Студентско състезание по стохастика
“Димитър Въндев”

катедра ВОИС
ФМИ, СУ “Св.Климент Охридски”

София
2015

Общи положения

Ежегодното задочно студентско състезание в памет на нашия колега Димитър Въндев е за решаване на задачи от областта на вероятностите и статистиката с различна трудност — част от от задачите са подходящи за контролно и писмен изпит във ФМИ, за други няма публикувани решения.

В състезанието могат да участват студенти от ФМИ на СУ “Св. Климент Охридски” и от други висши училища индивидуално или отборно (до трима души в екип). Жури присъжда една първа и до две поощрителни награди. Наградените поделят награден фонд до 500 лв. Оценяват се верността на решенията, пълнотата и оригинални идеи.

Допълнително, между участниците се разиграва томбола, като вероятността за печалба на всеки участник е пропорционална на броя на задачите с правилни решения, които е изпратил.

Решенията да се изпращат на адрес <statlab@fmi.uni-sofia.bg> в един pdf файл съдържащ:
(1) кратко и ясно описание на решенията,
(2) представяне на участника.

При установяване на плагиатство, състезателите се декласират.

Срокове

Решенията се изпращат на адрес <statlab@fmi.uni-sofia.bg> до 9 май 2015 г. включително (до 23 часа и 59 минути).

Журито обявява резултата до 24 май 2015 година.

Задачи

***Задача* 1.** При игра на покер сте получили "кент-флош" (пет последователни карти от един цвят). Случайно изпускате две от картите си. Каква е вероятността двете карти да са съседни?

***Задача* 2.** При играта "ХО" двама играчи, редувайки се, отбелязват своя предварително избран знак (О или Х) върху избрано от играча квадратче върху поле от 3х3 квадратчета. Печели играчът, който първи нареди три свои знака в редица (хоризонтална, вертикална или по диагонал). Каква е вероятността три "Х" върху случайно избрани полета да образуват печеливша комбинация?

***Задача* 3.** (*Разпределение на Обрешков*) Нека X и Y са такива целочислени случайни величини, че X има Поасоново разпределение при условие $Y = k$ за всяка фиксирана стойност на k и обратно, Y има Поасоново разпределение при условие $X = j$ за всяка фиксирана стойност на j. Да се покаже, че

$$P(X = j, Y = k) = C.\frac{\lambda^j.\mu^k.\nu^{j.k}}{j!.k!}, \quad (j, k = 0, 1, 2, \ldots),$$

където λ, μ и ν са положителни констнати, а C е нормиращ множител, т.е.

$$C^{-1} = \sum_{j,k} \frac{\lambda^j.\mu^k.\nu^{j.k}}{j!.k!}.$$

Да се изследва числено зависимостта на математическото очакване, дисперсията и ковариацията на двете случайни величини от параметрите λ, μ и ν.

Да се покаже също, че необходимо и достатъчно условие X и Y да са независими е $\nu = 1$.

***Задача* 4.** Текст е даден на двама коректори, които трябва да го прочетат независимо един от друг и да отбележат грешките. Коректор A е намерил 21 грешки, а коректор B е намерил 17. При сравнение на грешките се оказало, че 15 от тях са намерени и от двамата коректори. Да се намери оценка на броя на грешките в текста.

***Задача* 5.** Направете експеримент от 100 подхвърляния на монета и запишете резултата като редица от 0 и 1 (1 за Ези и 0 за Тура). Помолете някого (приятел, (колега, роднина) да напише 100 нули и единици "случайно с равни вероятности" без да ползва технически средства (монета, зар, таблет). По какво ще се различават двете редици? Предложете критерий (процедура, алгоритъм) за различаване на изкуствена (човешка) случайна редица от получена с реализация на физически (технически) експеримент.

***Задача* 6.** Иванчо и Марийка играят със стандартна колода от 32 карти (четири бои от 7 до асо). Иванчо избира случайно своята карта от колодата и я обръща на масата. Марийка изтегля друга карта и печели точка, ако нейната карта е по-висока по стойност от тази на Иванчо. В противен случай точката е за Иванчо. Справедлива ли е играта? Как може да стане справедлива?

