**СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „Св. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ”**
**ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА**
**КАТЕДРА „МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ”**

**Доц. д-р Георги Атанасов Александров**

# СИЛНИ БАЗИСИ НА МАРКУШЕВИЧ В НЕСЕПАРАБЕЛНИ БАНАХОВИ ПРОСТРАНСТВА

## Хабилитационен труд

**за участие в конкурс за професор по**
**Професионално направление 4.5. Математика,**
**Специалност 01.01.04 – Математически анализ**

**София, 2015**

# СЪДЪРЖАНИЕ

| | | |
|---|---|---|
| | | *Стр.* |
| **Въведение** | | **3** |
| **1.** | **Базови определения и твърдения** | **4** |
| **2.** | **Силни базиси на Маркушевич в несепарабелни пространства на Банах** | **6** |
| | **2.1. Характеризиране на силните базиси на Маркушевич** | **6** |
| | **2.2. Банахови пространства, притежаващи силен базис на Маркушевич** | **12** |
| | **2.3. Банахови пространства, непритежаващи силен базис на Маркушевич** | **17** |
| | **2.4. Връзка между силните и нормиращите базиси на Маркушевич** | **20** |
| **3.** | **Обозначения** | **29** |
| **4.** | **Литература** | **31** |

## Въведение

Началото на систематичното изучаване на нормираните линейни пространства се поставя с появата на книгата на S.Banach The′orie des ope′rations line′aires ([B]) през 1932 г. Като резултат от задълбочените изследвания на редица изтъкнати математици теорията на Банаховите пространства се развива на само в дълбочина, но и разширява обхвата си.Установяват са дълбоки връзки между нея и други области на математиката.

Една от главните теми за изследване е намирането на връзката между глобалната структура на Банаховите пространства и различните видове обобщения на „координатни системи” или „базиси”, които те притежават. Съществуването на „хубави” базиси в Банаховите пространства е много желателно, защото са полезни при аналитичните изследвания, при осъществяването на различни конструкции, при класифицирането на пространствата и др. Надеждата да има такива системи в Банаховите пространства обаче е опровергана. Естествено обобщение на координатна система в крайно мерните линейни пространства например е базисът на Шаудер в сепарабелни Банахови пространства. Такъв базис притежават класическите сепарабелни Банахови пространства. P.Enflo в своята забележителна работа [E,1974] отхвърля очакването за съществуване на такъв базис във всяко сепарабелно Банахово пространство. Той конструира сепарабелно Банахово пространство без апроксимационно свойство, следователно това пространство не може да притежава базис на Шаудер.

По-„лек” вариант на „координатни системи” разглежда S.Banach в [B, Appendix, Remarks to Ch.VII, §1], наречени от него „complete biorthogonal systems”. S.Banach отбелязва в [B], че във всяко сепарабелно нормирано пространство съществува такава система и поставя въпроса за съществуването на ограничена такава система в пространството. A.I. Markushevich в своята работа [M,1943] разглежда така наречените „bases in the wide sense” като естествено обобщение на тригонометричните системи. Той доказва съществуването на такива системи във всяко сепарабелно Банахово пространство и дава някои техни характеристики. Системите на S.Banach и A.I. Markushevich носят сега името „базис на Маркишевич”, или по-кратко „М-базис”.

Силни М-базиси в сепарабелни Банахови пространства се появяват (без да е използван специален термин за тях) в [R,1970] на W.H.Ruckle и на W.J.Davis, I.Singer в [DSing,1973] и впоследствие са описани подробно в монографията [S2,1981] на I.Singer.

Силните базиси на Маркушевич в несепарабелни Банахови пространства (*понятието е пренесено в несепарабелния случай в работа* [A2] ) е основен обект на разглеждане в настоящата работа. Приведени са необходими и достатъчни условия един базис на Маркушевич да бъде силен. Построени са силни М-базиси в Банаховото пространство $C[0,\xi]$ от непрекъснатите функции върху интервала $[0,\xi]$ от трансфинитни числа. Дадени са примери на несепарабелни Банахови пространства, непритежаващи силни М-базиси. Показано е съществуването на Банахово пространство с М-базис, но непритежаващо силен М-базис. Разгледана е връзката между силните и нормиращите базиси на Маркушевич.

## 1. Базови определения и твърдения

Нека $X$ е Банахово пространство над $\mathbb{R}$, $X^*$ е спрегнатото пространство на $X$ и $I$ е непразно множество.

**Дефиниция 1.1:** *Фамилията* $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ *от* $X \times X^*$ *се нарича* ***биортогонална система*** *в* $X \times X^*$, *ако за всяка двойка* $i, j \in I$, $f_i(x_j) = \delta_{ij}$, *където* $\delta_{ij}$ *е делтата на Кронекер.*

**Дефиниция 1.2:** *Фамилията* $\{x_i\}_{i\in I}$ *от* $X$ *се нарича* ***минимална система*** *на* $X$, *ако съществува фамилия* $\{f_i\}_{i\in I}$ *от* $X^*$ *така, че* $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ *е биортогонална система.*

**Свойство 1.3:** *Фамилията* $\{x_i\}_{i\in I} \subset X$ *е минимална система на* $X$ *тогава и само тогава, когато за всяко* $j \in I, x_j \notin [x_i]_{i\in I, i\neq j}$.

**Дефиниция 1.4:** *Фамилията* $\{x_i\}_{i\in I}$ *от* $X$ *се нарича* ***фундаментална*** *на* $X$, *ако* $[x_i]_{i\in I} = X$.

В случая, когато фамилията $\{x_i\}_{i\in I}$ е фундаментална и минимална система на $X$, тогава съществува единствена фамилията $\{f_i\}_{i\in I}$ в $X^*$, такава, че системата $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ е биортогонална. В този случай, съответстващата система $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ също се нарича *фундаментална*.

**Свойство 1.5:** *Нека биортогоналната система* $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ *от* $X \times X^*$ *е фундаментална. Тогава за всяко крайно непразно множество* $A \subset I$ *имаме, че* $X = [x_i]_{i\in A} \oplus [x_i]_{i\in I\setminus A}$.

**Дефиниция 1.6:** *Биортогонална система* $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ *от* $X \times X^*$ *се нарича* ***тотална****, ако* $w^* - [f_i]_{i\in I} = X^*$.

В случай, че система $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ от $X \times X^*$ е тотална, ще казваме също така, че фамилията $\{f_i\}_{i\in I}$ е *тотална* върху $X$.

**Свойство 1.7:** *Нека фамилията* $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ *е биортогонална систем в* $X \times X^*$. *Тогава следващите условия са еквивалентни:*

(i) *Биортогонална система* $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ *е тотална.*

(ii) *Ако* $f_i(x) = 0, \forall i \in I$, *то* $x = 0$.

(iii) *Ако* $x \neq 0$, *то* $\exists i \in I$ *така,че* $f_i(x) \neq 0$.

**Дефиниция 1.8:** *Фамилията* $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$*, която едновременно е биортогонална, тотална и фундаментална в* $X \times X^*$*, се нарича* ***базис на Маркушевич (Markushevich basis)*** *или за краткост* ***М-базис (M-basis)*** *на Банаховото пространство* $X$ *.*

**Дефиниция 1.9:** *Базис на Маркушевич* $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$*, такъв, че за всяко* $x \in X$ *,* $x \in [f_i(x)x_i]_{i\in I}$*, се нарича* ***силен базис на Маркушевич (strong M-basis)*** *.*

**Дефиниция 1.10:** *Базис на Маркушевич* $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ *се нарича* ***ограничен****, ако* $\sup\limits_{i\in I}\|x_i\|.\|f_i\| < \infty$.

**Дефиниция 1.11:** *Множество* $N$ *от спрегнатото пространство* $X^*$ *на Банаховото пространство* $(X, \|.\|)$ *се нарича* $\lambda$***-нормиращо****,* $0 < \lambda \le 1$*, ако изображението* $|||\cdot|||$*, дефинирано върху* $X$ *чрез правилото*

$$|||x||| = \sup\left\{ f(x) :\ f \in N \cap B_1(X^*, \|.\|) \right\},\ x \in X,$$

*е норма такава, че* $\lambda\|x\| \le |||x||| \le \|x\|$*. Ако* $N$ *е нормиращо за някое* $0 < \lambda \le 1$*, то казваме, че* $N$ *е* ***нормиращо****.*

**Дефиниция 1.12:** *Базис на Маркушевич* $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ *се нарича* ***нормиращ****, ако подпространството* $[f_i]_{i\in I}$ *е нормиращо.*

**Дефиниция 1.13:** *Базис на Маркушевич* $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ *се нарича* ***изброимо-нормиращ****, ако подпространството*

$$\left\{ f : supp(f) = \{ i :\ f(x_i) \neq 0 \} \text{ е изброим} \right\} \subset X^*$$

*е нормиращо.*

# 2. СИЛНИ БАЗИСИ НА МАРКУШЕВИЧ В НЕСЕПАРАБЕЛНИ ПРОСТРАНСТВА НА БАНАХ

## 2.1. Характеризиране на силните базиси на Маркушевич

В следващата теорема са приведени необходими и достатъчни условия един М-базис да е силен базис на Маркушевич.

**Теорема 2.1**([А2])**:** *Нека* $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ *е базис на Маркушевич за Банаховото пространство* $X$ *. Тогава следващите условия са еквивалентни:*

(i) *Базисът на Маркушевич* $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ *е силен.*

(ii) *За всяко непразно множество* $A\subset I$ *имаме* $\left([f_i]_{i\in A}\right)_{\perp}\subset[x_i]_{i\in I\setminus A}$.

(iii) *За всяко непразно множество* $A\subset I$ *имаме* $\left([f_i]_{i\in A}\right)_{\perp}=[x_i]_{i\in I\setminus A}$.

(iv) *За всяко непразно множество* $A\subset I$ *имаме* $\left([f_i]_{i\in A}\right)_{\perp}^{\perp}\supset\left([x_i]_{i\in I\setminus A}\right)^{\perp}$.

