Решение. Разглеждаме функцията $f(x) = (x+1)^n + \left(\frac{1}{x}+1\right)^n = (x+1)^n\left(1+\frac{1}{x^n}\right)$. Тя е диференцируема в $(0,\infty)$ и производната ѝ е

$$f'(x) = n(x+1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{x^n}\right) - n\frac{(x+1)^n}{x^{n+1}} = \frac{n(x+1)^{n-1}}{x^{n+1}}(x^{n+1}-1) = \frac{n(x+1)^{n-1}}{x^{n+1}}(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^n).$$

Виждаме, че $f'(x) < 0$ при $x \in (0,1)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (1,\infty)$. Следователно $f(x)$ е намаляваща в интервала $(0,1)$ и растяща в $(1,\infty)$. От тук заключаваме, че при $x > 0$ е изпълнено $f(x) \geq f(1) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Задача 8. В триъгълника ABC дължините на медианата CM от върха C ($M \in AB$) и ъглополовящата BL на $\sphericalangle ABC$ ($L \in AC$) се отнасят както $5:6$, около четириъгълника $MBCL$ може да се опише окръжност и $AB = 18$. Намерете дължините на страните AC и BC.

Решение. Нека да въведем означенията $BC = a$ и $AC = b$. От това, че BL е ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$ и около четириъгълника $MBCL$ може да се опише окръжност следва, че $\sphericalangle ABL = \sphericalangle LBC = \sphericalangle LCM = \sphericalangle LMC$.



От тук заключаваме, че триъгълниците AMC и ALB са подобни. От свойството на ъглополовящата в триъгълника имаме $AL : LC = AB : BC = 18 : a$. От тук и от $AL + LC = b$ намираме $AL = \dfrac{18b}{a+18}$. От $\triangle AMC \sim \triangle ALB$ получаваме

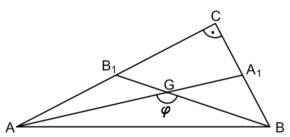
$$\frac{AM}{AL} = \frac{AC}{AB} = \frac{CM}{BL}, \quad \text{т.е.,} \quad \frac{9}{\frac{18b}{a+18}} = \frac{b}{18} = \frac{5}{6}.$$

От последните две уравнения намираме $b = 15$ и $a = 7$, т.е. $AC = 15$ и $BC = 7$.

Задача 9. Нека G е медицентър на правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза AB. Намерете възможно най-голямата стойност на $\operatorname{cotg}\sphericalangle AGB$.

Решение. Нека $BC = a$, $AC = b$, $\sphericalangle AGB = \varphi$, и нека A_1 и B_1 са средите съответно на BC и AC. От свойството на медицентъра знаем, че $AG = \frac{2}{3}AA_1$ и $BG = \frac{2}{3}BB_1$. От тук и от Питагоровата теорема за $\triangle AA_1C$ и $\triangle BB_1C$ намираме $AG^2 = \frac{4}{9}\left(AC^2 + CA_1^2\right) = \frac{1}{9}(4b^2+a^2)$, $BG^2 = \frac{4}{9}\left(BC^2 + CB_1^2\right) = \frac{1}{9}(4a^2+b^2)$. От косинусовата теорема за $\triangle ABG$ получаваме

$$2AG.BG\cos\varphi = AG^2+BG^2-AB^2 = \frac{1}{9}\left(4b^2+a^2+4a^2+b^2-9a^2-9b^2\right) = -\frac{4}{9}\left(a^2+b^2\right) \Rightarrow AG.BG\cos\varphi = -\frac{2}{9}(a^2+b^2).$$



От $2S_{\triangle AGB} = AG.BG\sin\varphi$ и $S_{\triangle AGB} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{6}ab$ следва $AG.BG\sin\varphi = \frac{1}{3}ab$. От получените изрази за $AG.BG\sin\varphi$ и $AG.BG\cos\varphi$ намираме $\operatorname{cotg}\varphi = -\dfrac{2}{3}\dfrac{a^2+b^2}{ab}$. От неравенството $a^2+b^2 \geq 2ab$ получаваме $\operatorname{cotg}\varphi \leq -\dfrac{2}{3}\dfrac{2ab}{ab} = -\dfrac{4}{3}$, като равенството се достига само при $a = b$. И така, максималната стойност на $\operatorname{cotg}\sphericalangle AGB$ е $-\dfrac{4}{3}$ и се достига при равнобедрен правоъгълен триъгълник.

Задача 10. Дадени са функциите $f(x) = x^2 + ax + b$ и $g(x) = x^2 - ax + c$, където реалните числа a, b и c удовлетворяват неравенството $2a^2(b+c) + (b-c)^2 < 0$. Докажете, че всяко от уравненията $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ има реални и различни корени.

Решение. Ще използваме следния известен факт: ако за квадратната функция $h(x)$ с положителен коефициент пред x^2 съществува реално число x_0, такова че $h(x_0) < 0$, тогава уравнението $h(x) = 0$ има два различни реални корена.

Неравенството в условието на задачата не може да бъде изпълнено при $a = 0$, затова $a \neq 0$ и от тук $f(x) \neq g(x)$. Ще покажем, че графиките на $f(x)$ и $g(x)$ имат единствена пресечна точка (x_0, y_0). Наистина, уравнението $f(x) = g(x)$ притежава единствено решение $x_0 = \dfrac{c-b}{2a}$. С непосредствено пресмятане получаваме $y_0 = f(x_0) = g(x_0) = \dfrac{1}{4a^2}\left[2a^2(b+c) + (b-c)^2\right] < 0$. Прилагаме горното твърдение с $h(x) = f(x)$ и $h(x) = g(x)$, за да заключим, че всяко от уравненията $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ има два реални и различни корена.

Пълното решение на всяка задача се оценява с 4 точки. Оценката се получава по формулата $2 + 0,1.N$, където N е броят на получените точки.