***Задача* 7.** Магазинът “Трите чаши” е обявил промоция — всяка трета покупка е безплатна. Един клиент е взел 10 различни артикула с различни цени от 1 лев до 10 лева. При какво подреждане на покупките ще получи максимална отстъпка и при какво минимална? Какво е математическото очакване на отстъпката при случайно подреждане на покупките?

***Задача* 8.** При хвърляне на правилен зар са определени две събития $A = \{3, 4, 5\}$ и $B = \{2, 3, 4\}$. Зарът е хвърлен 10 пъти и в 6 от тях е наблюдавано събитието A. Каква е вероятността поне един път да се е случило събитието B? Каква е средната стойност (математическото очакване) на случайната величина “брой на хвърлянията, в които се е наблюдавало B”?

***Задача* 9.** Разсеяният доцент има оплаквания от болки в коляното. Лекарят му предписал два медикамента - блистер от 10 хапчета “Кракобол”, които лекуват болките в коляното в 90% от случаите, а в 2% като страничен ефект лекуват разсеяност, и блистер от 10 хапчета “Брейнмакс”, който лекува разсеяност в 80% от случаите и като страничен ефект лекува болки в коляното в 5% от случаите. Доцентът заминал в командировка за десет дни, като взел единия блистер, гълтал редовно по едно хапче всеки ден и се върнал здрав. Каква е вероятността да се е излекувал с “Брейнмакс”?

***Задача* 10.** Светофар на пешеходна пътека държи червен цвят 40 секунди и зелен 20 секунди. Колко секунди средно ще чака пешеходец за разрешено преминаване по пътеката?

***Задача* 11.** Каква е вероятността утре Слънцето да изгрее, ако вече n пъти е изгрявало всеки ден?

***Задача* 12.** В единичен кръг (с радиус $r = 1$) избираме случайно хорда. Каква е вероятността избраната хорда да е по-къса от страната на вписания в окръжността равностранен триъгълник?

***Задача* 13.** В три кутии са останали по два бонбона: в първата и двата са от млечен шоколад, във втората от натурален, а в третата бонбоните са различни (един млечен и един натурален). От случайно избрана кутия е изваден бонбон от млечен шоколад. Каква е вероятността и вторият бонбон в кутията да е от същия вид?

***Задача* 14.** Каква е вероятността случайно избран номер на кола (от четири цифри) да съдържа три еднакви цифри? А четирите да са еднакви? А номерът да се състои само от две различни цифри повторени два пъти? Каква е вероятността за щастлив номер (сумата от първите две цифри е равна на сумата от трета и четвърта)?

***Задача* 15.** Изпитна комисия се състои от пет човека A, B, C, D и E. Всеки от тях трябва да зададе по един въпрос. По колко начина могат да се наредят въпросите им, ако въпросът на B трябва да е преди този на A? А колко са начините на подреждане, ако въпросът на B е непосредствено преди този на A?

***Задача* 16.** Покажете, че броят на тегленията на 6 числа от 49, в които поне две са последователни е $C_{49}^6 - C_{44}^6$.

***Задача* 17.** Учителят и учениците му трябва да отговорят на въпрос. Учителят отговаря правилно с вероятност p, случайно избран ученик отговаря правилно с вероятност q ако е момче и r ако е момиче. Да се намери отношението на броя на момчетата към броя на момичетата, ако вероятността отговорът на учителя да съвпадне с този на случайно избран ученик е $1/2$.

***Задача* 18.** От шест билета за театър четири са на първия ред. Каква е вероятността в три случайно избрани (от шестте) два да са на първи ред?

***Задача* 19.** Двадесет отбора се разделят на две равни групи за предварителен етап. Каква е вероятността двата най-силни отбора да попаднат в една група?

***Задача* 20.** В две урни има общо 25 топки - бели и черни. От двете урни изваждаме по една топка. Известно е, че вероятността двете топки да са бели е равна на 0.54. Каква е вероятността двете топки да са черни?

***Задача* 21.**

Нека X е целочислена неотрицателна случайна величина, за която $E[X] = 1$, $E[X^2] = 2$ и $E[X^3] = 5$. (С $E[Y]$ означаваме математическото очакване на случайна величина Y.) Намерете най-малката възможна стойност на вероятността на събитието $\{X = 0\}$.