(v) *За всяко непразно множество* $A\subset I$ *имаме* $\left([f_i]_{i\in A}\right)_{\perp}^{\perp}=\left([x_i]_{i\in I\setminus A}\right)^{\perp}$.

(vi) *За всяко непразно множество* $A\subset I$ *имаме* $\bigcap\limits_{j\in A}[x_i]_{i\neq j}=[x_i]_{i\in I\setminus A}$.

(vii) *Нека* $A$ е *непразното подмножество на* $I$ *и* $F_A$ *е изометрията между пространствата* $\left([x_i]_{i\in I\setminus A}\right)^{\perp}$ *и* $\left(X\,/\,[x_i]_{i\in I\setminus A}\right)^{*}$*, зададена чрез правилото* $F_A(f)(\hat{x})=f(x)$*, където* $\hat{x}=x+[x_i]_{i\in I\setminus A}$*,* $x\in X$ *и* $f\in\left([x_i]_{i\in I\setminus A}\right)^{\perp}$*. Тогава системата* $\left\{\hat{x}_j, F_A(f_j)\right\}_{j\in A}$ *е тотална на фактор-пространството* $X\,/\,[x_i]_{i\in I\setminus A}$.

(viii) *За всяко непразно множество* $A\subset I$ *системата* $\left\{\hat{x}_j, F_A(f_j)\right\}_{j\in A}$ *е базис на Маркушевич на фактор-пространството* $X\,/\,[x_i]_{i\in I\setminus A}$.

(ix) *За всяко непразно множество* $A\subset I$ *системата* $\{x_i, f_i\}_{i\in A}$ *е силен М-базис на подпространството* $Y=[x_i]_{i\in A}$ *на пространството* $X$ .

(x) *За всяка двойка* $x\in X$ *и* $f\in X^*$ *такава, че множеството* $\{i\in I: f(x_i)f_i(x)\neq 0\}$ *е крайно, имаме*

$$f(x)=\sum_{i\in I}f(x_i)f_i(x)=\lim_{A\in\mathcal{F}(I)}\sum_{i\in A}f(x_i)f_i(x),$$

*където* $\mathcal{F}(I)$ *е съвкупността от всичките крайни подмножества на множеството* $I$ *, наредена по включване.*

***Доказателство:*** Доказателството ще проведем съгласно приложената схема.

$$\begin{tikzcd}
(ix) \arrow[r, leftrightarrow] & (i) \arrow[dr] & & (iii) \arrow[ll] \arrow[r, leftrightarrow] & (vi) \\
(x) \arrow[rr, leftrightarrow] & & (ii) \arrow[ur] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl] & (vii) \arrow[r, leftrightarrow] & (viii) \\
& (iv) \arrow[rr] & & (v) \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Навсякъде в доказателството на теоремата с $A$ ще обозначаваме непразно подмножество на множеството $I$.

**(i) $\rightarrow$ (ii).** Нека $x \in \left( [ f_i ]_{i \in A} \right)_{\perp}$. Тогава $f_i(x) = 0$ за всяко $i \in A$. От това, че М-базисът $\{x_i, f_i\}_{i \in I}$ е силен, получаваме, че

$$x \in [ f_i(x) x_i ]_{i \in I} = [ f_i(x) x_i ]_{i \in I \setminus A} \subset [ x_i ]_{i \in I \setminus A}.$$

Следователно $\left( [ f_i ]_{i \in A} \right)_{\perp} \subset [ x_i ]_{i \in I \setminus A}$.

**(ii) $\rightarrow$ (iii).** Системата $\{x_i, f_i\}_{i \in I}$ като М-базис е биортогонална. Тогава, ако $A \subset I$ и $x \in [x_i]_{i \in I \setminus A}$, то за всяко $f \in [ f_i ]_{i \in A}$ имаме, че $f(x) = 0$, т.е. $x \in \left( [ f_i ]_{i \in A} \right)_{\perp}$. Следователно, $[x_i]_{i \in I \setminus A} \subset \left( [ f_i ]_{i \in A} \right)_{\perp}$ и като вземем предвид условие (ii), получаваме, че $\left( [ f_i ]_{i \in A} \right)_{\perp} = [x_i]_{i \in I \setminus A}$.

**(iii) $\rightarrow$ (i).** Нека $x \in X$ и $A = \{ i \in I : f_i(x) = 0 \}$. Тогава $x \in \left( [ f_i ]_{i \in A} \right)_{\perp}$ и тъй като по условие $\left( [ f_i ]_{i \in A} \right)_{\perp} = [x_i]_{i \in I \setminus A}$, то $x \in [x_i]_{i \in I \setminus A}$. От това, че за всяко $i \in I \setminus A$, $f_i(x) \neq 0$, то имаме $x \in [x_i]_{i \in I \setminus A} = [ f_i(x) x_i ]_{i \in I \setminus A} \subset [ f_i(x) x_i ]_{i \in I}$, т.е. $x \in [ f_i(x) x_i ]_{i \in I}$. Следователно М-базисът $\{x_i, f_i\}_{i \in I}$ е силен.

При доказателствата на някои от следващите твърдения, ще се нуждаем от следния факт:

***Факт 1:*** Ако множествата $Y, Z$ на Банаховото пространство $X$ са такива, че $Y \subset Z$, то $Y^{\perp} \supset Z^{\perp}$.

Действително, ако $f \in Z^{\perp}$, то $f(x) = 0$ за всяко $x \in Z$. Тъй като $Z \supset Y$, то следва, че $f \in Y^{\perp}$, т.е. $Y^{\perp} \supset Z^{\perp}$.

**(ii) $\to$ (iv).** По условие (ii) $\left([f_i]_{i\in A}\right)_\perp \subset [x_i]_{i\in I\setminus A}$. Тогава съгласно *Факт 1* получаваме нашето твърдение, че $\left([f_i]_{i\in A}\right)_\perp^\perp \supset \left([x_i]_{i\in I\setminus A}\right)^\perp$.

**(iv) $\to$ (v).** Съгласно минималността на системата $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ е изпълнено включването $\left([f_i]_{i\in A}\right)_\perp \supset \{x_i\}_{i\in I\setminus A}$ и следователно $\left([f_i]_{i\in A}\right)_\perp \supset [x_i]_{i\in I\setminus A}$. Тогава, съгласно *Факт 1*, $\left([f_i]_{i\in A}\right)_\perp^\perp \subset \left([x_i]_{i\in I\setminus A}\right)^\perp$, и като вземем под внимание условие (iv), получаваме, че $\left([f_i]_{i\in A}\right)_\perp^\perp = \left([x_i]_{i\in I\setminus A}\right)^\perp$.

**(v) $\to$ (ii).** Да допуснем, че за някое множество $A\subset I$ съществува елемент $x_0 \in \left([f_i]_{i\in A}\right)_\perp$ такъв, че $x_0 \notin [x_i]_{i\in I\setminus A}$. Съгласно теоремата на Хан-Банах, съществува линеен функционал $f_0 \in X^*$ такъв, че $f_0(x_0)=1$ и $f_0 \in \left([x_i]_{i\in I\setminus A}\right)^\perp$. Съгласно условие (v) $\left([f_i]_{i\in A}\right)_\perp^\perp = \left([x_i]_{i\in I\setminus A}\right)^\perp$, откъдето получаваме, че $f_0(x_0)=0$. Това противоречи на избора на $x_0$, откъдето следва верността на условие (ii), т.е., че $\left([f_i]_{i\in A}\right)_\perp \subset [x_i]_{i\in I\setminus A}$.

**(iii) $\to$ (vi).** От това, че системата $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ е базис на Маркушевич, получаваме, че

(1) $$\left([f_i]_{i\in A}\right)_\perp = \bigcap_{j\in A} [x_i]_{i\neq j}.$$

Действително, нека $x \in \left([f_i]_{i\in A}\right)_\perp$. Съгласно условие (iii), $x\in [x_i]_{i\in I\setminus A}$. Тогава $x\in [x_i]_{i\neq j}$ за всяко $j\in A$, т.е. $x \in \bigcap_{j\in A}[x_i]_{i\neq j}$. Следователно

(2) $$\left([f_i]_{i\in A}\right)_\perp \subset \bigcap_{j\in A} [x_i]_{i\neq j}.$$

Нека сега $x \in \bigcap_{j\in A}[x_i]_{i\neq j}$. Тогава за всяко $j\in A$ имаме, че $f_i(x)=0$, т.е. $x \in \left([f_i]_{i\in A}\right)_\perp$. Следователно

(3) $$\bigcap_{j\in A} [x_i]_{i\neq j} \subset \left([f_i]_{i\in A}\right)_\perp.$$

От (2) и (3) получаваме равенство (1). Сега от условие (iii) и равенство (1) следва твърдение (vi), т.е., че $\bigcap_{j\in A}[x_i]_{i\neq j} = [x_i]_{i\in I\setminus A}$.

**(vi) $\to$ (iii).** Твърдението (iii) следва от условие (vi) и равенство (1).

**(ii) $\to$ (vii).** Първо да отбележим, че системата $\left\{\hat{x}_j, F_A\left(f_j\right)\right\}_{j\in A}$ е биортогонална. Действително, за всяко $j,s \in A$ имаме

$$F_A\left(f_j\right)\left(\hat{x}_s\right) = F_A\left(f_j\right)\left(x_s + \left[x_i\right]_{i\in I\setminus A}\right) = f_j(x_s) = \delta_{js}.$$

Нека сега елементът $\hat{x} \in X \,/\, \left[x_i\right]_{i\in I\setminus A}$ е такъв, че

$$F_A\left(f_j\right)(\hat{x}) = F_A\left(f_j\right)\left(x + \left[x_i\right]_{i\in I\setminus A}\right) = f_j(x) = 0,\ \forall j \in A.$$

Тогава $x \in \left(\left[f_i\right]_{i\in A}\right)_{\perp}$ и, съгласно условие (ii), имаме, че $x \in \left[x_i\right]_{i\in I\setminus A}$, т.е. $\hat{x} = 0$. Следователно, системата $\left\{\hat{x}_j, F_A\left(f_j\right)\right\}_{j\in A}$ е тотална на фактор-пространството $X \,/\, \left[x_i\right]_{i\in I\setminus A}$.

**(vii) $\to$ (ii).** Ако $x \in \left(\left[f_j\right]_{j\in A}\right)_{\perp}$, то за всяко $j \in A,\ f_j(x) = 0$. Тогава $F_A\left(f_j\right)(\hat{x}) = F_A\left(f_j\right)\left(x + \left[x_i\right]_{i\in I\setminus A}\right) = f_j(x) = 0,\ \forall j \in A$, и тъй като системата $\left\{\hat{x}_j, F_A\left(f_j\right)\right\}_{j\in A}$ е тотална на фактор-пространството $X \,/\, \left[x_i\right]_{i\in I\setminus A}$, то следва, че $\hat{x} = 0$. Следователно, $x \in \left[x_i\right]_{i\in I\setminus A}$.

**(vii) $\to$ (viii).** За да покажем, че системата $\left\{\hat{x}_j, F_A\left(f_j\right)\right\}_{j\in A}$ е M-базис, остава само да проверим, че фамилията $\left\{\hat{x}_j\right\}_{j\in A}$ е фундаментална. Действително, нека $x \in X$ и $\hat{x}$ е съответният елемент от $X \,/\, \left[x_i\right]_{i\in I\setminus A}$. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува елемент $v \in lin\left\{x_i\right\}_{i\in I\setminus A}$ такъв, че $\|x - v\| < \varepsilon$. Нека $v = y + z$, където $y \in lin\left\{x_i\right\}_{i\in A}$ и $z \in lin\left\{x_i\right\}_{i\in I\setminus A}$. Тогава

$$\|\hat{x} - \hat{y}\| = inf\left\{\|x - y + w\| : w \in \left[x_i\right]_{i\in I\setminus A}\right\} \le \|x - y - z\| = \|x - v\| < \varepsilon,$$

което показва, че $\hat{x} \in \left[\hat{x}_j\right]_{j\in A}$. Следователно фамилията $\left\{\hat{x}_j\right\}_{j\in A}$ е фундаментална, с което доказахме свойство (viii).

**(viii) $\to$ (vii).** Следва непосредствено от дефиницията за M-базис.

**(i) $\to$ (ix).** Нека $A$ е непразно подмножество на $I$ и $Y = \left[x_i\right]_{i\in A}$. Очевидно е, че системата $\left\{x_i, f_i\right\}_{i\in A}$ е минимална и фундаментална в пространството $Y$. Нека сега $x$ е такъв елемент от $Y = \left[x_i\right]_{i\in A}$ така, че

(4) $$f_i(x)=0, \forall i \in A.$$

Тогава $x \in \left( [f_i]_{i\in A} \right)_\perp$ и от това, че М-базисът $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ е силен, съгласно свойство (iii), следва, че $x \in [x_i]_{i\in I\setminus A}$.От друга страна $x \in Y = [x_i]_{i\in A}$ и, следователно,

(5) $$f_i(x)=0, \forall i \in I \setminus A.$$

Тогава от (4) и (5) получаваме, че $f_i(x)=0, \forall i \in I$, и съгласно тоталността на М-базиса $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ (*Свойство 1.7*), следва, че $x=0$, т.е. системата $\{x_i, f_i\}_{i\in A}$ е тотална в $Y$. Следователно системата $\{x_i, f_i\}_{i\in A}$ е базис на Маркушевич в $Y$.

По условие М-базисът $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ е силен. Тогава за всеки елемент $x \in Y = [x_i]_{i\in A}$ ще имаме, че $x \in [f_i(x)x_i]_{i\in I} = [f_i(x)x_i]_{i\in A}$, което показва, че М-базис $\{x_i, f_i\}_{i\in A}$ е силен в пространството $Y = [x_i]_{i\in A}$.

**(ix)** $\rightarrow$ **(i).** Следва при $A = I$.

**(ii)** $\rightarrow$ **(x).** Нека двойката $x \in X$ и $f \in X^*$ е такава, че множеството $J = \{ i \in I : f(x_i) f_i(x) \neq 0 \}$ е крайно и $A = \{ i \in I : f_i(x) = 0 \}$. Тогава $J \subset I \setminus A$ и $x \in \left( [f_i]_{i\in A} \right)_\perp$. От свойство (ii) , имаме, че $x \in [x_i]_{i\in I\setminus A}$. Съгласно свойство (ix), системата $\{x_i, f_i\}_{i\in I\setminus A}$е силен М-базис в пространството $Y = [x_i]_{i\in I\setminus A}$. Тогава, съгласно *Свойство 1.5,* $Y = [x_i]_{i\in I\setminus A} = [x_i]_{i\in J} \oplus [x_i]_{i\in (I\setminus A)\setminus J}$.

Да предположим, че множеството $J \neq \emptyset$. Тогава $x$ можем да го представим във вида $x = \sum_{i\in J} f_i(x) x_i + y$, където $y \in [x_i]_{i\in (I\setminus A)\setminus J}$. Имаме, че $f(y) = 0$, тъй като $f(x_i) = 0$ за всяко $i \in (I \setminus A) \setminus J$. Следователно

$$f(x) = \sum_{i\in J} f(x_i) f_i(x) + f(y) = \sum_{i\in J} f(x_i) f_i(x) = \sum_{i\in I} f(x_i) f_i(x).$$

Нека сега множеството $J = \emptyset$. Тогава $f(x_i) f_i(x) = 0$ за всяко $i \in I$. От една страна, получаваме, че

(6) $$\sum_{i\in I} f(x_i) f_i(x) = 0.$$

От друга страна, че $f(x_i) = 0$ за всяко $i \in I \setminus A$ и тъй като $x \in [x_i]_{i\in I\setminus A}$, то (7) $f(x) = 0$.

Тогава от (6) и (7) следва равенството $f(x) = \sum_{i\in I} f(x_i) f_i(x)$.

**(x) $\rightarrow$ (ii).** Да допуснем, че за някое непразно подмножество $A$ на $I$ съществува елемент $x_0 \in \left( [ f_i ]_{i \in A} \right)_{\perp}$ такъв, че $x_0 \notin [ x_i ]_{i \in I \setminus A}$.

Съгласно теоремата на Хан-Банах, съществува линеен функционал $f_0 \in X^*$ такъв, че $f_0( x_0 ) = 1$ и $f_0 \in \left( [ x_i ]_{i \in I \setminus A} \right)^{\perp}$. Тогава за двойката $x_0 \in X$ и $f_0 \in X^*$ множеството $\{ i \in I : f_0( x_i ) f_i( x_0 ) \neq 0 \}$ е празно и следователно

(8) $$\sum_{i \in I} f_0( x_i ) f_i( x_0 ) = 0 .$$

От друга страна, съгласно свойство (x) имаме , че

(9) $$f_0( x_0 ) = \sum_{i \in I} f_0( x_i ) f_i( x_0 ) .$$

От (8) и (9) получаваме, че $f_0( x_0 ) = 0$, което противоречи на избора на $f_0 \in X^*$. Следователно от (x) следва (ii), с което завършихме доказателството на теоремата. □

## 2.2. Банахови пространства притежаващи силен базис на Макушевич

Нека $C[0,\xi]$ е Банаховото пространство от всичките непрекъснати функции върху интервала от трансфинитните числа $[0,\xi]$, снабден с топология, породена от естествената наредба на трансфинитните числа.

Определяме за всяко трансфинитно число $\alpha \le \xi$ функциите $x_\alpha \in C[0,\xi]$, като полагаме

$$x_\alpha(\gamma) = \begin{cases} 1, \; ako \;\; \gamma \le \alpha \\ 0, \; ako \;\; \alpha < \gamma \le \xi \end{cases}$$

и линейните функционали $f_\alpha \in C^*[0,\xi]$, като $f_\alpha = \delta_\alpha - \delta_{\alpha+1}$, ако $\alpha < \xi$ и $f_\xi = \delta_\xi$, където $\delta_\alpha$ е мярката на Дирак, съсредоточена в точката $\alpha \in [0,\xi]$, т.е. ако $x \in C[0,\xi]$, то $\delta_\alpha(x) = x(\alpha)$.

**Теорема 2.2** ([A1], [A2])**:** *Системата* $\{x_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha\in[0,\xi]}$ *е ограничен базис на Маркушевич в пространството* $C[0,\xi]$.

***Доказателство:*** Да проверим, че системата $\{x_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha\in[0,\xi]}$ притежава всичките условия, за да бъде ограничен М-базис на пространството $C[0,\xi]$.

*1. Биортогоналност на системата* $\{x_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha\in[0,\xi]}$

Действително, за всяко $\alpha,\beta \in [0,\xi]$ имаме, че

$$f_\alpha(x_\beta) = \delta_\alpha(x_\beta) - \delta_{\alpha+1}(x_\beta) = \left\{ \begin{array}{l} x_\beta(\alpha) - x_\beta(\alpha+1) = 1-1 = 0, \; ako \;\; \alpha < \beta \\ x_\beta(\beta) - x_\beta(\beta+1) = 1-0 = 1, \; ako \;\; \alpha = \beta \\ x_\beta(\alpha) - x_\beta(\alpha+1) = 0-0 = 0,, \; ako \;\; \beta < \alpha < \xi \end{array} \right\} = \delta_{\alpha\beta}$$

и $f_\xi(x_\alpha) = \delta_\xi(x_\beta) = x_\beta(\xi) = \delta_{\xi\delta}$, което показва биортогоналността на нашата система.

*2. Фундаменталност на системата* $\{x_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha\in[0,\xi]}$.

Произведението $x_\alpha x_\beta = x_\alpha$, ако $\alpha \le \beta$, което показва, че подпространството $[x_\alpha]_{\alpha\in[0,\xi]}$ е подалгебра в пространството $C[0,\xi]$. От друга страна, тази подалгебра разделя точките на компактното множество $[0,\xi]$, тъй като, ако $\alpha,\beta \in [0,\xi]$ и $\alpha \ne \beta$ (ще считаме, че $\alpha < \beta$), то $x_\alpha(\alpha) = 1$ и $x_\alpha(\beta) = 0$. Освен това тази подалгебра съдържа елемента $x_\xi$, който е единицата на пространството $C[0,\xi]$. Тогава, съгласно теоремата на Вайерщрас-Стоун ([DS]) $\left[x_\alpha\right]_{\alpha\in[0,\xi]}=C[0,\xi]$, което показва, че системата $\{x_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha\in[0,\xi]}$ е фундментална в пространството $C[0,\xi]$.

*3. Тоталност на системата* $\{x_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha\in[0,\xi]}$.

Нека за някое $x\in C[0,\xi]$, $f_\alpha(x)=0$ за всяко $\alpha\in[0,\xi]$. Първо ще покажем, че за всяко $\alpha\in[0,\xi]$

(1) $$x(\alpha)=x(0).$$

Доказателството ще проведем с помощта на трансфинитната индукция.

Първо, нека имаме, че $f_0(x)=0$. Тъй като

$$f_0(x)=\delta_\alpha(0)-\delta_{\alpha+1}(1)=x(0)-x(1)=0,$$

то $x(1)=x(0)$. Следователно твърдение (1) е вярно за $\alpha=1$.

Нека допуснем сега, че твърдение (1) е изпълнено за всяко трансфинитно число $\alpha<\alpha'$.

Да разгледаме първо случая, когато $\alpha'$ не е гранично трансфинитно число. Тогава $\alpha'=\beta+1$ и

$$f_\beta(x)=\delta_\beta(x)-\delta_{\beta+1}(x)=x(\beta)-x(\beta+1)=x(\beta)-x(\alpha')=0.$$

Следователно $x(\alpha')=x(\beta)=0$.

Нека сега $\alpha'$ е гранично трансфинитно число. Тогава обобщената редица $\{\alpha\}_{\alpha\in(\alpha_0,\alpha')}$ е сходяща в топологията, породена от наредбата към елемента $\alpha'$. От непрекъснатостта на функцията $x=x(\alpha)$ имаме, че

$$x(\alpha')=\lim_{\alpha\in(\alpha_0,\alpha')}x(\alpha)=\lim_{\alpha\in(\alpha_0,\alpha')}x(0)=x(0).$$

Следователно $x(\alpha)=x(0)$ за всяко $\alpha\in[0,\xi]$. Тогава за $\alpha\in[0,\xi]$ имаме, че

$$x(\alpha)=x(0)=x(\xi)=f_\xi(x)=0,$$

т.е. функцията $x\equiv 0$, което и искахме да докажем.

*4. Ограниченост на системата* $\{x_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha\in[0,\xi]}$.

Тъй като $\|x_\alpha\|=1$ и $\|f_\alpha\|\le 2$ за всяко $\alpha\in[0,\xi]$, то $\sup\limits_{\alpha\in[0,\xi]}\|x_\alpha\|.\|f_\alpha\|\le 2<\infty$,

т.е. нашата система е ограничена.

Следователно, от доказаното по-горе, следва, че системата $\{x_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha\in[0,\xi]}$ е ограничен базис на Маркушевич в пространството $C[0,\xi]$, с което доказахме нашето твърдение. □

**Теорема 2.3** ([A1], [A2])**:** *Ограниченият М-базис* $\{x_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha\in[0,\xi]}$ *в пространството* $C[0,\xi]$ *е силен базис на Маркушевич.*

***Доказателство:*** Съгласно дефиницията за силен М-базис и Теорема 2.2 остава да покажем, че ако $x \in C[0,\xi]$, $x \neq 0$, то

$$x \in [\, f_\alpha(x)x_\alpha\,]_{\alpha\in[0,\xi]}.$$

За тази цел, ако $x \in C[0,\xi]$, $x \neq 0$, то за всяко $\varepsilon > 0$ ще построим функция $y_\varepsilon \in [x_\alpha]_{\alpha\in supp(x)}$ такава, че

(1) $$\|x - y_\varepsilon\|_\infty \le \varepsilon .$$

От това следва, че функцията $x = x(\alpha)$, $\alpha \in [0,\xi]$, може да се апроксимира с произволна точност с елементи от множеството $[\, f_\alpha(x)x_\alpha\,]_{\alpha\in[0,\xi]}$, тъй като $[\, f_\alpha(x)x_\alpha\,]_{\alpha\in[0,\xi]} = [x_\alpha]_{\alpha\in supp(x)}$, което доказва нашето твърдение.

И така, нека функцията $x \in C[0,\xi]$, $x \neq 0$. Да фиксираме произволно $\varepsilon > 0$ и да пристъпим към построяването на функцията $y_\varepsilon = y_\varepsilon(\alpha)$ от $[x_\alpha]_{\alpha\in supp(x)}$, удовлетворяваща условието (1).

Преди всичко, да обърнем внимание, че множеството $supp(x)$ е най-много изброимо, тъй като $\{\, f_\alpha(x)\}_{\alpha\in[0,\xi]} \in c_0([0,\xi])$ за всяко $x \in C[0,\xi]$ (*виж Лема 2.6*).

Като начало, да определим елемента $\alpha_0 \in supp(x)$ по следния начин. Ако множеството $supp(x)$ има най-голям елемент, то този елемент ще обозначим с $\alpha_0$. Ако най-голям елемент в множеството $supp(x)$ не съществува, то нека $\beta$ е най-малкото трансфинитно число, по-голямо от всичките елементи на множеството $supp(x)$. Тогава, поради непрекъснатостта на функцията $x = x(\alpha)$, съществува елемент $\alpha_0$ от $supp(x)$ такъв, че за всяко $\alpha \in supp(x)$ и $\alpha > \alpha_0$ да имаме

(2) $$|x(\beta) - x(\alpha)| < \varepsilon .$$

Да забележим, че $[\beta,\xi] \cap supp(x) = \varnothing$ и следователно $x(\alpha) = x(\xi) = f_\xi(x) = 0$ за всяко $\alpha \in [\beta,\xi]$.

*Стъпка 0:* Да обозначим с $G_0 = (\alpha_0,\xi]$ и $s_0 = s_0(\alpha)$ функцията, тъждествено равна на нула върху интервала $[0,\xi]$. Тогава

$$\|x - s_0\|_{G_0} = sup\{|x(\alpha) - s_0(\alpha)| : \alpha \in G_0\} = sup\{|x(\alpha)| : \alpha \in G_0\} \le \varepsilon .$$

Ако се окаже, че $G_0 = \varnothing$ е празното множество, тогава преминаваме към *Стъпка 1*.

*Стъпка 1:* Нека сега $\Gamma_1(x)=supp(x)\setminus G_0$ и $\alpha_1$ е най-малкият елемент на $\Gamma_1(x)$. Полагаме с $G_1=[0,\alpha_1]$ и функцията $s_1=x(\alpha_1)x_{\alpha_1}$. Тогава имаме, че

$$\|x-s_1\|_{G_1}=sup\{|x(\alpha)-s_1(\alpha)|:\alpha\in G_1\}=sup\{|x(\alpha)-x(\alpha_1)x_{\alpha_1}(\alpha)|:\alpha\in G_1\}=0<\varepsilon$$

*Стъпка 2:* Нека сега $\Gamma_2(x)=\Gamma_1(x)\setminus G_1$. Построяваме подмножеството $A_2(x)$ на множеството $\Gamma_2(x)$ по следния начин:

$$A_2(x)=\{\alpha\in\Gamma_2(x):|x(\alpha)-x(\beta)|\le\varepsilon,\ \forall\beta\in(\alpha_1,\alpha]\}.$$

От непрекъснатостта на функцията $x$, следва, че множеството $A_2(x)$ има най-голям елемент. Да обозначим с $\alpha_2=\max A_2(x)$.

Полагаме с $G_2=(\alpha_1,\alpha_2]$ и построяваме функцията $s_2=x(\alpha_2)\left(x_{\alpha_2}-x_{\alpha_1}\right)$. Тогава имаме, че

$$\|x-s_2\|_{G_2}=sup\{|x(\alpha)-s_2(\alpha)|:\alpha\in G_2\}=$$
$$=sup\{|x(\alpha)-x(\alpha_2)\left(x_{\alpha_2}(\alpha)-x_{\alpha_1}(\alpha)\right)|:\alpha\in G_2\}=$$
$$=sup\{|x(\alpha)-x(\alpha_2)(1-0)|:\alpha\in G_2\}=$$
$$=sup\{|x(\alpha)-x(\alpha_2)|:\alpha\in G_2\}\le\varepsilon.$$

Продължаваме по нататък по аналогия, както в *Стъпка 2* , като на *n-та стъпка* полагаме

$$\Gamma_n(x)=\Gamma_{n-1}(x)\setminus G_{n-1}.$$

Построяваме подмножеството

$$A_n(x)=\{\alpha\in\Gamma_n(x):|x(\alpha)-x(\beta)|\le\varepsilon,\ \forall\beta\in(\alpha_{n-1},\alpha]\}.$$

Полагаме

$$\alpha_n=\max A_n(x) \text{ и } G_n=(\alpha_{n-1},\alpha_n].$$

Построяваме функцията

$$s_n=x(\alpha_n)\left(x_{\alpha_n}-x_{\alpha_{n-1}}\right).$$

Тогава

$$\|x-s_n\|_{G_n}=sup\{|x(\alpha)-s_n(\alpha)|:\alpha\in G_n\}=sup\{|x(\alpha)-x(\alpha_n)|:\alpha\in G_n\}\le\varepsilon.$$

Този процес го продължаваме до тогава, докато не изчерпим елементите на на носителя $supp(x)$ на функцията $x$.

Да забележим, че множествата $G_k$ са отворени, две по две не се пресичат и $\bigcup_k G_k=[0,\xi]$. Съвкупността $\{G_k\}_k$ е крайна. Ако допуснем, че съвкупността $\{G_k\}_k$ е безкрайна, то от компактността на трансфинитния интервал $[0,\xi]$ съществува крайно подпокритие. От друга страна, множествата $G_k$ две по две не се пресичат и тогава тази крайна съвкупност няма да покрие интервал $[0,\xi]$, с което получаваме противоречие. Нека съвкупността $\{G_k\}_k$ се състои от $N$ елемента. Дефинираме функцията $y_\varepsilon$, като полагаме

$$y_\varepsilon = \sum_{n=1}^{N} s_n = x(\alpha_1)x_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^{N} x(\alpha_n)\left(x_{\alpha_n} - x_{\alpha_{n-1}}\right).$$

Очевидно, че функцията $y_\varepsilon$ е непрекъсната върху интервала $[0,\xi]$ и следователно

(2) $$y_\varepsilon \in C[0,\xi].$$

Също така

(3) $$y_\varepsilon \in lin\{x_\alpha\}_{\alpha \in supp(x)} \subset [x_\alpha]_{\alpha \in supp(x)}.$$

Освен това

(4) $$\|x - y_\varepsilon\|_\infty = \sup_{\alpha\in[0,\xi]} |x(\alpha) - y_\varepsilon(\alpha)| = \sup_{1\le n\le N} \sup_{\alpha\in[0,\xi]} |x(\alpha) - y_\varepsilon(\alpha)| =$$

$$= \sup_{1\le n\le N} \|x - y_\varepsilon\| = \sup_{1\le n\le N} \|x - s_n\|_{G_n} \le \varepsilon .$$

Следователно от (2), (3) и (4) получаваме, че функцията $x \in [f_\alpha(x)x_\alpha]_{\alpha\in[0,\xi]}$, с което теоремата е доказана. □

## 2.3. Банахови пространства, непритежаващи силни базиси на Маркушевич

Възниква естественият въпрос дали всяко Банахово пространство притежава силен базис на Маркушевич. За сепарабелните Банахови пространства отговорът е положителен. Италианският математик P.Terenzi през 1994г. в своята работа [T] доказва, че всяко сепарабелно Банахово пространство притежава силен М-базис. Не така стоят нещата, когато преминем към разглеждането на несепарабелни Банахови пространства. Тук ще покажем, че съществуват несепарабелни Банахови пространства, непритежаващи силен М-базис даже и когато самото пространство притежава базис на Маркушевич.

Преди да посочим такива примери, да разгледаме едно свойство, което има всяко Банахово пространство със силен базис на Маркушевич, а именно ще докажем следната теорема:

**Теорема 2.4** ([AP1], [HMVZ, p.108])**:** *Ако Банаховото пространство* $X$ *притежава силен М-базис, тогава пространството* $X$ *има еквивалентна локално равномерно изпъкнала норма.*

Да припомним дефиницията за локално равномерно изпъкнала норма.

**Дефиниция 2.5:** *Нормата* $\|\cdot\|$ *на Банахово пространство* $X$ *се нарича* ***локално равномерно изпъкнала (LUR)****, ако всеки път, когато* $x, x_n \in S_1(X)$ *са такива, че* $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n + x\| = 2$*, да следва, че* $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$.

За доказателството на Теорема 2.4 се нуждаем от следните леми:

**Лема 2.6:** *Нека системата* $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ *е базис на Маркушевич в Банаховото пространство* $X$*. Тогава изображението* $T$*, зададено чрез правилото*

$$T(x) = \left\{\frac{f_i(x)}{\|f_i\|}\right\}_{i\in I}, x \in X,$$

*е линейна ограничена инекция от* $X$ *в* $c_0(I)$.

***Доказателство*****:** Образът $T(x) \in l_\infty(I)$ за всяко $x \in X$ и изображението $T$ е линейно и ограничено.

Нека сега елементите $x, y \in X, x \neq y$. Ако допуснем, че $T(x-y) = 0$, то ще имаме, че $f_i(x-y) = 0, \forall i \in I$. Тогава от тоталността на системата $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$, следва, че $x = y$, което противоречи на избора на елементите $x$ и $y$, т.е. $T(x-y) \neq 0$. Следователно изображението $T$ е инективно.

Сега да покажем, че за всяко $x \in X$, $\left\{\frac{f_i(x)}{\|f_i\|}\right\}_{i\in I} \in c_0(I)$. И така, нека $\varepsilon > 0$ и $A_\varepsilon(x) = \left\{i \in I : \frac{|f_i(x)|}{\|f_i\|} > \varepsilon\right\}$. Да допуснем, че за някое $x$, $\left\{\frac{f_i(x)}{\|f_i\|}\right\}_{i\in I} \notin c_0(I)$.

Тогава множеството $A_\varepsilon(x)$ съдържа безброй много елементи. От фундаменталността на М-базиса $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ следва, че за избраните $x \in X$ и $\varepsilon > 0$, съществува $y_\varepsilon = \sum_{i\in\sigma} a_i x_i$ ($\sigma$ - крайно подмножество на $I$) такова, че $\|x - y_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Съгласно допускането, съществува $i_0 \in A_\varepsilon(x)$ такова, че $i_0 \notin \sigma$. Тогава

$$\frac{\varepsilon}{2} > \|x - y_\varepsilon\| = \frac{\|x - y_\varepsilon\| . \|f_{i_0}\|}{\|f_{i_0}\|} \geq \frac{\left|f_{i_0}(x - y_\varepsilon)\right|}{\|f_{i_0}\|} = \frac{\left|f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y_\varepsilon)\right|}{\|f_{i_0}\|} =$$

$$= \frac{\left|f_{i_0}(x) - \sum_{i\in\sigma} a_i f_{i_0}(x_i)\right|}{\|f_{i_0}\|} = \frac{\left|f_{i_0}(x)\right|}{\|f_{i_0}\|} > \varepsilon .$$

Получихме противоречие и, следователно, лемата е доказана. □

**Лема 2.7 (**[T1], [D,Теорема 2,стр.101]**):** *Нека $X$ е пространство на Банах, притежаващо следните свойства:*

*I. Съществува линеен ограничен инективен оператор $T : X \to c_0(\Gamma)$ за някое множество $\Gamma$.*

*II. Съществува семейство от линейни оператори $T_i : X \to X, i \in I$, такова, че:*

1. *За всяко $i \in I$, $\|T_i\| \leq 1$ и $T_i(X)$ е сепарабелно.*
2. *За всяко $x \in X$, $\left\{\|T_i(x)\|\right\}_{i\in I}$ принадлежи на $c_0(I)$.*
3. *За всяко $x \in X, x \neq 0$ имаме, че $x \in \left[\bigcup_{i\in I(x)} T_i(X)\right]$, където*

$I(x) = \left\{i \in I : T_i(x) \neq 0\right\}$.

*Тогава пространството $X$ има еквивалентна локално равномерно изпъкнала норма.*

***Доказателство на Теорема 2.4:*** Нека $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ е силен М-базис в $X$. Без ограничение на разсъжденията можем да считаме, че $\|x_i\| = 1, \ \forall i \in I$. Тогава:

I. Съгласно *Лема 2.6* съществува линеен ограничен инективен оператор $T : X \to c_0(I)$.

II. Нека сега за всяко $i \in I$ да определим линейния оператор $T_i : X \to X$ по следния начин:

$$T_i(x) = \frac{f_i(x) x_i}{\|f_i\|}, \ x \in X .$$

1. Очевидно е, че за всяко $i \in I$, $\|T_i\| \leq 1$ и образът $T_i(X)$ е сепарабелен.

2. Съгласно *Лема 2.6*, за всяко $x \in X$, $\{\|T_i(x)\|\}_{i\in I} \in c_0(I)$.

3. За всяко $x \in X, x \neq 0$ имаме

$$(1) \qquad \left[\bigcup_{i\in I(x)} T_i(X)\right] = \left[\bigcup_{i\in I(x)} \frac{f_i(X)x_i}{\|f_i\|}\right] = [f_i(x)x_i]_{i\in I(x)} = [f_i(x)x_i]_{i\in I}.$$

Тъй като М-базисът $\{x_i, f_i\}_{i\in I}$ е силен, то $x \in [f_i(x)x_i]_{i\in I}$. Тогава от (1) получавам, че $x \in \left[\bigcup_{i\in I(x)} T_i(X)\right]$.

Следователно, всички условия на *Лема 2.7* са изпълнени, което показва, че пространството $X$ има еквивалентна локално равномерно изпъкнала норма. □

**Теорема 2.8:** *Банаховото пространство* $l_\infty$ *не притежава силен М-базис.*

Действително, пространството $l_\infty$ няма еквивалентна локално равномерно изпъкнала норма ( *виж* [L], [T2]) и тогава, съгласно *Теорема 2.4*, не може да притежава силен базис на Маркушевич. □

**Теорема 2.9** ([P3]): *Ако* $X$ *е сепарабелно Банахово пространство, тогава* $X^*$ *е допълняемо подпространство на Банахово пространство с М-базис.*

Оттук получаваме следното твърдение.

**Теорема 2.10:** *Съществува Банахово пространство с М-базис и не притежаващо силен М-базис.*

Действително, пространството $l_\infty$, като спрегнато на сепарабелното пространство $l_1$, съгласно *Теорема 2.9*, е допълняемо подпространство на Банахово пространство $X$ с базис на Маркушевич. Тогава това пространство $X$, съгласно *Теорема 2.4*, не притежава силен базис на Маркушевич. □

**Теорема 2.11:** *Съществува компактно множество* $S$ *такова, че пространството* $C(S)$ *не съдържа изоморфно копие на* $l_\infty$ *и не притежава силен М-базис.*

R.Haydon [R] конструира напълно несвързано компактно множество (*totally disconnected compact space*) $S$ така, че $C(S)$ не съдържа изоморфно копие на $l_\infty$ и за това пространство $C(S)$ в [AB] е показано, че няма еквивалентна слабо средноточкова локално равномерно изпъкнала (*wMLUR*) норма. Следователно, пространството $C(S)$ не притежава силен М-базис. В противен случай, ще получим противоречие, защото ако пространството $C(S)$ притежава силен М-базис, то, съгласно *Теорема 2.4* ще има локално равномерно изпъкнала норма, и тогава би имало и слабо средноточкова локално равномерно изпъкнала норма. □

## 2.4. Връзка между силните и нормиращите базиси на Маркушевич

В тази точка ще покажем, че всяко Банахово пространство с нормиращ М-базис (даже нещо в повече, с изброимо-нормиращ М-базис) притежава силен М-базис. След това ще покажем, че обратното не е вярно. По-точно, ще покажем, че пространството $C\left[0,\omega_1\right]$, което съгласно *Теорема 2.3* има силен М-базис, не притежава никакъв нормиращ М-базис.

**Дефиниция 2.11:** ***Проекционно разлагане на единицата*** *на несепарабелно Банахово пространство* $X$ *се нарича фамилия* $\left\{P_\alpha\right\}_{\omega<\alpha\le\mu}$ *(*$\mu$ *е най-малкото трансфинотно число такова, че* $\overline{\overline{\mu}} = dens\, X$*) от равномерно ограничени проектори в* $X$ *удовлетворява условията:*

*(i)* $P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = P_\alpha$ *за всяко* $\alpha<\beta$*;*

*(ii)* $densP_\alpha(X) \le \overline{\overline{\alpha}}$ *за всяко* $\alpha$*;*

*(iii)* $P_\alpha(X) = \left[\bigcup\limits_{\beta<\alpha} P_{\beta+1}(X)\right]$ *за всяко* $\alpha$*;*

*(iv)* $P_\mu(X) = Id$.

**Лема 2.12 [P1]:** *Нека* $\left\{P_\alpha\right\}_{\omega<\alpha\le\mu}$ *е проекционно разлагане на единицата на Банахово пространство* $X$ *и нека*

(1) $$T_\omega = P_{\omega+1} \text{ и } T_\alpha = P_{\alpha+1} - P_\alpha \text{ за всяко } \omega<\alpha<\mu .$$

*Тогава, за всяко* $\varepsilon>0$ *и* $x\in X$ *съществува крайна редица* $\left\{\alpha_k\right\}_{1\le k\le n}$ *такава, че*

(2) $$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} T_{\alpha_k} x \right\| < \varepsilon .$$

***Доказателство:*** Доказателството ще проведем с метода на трасфинитната индукция по $\alpha$ и $x\in P_\alpha(X)$.

Твърдението е изпълнено при $\alpha=\omega+1$, тъй като

$$\left\|x - T_\omega x\right\| = \left\|x - P_{\omega+1}x\right\| = 0 < \varepsilon .$$

Нека сега твърдението е изпълнено за всяко $\beta<\alpha$, $\varepsilon>0$ и $y\in P_\beta(X)$.

Първо, нека $\alpha$ не е гранично трансфинитно число. Ако $\alpha=\beta+1$, то за $x\in P_\alpha(X)$ имаме

$$x = P_\alpha(x) = P_{\beta+1}(x) = P_\beta(x) + \left(P_{\beta+1}(x) - P_\beta(x)\right) = P_\beta(x) + T_\beta(x).$$

Тъй като $P_\beta(x)\in P_\beta(X)$, съгласно индуктивното предположение, за всяко $\varepsilon>0$, съществува крайна редица $\left\{\alpha_k\right\}_{1\le k\le n}$, $\alpha_k\le\beta$ такава, че

(3) $$\left\| P_\beta x - \sum_{k=1}^{n} T_{\alpha_k} x \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Полагаме $\alpha_{n+1} = \beta$. Тогава , вземайки под внимание (3), получаваме, че

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n+1} T_{\alpha_k} x \right\| = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} T_{\alpha_k} x - T_\beta x \right\| = \left\| x - P_\alpha x + P_\beta x - \sum_{k=1}^{n} T_{\alpha_k} x \right\| = \left\| P_\beta x - \sum_{k=1}^{n} T_{\alpha_k} x \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следователно в този случай твърдението (2) е изпълнено.

Нека сега $\alpha$ да е гранично трансфинитно число. Тогава за всяко $x \in P_\alpha(X)$ съществува $\beta < \alpha$ така, че

(4) $$\left\| x - P_\beta x \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

От това, че $P_\beta(x) \in P_\beta(X)$и индуктивното преположение, то за $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ съществува крайна редица $\{\alpha_k\}_{1 \le k \le n}$ така, че да е в сила (3). Тогава, съгласно (3) и (4),

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} T_{\alpha_k} x \right\| \le \left\| x - P_\beta x \right\| + \left\| P_\beta x - \sum_{k=1}^{n} T_{\alpha_k} x \right\| < \varepsilon,$$

т.е. твърдението (2) е изпълнено и когато $\alpha$ е гранично трансфинитно число. Следователно *Лема 2.12* е доказана. □

**Лема 2.13 ([P1]):** *Нека* $\{x_i, f_i\}_{i \in I}$ *е изброимо-нормиращ М-базис в Банахото пространство* $X$. *Тогава* $X$ *има проекционно разлагане на единицата* $\{P_\alpha\}_{\omega < \alpha \le \mu}$ *такова, че за всяко* $\alpha \in (\omega, \mu]$, *съществува подмножество* $I_\alpha \subset I$, *за което* $P_\alpha(X) = [x_i]_{i \in I_\alpha}$ *и* $(Id - P_\alpha)(X) = [x_i]_{i \in I \setminus I_\alpha}$.

**Теорема 2.14:** *Всяко Банахово пространство с изброимо нормиращ М-базис притежава силен базис на Маркушевич.*

***Доказателство:*** Доказателството ще проведем с метода на трасфинитната индукция по $densX$.

Твърдението е в сила за сепарабелните Банахови пространства, съгласно резултат на P.Terenzi [T] , че всяко сепарабелно Банахово пространство притежава силен базис на Маркушевич.

Да предположим, че твърдението е в сила за всяко банахово пространство $Y$ с изброимо нормиращ М-базис и с $densY < densX$.

Нека сега $\{x_i, f_i\}_{i \in I}$ е изброимо нормиращ М-базис в Банахово пространство $X$ и $\{P_\alpha\}_{\omega < \alpha \le \mu}$ е проекционно разлагане на единицата на $X$, конструирано чрез *Лема 2.13*. Полагаме $X_\alpha = T_\alpha(X)$ за всяко $\alpha \in [\omega, \mu)$ ($T_\alpha$ са конструирани съгласно

*Лема 2.12).* За всяко $\alpha \in [\omega,\mu)$, $densX_\alpha < densX$. Системата $\{x_i, f_{i|X_\alpha}\}_{i\in I_{\alpha+1}\setminus I_\alpha}$ ($I_\omega = 0$) е изброимо нормиращ М-базис в подпространството $X_\alpha$. Съгласно индуктивното предположение за всяко $\alpha \in [\omega,\mu)$ съществува силен М-базис $\{y_j, g_j\}_{j\in J_\alpha}$ във всяко подпространство $X_\alpha$. Дефинираме функционалите $h_j = g_j \circ T_\alpha$ за всяко $\alpha \in [\omega,\mu)$ и $j \in J_\alpha$. Тогава системата $\{y_j, h_j\}_{j\in J}$, където $J = \bigcup_{\alpha\in[\omega,\mu)} J_\alpha$, е силен базис на Маркушевич в $X$.

Действително, лесно се проверява, че системата $\{y_j, h_j\}_{j\in J}$ е М-базис. Нека сега $x \in X$. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$, съгласно *Лема 2.12*, съществува крайна редица $\{\alpha_k\}_{1\le k\le n}$ такава, че

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} T_{\alpha_k} x \right\| < \varepsilon. \tag{1}$$

За всяко $1 \le k \le n$, $T_{\alpha_k} x \in \left[ h_j(x) y_j \right]_{j\in J_{\alpha_k}}$. Следователно

$$\sum_{k=1}^{n} T_{\alpha_k} x \in \left[ \bigcup_{k=1}^{n} \left[ h_j(x) y_j \right]_{j\in J_{\alpha_k}} \right] \subseteq \left[ h_j(x) y_j \right]_{j\in J}. \tag{2}$$

Тогава, от (1) и (2), получаваме, че $x \in \left[ h_j(x) y_j \right]_{j\in J}$, което показва, че М-бзисът $\{y_j, h_j\}_{j\in J}$ е силен, с което доказахме теоремата. □

Сега ще покажем, че пространството $C\left[0,\omega_1\right]$ не притежава нормиращи базиси на Маркушевич.

За удобство ще работим с пространството

$$C_0\left[0,\omega_1\right] = \left\{ x \in C\left[0,\omega_1\right] : x(\omega_1) = 0 \right\},$$

тъй като пространствата $C\left[0,\omega_1\right]$ и $C_0\left[0,\omega_1\right]$ са изоморфни. Можем да построим изоморфизъм $T$ между пространствата $C\left[0,\omega_1\right]$ и $C_0\left[0,\omega_1\right]$ аналогично, както се построява изоморфизъм между пространствата $c$ и $c_0$ в [B, *Chapitre XI*, §6]. Именно, ако $x \in C\left[0,\omega_1\right]$, тогава полагаме

$$(Tx)(\alpha)=\begin{cases} x(\omega_1), & ако\ \alpha=0 \\ x(\alpha-1)-x(\omega_1), & ако\ 1\leq\alpha<\omega \\ x(\alpha)-x(\omega_1), & ако\ \omega\leq\alpha\leq\omega_1 \end{cases}.$$

Спрегнатото пространство $C_0^*\left[0,\omega_1\right]$ е изометрично на пространството $l_1\left[0,\omega_1\right)$ с естествената си двойственост $f(x)=\sum\limits_{0\leq\gamma<\omega_1} x(\gamma)f(\gamma)$ за всяко $x\in C_0\left[0,\omega_1\right]$ и $f\in C_0^*\left[0,\omega_1\right]$ и с норма $\|f\|=\sum\limits_{0\leq\gamma<\omega_1}|f(\gamma)|$ [Sem, стр.338].

Нека $\{x_\alpha, f_\alpha\}_{0\leq\alpha<\omega_1}$ е силният базис на Маркушевич, построен в *точка 2.2*, модифициран за пространството $C_0\left[0,\omega_1\right]$, т.е. $x_\alpha(\gamma)=\begin{cases}1,\ ako\ \ \gamma\leq\alpha \\ 0,\ ako\ \ \alpha<\gamma<\omega_1\end{cases}$ и $f_\alpha=\delta_\alpha-\delta_{\alpha+1}$ за всяко $\alpha<\omega_1$.

За всяко $\alpha\in\left(0,\omega_1\right]$ определяме проекторите $P_\alpha : C_0\left[0,\omega_1\right]\to C_0\left[0,\omega_1\right]$ по следния начин

$$P_\alpha(x)=\left(x-x(\alpha)\right)x_\alpha,\ x\in C_0\left[0,\omega_1\right].$$

Системата $\{P_\alpha\}_{0<\alpha\leq\omega_1}$ е проекционно разлагане на единицата на $X=C_0\left[0,\omega_1\right]$ ( *не е съществено да започнем номерирането от 0 вместо от* $\omega$ *и също така, понадолу под* $X$ *или* $X^*$ *ще подразбираме пространството* $C_0\left[0,\omega_1\right]$ *или неговото спрегнато пространство*). Лесно се проверява, че $\|P_\alpha\|=2$, $P_\alpha(X)=\left[x_\beta\right]_{0<\beta<\alpha}$ и $\left(Id-P_\alpha\right)(X)=\left[x_\beta\right]_{\beta\geq\alpha}$.

[$\ast$] Нека обозначим с $F=\left\{f\in X^*:\sum\limits_{0\leq\gamma<\omega_1} f(\gamma)=0\right\}$.

Спрегнатите проектори $P_\alpha^*$ на проекторите $P_\alpha$, имат следните свойства:

***Свойства на*** $\{P_\alpha^*\}_{0<\alpha<\omega_1}$ ***:***

**1)** $P_\alpha^*(X^*)=\left\{f\in F : supp(f)\subset[0,\alpha]\right\}$;

$$(Id - P^*_\alpha)(X^*) = \left\{ f \in F : supp(f) \subset \left(\alpha, \omega_1\right) \right\};$$

$$(P^*_\beta - P^*_\alpha)(X^*) = \left\{ f \in F : supp(f) \subset \left(\alpha, \beta\right] \right\} \text{ за всяко } \alpha < \beta$$

***2)*** *Подпространството* $F = \bigcup_{0<\alpha<\omega_1} P^*_\alpha(X^*)$ *и е* $w^*$ *- секвенциално затворено с* $codim F = 1$.

***3)*** *Функционалът* $e \notin F$*, където* $e \in X^*$ *дефиниран чрез условието* $e(x) = x(0)$ *за всяко* $x \in X$ *.*

***4)*** *За всяко* $\alpha$*, подпространството* $\left[e, P^*_\alpha(X^*)\right]$ *е* $w^*$*-затворено и*

$$\left[e, P^*_\alpha(X^*)\right] = \left[\bigcup_{\beta<\alpha} \left[e, P^*_{\beta+1}(X^*)\right]\right].$$

***5)*** $\bigcup_{0<\alpha<\omega_1} \left[e, P^*_\alpha(X^*)\right] = X^*$ .

***6)*** *За всяко* $\alpha$*,* $\left[e, P^*_\alpha(X^*)\right] \cap F = P^*_\alpha(X^*)$*.*

Следващото твърдение е обобщение на факта, доказан в [A2], че за $\xi \geq \omega^2$ естественият силен базис на Маркушевич $\left\{x_\alpha, f_\alpha\right\}_{0\leq\alpha\leq\xi}$ не е нормиращ в $C\left[0, \xi\right]$.

**Твърдение 2.15:** *Нека* $\left\{\alpha_\beta\right\}_{1\leq\beta<\omega_1}$ *е трасфинитна поредица на* $\left[1, \omega_1\right)$*. Полагаме с* $H_0 = \left[e, P^*_{\alpha_1}(X^*)\right]$ *и* $H_\beta = (P^*_{\alpha_{\beta+1}} - P^*_{\alpha_\beta})(X^*)$ *за* $1 \leq \beta < \omega_1$*. Тогава подпространството* $H = lin\left(H_\beta\right)_{0\leq\beta<\omega_1}$ *не е нормиращо.*

***Доказателство:*** Нека $n$ е произволно естествено число. Дефинираме функцията $z_n \in X$ по следния начин:

$$z_n(\gamma) = \begin{cases} 0 & ,\text{ако } \gamma \leq \alpha_\omega \\ \dfrac{k}{n} & ,\text{ако } \alpha_{\omega k} < \gamma \leq \alpha_{\omega(k+1)} \text{ и } 1 \leq k \leq n \\ 1 - \dfrac{k-n}{n} & ,\text{ако } \alpha_{\omega k} < \gamma \leq \alpha_{\omega(k+1)} \text{ и } n < k < 2n \\ 0 & ,\text{ако } \gamma > \alpha_{\omega.2n} \end{cases}.$$

Очевидно, че $\left\|z_n\right\| = 1$. Ние ще покажем, че

(1) $$sup\left\{\left|h(z_n)\right| : h \in H, \left\|h\right\| = 1\right\} \leq \frac{1}{n}.$$

Всеки функционал $h \in H$ може да бъде представен във вид на сума $h = \sum_{k=0}^{2n} h_k$ , където

$$h_k \in lin\left(\left\{H_\beta\right\}_{\omega k \le \beta < \omega(k+1)}\right),\ 0 \le k < 2n,$$

(като за нас $\omega.0 = 0$ и $\alpha_0 = 0$) и

$$h_{2n} \in lin\left(\left\{H_\beta\right\}_{\omega.2n \le \beta < \omega_1)}\right).$$

Имаме, че $h_k \in F$ за $k > 0$, $supp(h_k) \subset \left[\alpha_{\omega k}, \alpha_{\omega(k+1)}\right)$ за $0 \le k < 2n$ и $supp(h_{2n}) \subset \left[\alpha_{\omega.2n}, \omega_1\right)$ и затова $\|h\| = \sum_{k=0}^{2n} \|h_k\|$.

Функционалът $h_0$ има вида $h_0 = \lambda e + f_0$, където $f_0 \in lin\left(P_{\alpha_1}^*(X^*), \left\{H_\beta\right\}_{1 \le \beta < \alpha_\omega)}\right)$ и съгласно дефиницията на $z_n$,

(2) $$h_0(z_n) = (\lambda e + f_0)(z_n) = \lambda z_n(0) + \sum_{0 \le \gamma < \alpha_\omega} z_n(\gamma) f_0(\gamma) = 0.$$

За всяко $0 \le k \le n$ имаме

(3) $$\left|h_k(z_n)\right| = \left|\sum_{\alpha_\omega k \le \gamma < \alpha_\omega(k+1)} z_n(\gamma) h_k(\gamma)\right| =$$

$$= \left|\frac{k-1}{n} h_k(\alpha_{\omega k}) + \frac{k}{n} \sum_{\alpha_\omega k < \gamma < \alpha_\omega(k+1)} h_k(\gamma)\right| =$$

$$= \left|\frac{k}{n} \sum_{\alpha_\omega k \le \gamma < \alpha_\omega(k+1)} h_k(\gamma) - \frac{1}{n} h_k(\alpha_{\omega k})\right| = \frac{1}{n}\left|h_k(\alpha_{\omega k})\right| \le \frac{1}{n}\|h_k\|.$$

За всяко $n < k < 2n$ имаме

(4) $$\left|h_k(z_n)\right| = \left|\sum_{\alpha_\omega k \le \gamma < \alpha_\omega(k+1)} z_n(\gamma) h_k(\gamma)\right| =$$

$$= \left|\left(1 - \frac{k-1-n}{n}\right) h_k(\alpha_{\omega k}) + \left(1 - \frac{k-n}{n}\right) \sum_{\alpha_\omega k < \gamma < \alpha_\omega(k+1)} h_k(\gamma)\right| =$$

$$= \left|\left(2 - \frac{k-n}{n}\right) \sum_{\alpha_\omega k \le \gamma < \alpha_\omega(k+1)} h_k(\gamma) + \frac{1}{n} h_k(\alpha_{\omega k})\right| =$$

$$=\frac{1}{n}\left|h_k(\alpha_{\omega k})\right|\le\frac{1}{n}\left\|h_k\right\|$$

и за $k=2n$

(5) $$\left|h_{2n}(z_n)\right|=\left|\sum_{\alpha_\omega .2n\le\gamma<\omega_1} z_n(\gamma)h_{2n}(\gamma)\right|=\frac{1}{n}\left|h_{2n}(\alpha_{\omega .2n})\right|\le\frac{1}{n}\left\|h_{2n}\right\|.$$

Тогава от неравенства от (2) до (5) получаваме, че

$$\left|h(z_n)\right|=\left|\sum_{k=0}^{2n}h_k(z_n)\right|\le\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n}\left\|h_k\right\|=\frac{1}{n}\left\|h\right\|$$

и следователно неравенство (1) е доказано. Тъй като $n$ е произволно естествено число, то следва, че подпространството $H$ не е нормиращо. □

**Твърдение 2.16:** *Нека* $\{y_i,g_i\}_{i\in I}$ *е М-базис в* $X$. *Тогава множеството* $\{i\in I: g_i\notin F\}$ *е най-много изброимо.*

***Доказателство:*** Може да се предположим, без ограничение на общността, че множеството $\{g_i\}_{i\in I}$ е ограничено. Тъй като $F$ е хиперравнина (*Свойство 2*), то за $i\in I$ съществува $\lambda_i\in\mathbb{R}$ така, че $g_i+\lambda_i e\in F$. Да предположим, че множеството $\{i\in I:\lambda_i\ne 0\}$ е неизброимо. Тогава съществува редица $\{i_n\}_{n=1}^{\infty}$ такава, че $inf\left\{\left|\lambda_{i_n}\right|: n\in\mathbb{N}\right\}>0$. Тогава $\frac{g_{i_n}}{\lambda_{i_n}}+e\in F$ и редицата $\left\{\frac{g_{i_n}}{\lambda_{i_n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена. По този начин редицата $\left\{\frac{g_{i_n}}{\lambda_{i_n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ е $w^*$-сходяща към 0. Тъй като $F$ е $w^*$-секвенциално затворено (*Свойство 2*), то следва, че $e\in F$, което не е вярно, с което твърдението е доказано. □

**Лема 2.17 ([P2]):** *Нека* $X$ *е Банахово пространство с* $densX=\bar{\bar{\omega}}_1$. *Ако имаме нарастващи трансфинитни редици от затворени по норма сепарабелни подпространства* $X_\alpha$, $Y_\alpha$ *в* $X$ *и* $w^*$*-затворени* $w^*$*-сепарабелни подпространства* $F_\alpha$, $G_\alpha$ *в* $X^*$, $\alpha\in\left[1,\omega_1\right)$ *такива, че:*

*i)* $X_\alpha=\left[X_{\beta+1}\right]_{1\le\beta<\alpha}$, $\quad Y_\alpha=\left[Y_{\beta+1}\right]_{1\le\beta<\alpha}$,

$F_\alpha=w^*-\left[F_{\beta+1}\right]_{1\le\beta<\alpha}$, $\quad G_\alpha=w^*-\left[G_{\beta+1}\right]_{1\le\beta<\alpha}$;

*ii)* $\bigcup_{1\le\alpha<\omega_1}X_\alpha=\bigcup_{1\le\alpha<\omega_1}Y_\alpha=X$, $\bigcup_{1\le\alpha<\omega_1}F_\alpha=X^*$, *тогава съществува трансфинитна подредица* $\{\alpha_\beta\}_{1\le\beta<\omega_1}$ *на* $[1,\omega_1)$ *такава, че* $X_{\alpha_\beta}=Y_{\alpha_\beta}$ *и* $G_{\alpha_\beta}\subset F_{\alpha_\beta}$ *за всяко* $\beta\in[1,\omega_1)$.

**Теорема 2.14:** *Пространството* $X=C_0[0,\omega_1]$ *не притежава нормиращ базис на Маркушевич.*

***Доказателство:*** Допускаме, че $X$ има нормиращ М-базис $\{y_i,g_i\}_{i\in I}$. Съгласно *Лема 2.13,* $X$ има проекционно разлагане на единицата $\{Q_\alpha\}_{0<\alpha<\omega_1}$ такова, че за всяко $\alpha$, съществува подмножество $I_\alpha\subset I$, за което $Q_\alpha(X)=[y_i]_{i\in I_\alpha}$ и $(Id-Q_\alpha)(X)=[y_i]_{i\in I\setminus I_\alpha}$.

Прилагаме *Лема 2.17*, като за нас $X_\alpha=P_\alpha(X),\ Y_\alpha=Q_\alpha(X),\ F_\alpha=[e,P_\alpha^*(X^*)]$ (погледни *Свойство 4*) и $G_\alpha=Q_\alpha^*(X^*)$. Тогава съществува трансфинитна подредица $\{\alpha_\beta\}_{1\le\beta<\omega_1}$ на $[1,\omega_1)$ такава, че

(1) $$P_{\alpha_\beta}(X)=Q_{\alpha_\beta}(X)$$

и

(2) $$Q_{\alpha_\beta}^*(X^*)\subset\left[e,P_{\alpha_\beta}^*(X^*)\right].$$

Можем да предположим, съгласно *Твърдение 2.16*, че $g_i\in F$ за $i\notin I_{\alpha_1}$. Ако $i\in I_{\alpha_{\beta+1}}\setminus I_{\alpha_\beta}$, тогава от (1), (2) и *Свойство 6*, имаме, че

$$g_i\in F\bigcap\left(Q_{\alpha_{\beta+1}}^*-Q_{\alpha_\beta}^*\right)(X^*)=F\bigcap Q_{\alpha_{\beta+1}}^*(X^*)\bigcap\left(Id-Q_{\alpha_\beta}^*\right)(X^*)\subset$$

$$\subset F\bigcap\left[e,P_{\alpha_{\beta+1}}^*(X^*)\right]\bigcap\left(Id-P_{\alpha_\beta}^*\right)(X^*)=P_{\alpha_{\beta+1}}^*(X^*)\bigcap\left(Id-P_{\alpha_\beta}^*\right)(X^*)=$$

$$=\left(P_{\alpha_{\beta+1}}^*-P_{\alpha_\beta}^*\right)(X^*),$$

т.е. $lin\left(Q_{\alpha_1}^*(X^*),\{g_i\}_{i\notin I_{\alpha_1}}\right)\subset H$. Следователно $\{g_i\}_{i\in I}\subset H$.

Съгласно Твърдение 2.15 подпространството $H$ не е нормиращо, така че М-базисът $\{y_i,g_i\}_{i\in I}$ също не е нормиращ. Получихме противоречие, с което теоремата е доказана. □

Нека обърнем внимание накрая и на следния факт: независимо от това, че пространството $C\left[0,\omega_1\right]$ не притежава нормиращ М-базис, то това пространство има *изброимо нормиращ М-базис*. Действително, силният М-базис $\left\{x_\alpha, f_\alpha\right\}_{0\le\alpha<\omega_1}$ е изброимо нормиращ, тъй като подпространството от всичките функционали $f \in X^*$, за които множеството $\left\{\alpha : f(x_\alpha) \neq 0\right\}$ е изброимо, съвпада с нормиращото пространство $F$ (*виж **Свойства 1-6***).

O.Kalenda в своята работа [K] отговаря на един от въпросите, поставен в първия вариант на работа [AP2], като показва, че *пространството* $C\left[0,\omega_2\right]$ *не притежава изброимо нормиращ М-базис.*

## ОБОЗНАЧЕНИЯ

$X$ - Банахово пространство над $\mathbb{R}$

$X^*$ - Банахово пространство, спрегнато на $X$

$X \times X^*$ - Декартово произведение на $X$ и $X^*$

$X \oplus Y$ - директна сума на Банаховите пространства $X$ и $Y$

$S_1(X)$ - единичната сфера на Банахово пространство $X$

$S_1(X, \|\cdot\|)$ - единичната сфера на Банахово пространство $X$ при норма $\|\cdot\|$

$B_1(X)$ - единичното кълбо на Банахово пространство $X$

$B_1(X, \|\cdot\|)$ - единичното кълбо на Банахово пространство $X$ при норма $\|\cdot\|$

$card(A)$ - мощността на множеството $A$

$densX$ - най-малкото кардинално число на гъсто подмножество на $X$

$A^{\perp} = \left\{ f \in X^* : f(x) = 0, \text{за всяко } x \in A \right\}$

$B_{\perp} = \left\{ x \in X : f(x) = 0, \text{за всяко } f \in B \right\}$

$B_{\perp}^{\perp} = \left( B_{\perp} \right)^{\perp}$

$lin(A)$ - линейната обвивка на множеството $A$

$[A]$ - затворена по норма линейна обвивка на множеството $A$

$\{x_i\}_{i \in I} = \{x_i : i \in I\}$ - множеството от всички елементи $x_i$ при $i \in I$

$[x_i]_{i \in I}$ - затворена по норма линейна обвивка на фамилията $\{x_i\}_{i \in I}$

$w - [x_i]_{i \in I}$ - $w$ - затворена линейна обвивка на фамилията $\{x_i\}_{i \in I}$

$w^* - [f_i]_{i \in I}$ - $w^* -$ затворена линейна обвивка на фамилията $\{f_i\}_{i \in I}$

$supp(x) = \{i : f_i(x) \neq 0\}$ - носителят на елемента $x \in X$ при биортогонална система $\{x_i, f_i\}_{i \in I}$ в $X \times X^*$

$Id$ - единичния оператор

$f_{|Y}$ - рестрикцията на $f$ върху $Y$

$\omega$ - първото безкрайно трасфинитно число

$\omega_1$ - първото неизброимо трансфинитно число

$\left[\alpha,\beta\right]=\left\{\gamma :\text{всичките трансфинитни числа, такива, че } \alpha\le\gamma\le\beta\right\}$

$\left(\alpha,\beta\right)=\left\{\gamma :\text{всичките трансфинитни числа, такива, че } \alpha<\gamma<\beta\right\}$

$\left(\alpha,\beta\right]=\left\{\gamma :\text{всичките трансфинитни числа, такива, че } \alpha<\gamma\le\beta\right\}$

$\overline{\overline{\alpha}}=card\left[0,\alpha\right]$

# ЛИТЕРАТУРА


[A1] **Alexandrov G.A.**
*Locally uniformly convex equivalent norms in nonseparable Banach spaces*
Ph.D. Dissertation, Kharkov, 1980. (*Russian*)

[A2] **Alexandrov G.A.**
*Strong M-bases and equivalent norms in nonseparable Banach spaces*
Godishnik Vissh.Uchebn.Zaved. Prilozhna Mat., **19** (1983), no.2, 31-44. (*Russian*)

[AB] **Alexandrov G.A., Babev V.D.**
*Banach spaces not isomorphic to weakly midpoint locally uniformly rotund spaces*
C.R.Acad.Bulgare Sci. **41** (1988), no.2, 29-32.

[AP1] **Alexandrov G.A., Plichko A.N.**
*The connections between strong M-bases and equivalent locally uniformly convex norms in Banach spaces*
C.R.Acad.Bulgare Sci. **40** (1987), no.2, 15-16. (*Russian*)

[AP2] **Alexandrov G.A., Plichko A.N.**
*Connection between strong and norming Markushevich basis in non-separable Banach spaces*
Mathematika, University College London, **53** (2006), 321-328.

[B] **Banach S.**
*The′orie des ope′rations line′aires*
Monografie Matematyczne, Warszawa- Lwów , 1932.

[D] **Diestel J.**
*Geometry of Banach Spaces – Selected Topics*
Lecture Notes in Math., Vol. 485, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
(*in Russian:* Vishcha schools, Kiev, 1980)

[DS] **Dunford N., Schwartz J.T.**
*Linear operators, Part I: General theory*
Interscience, New York, 1958.
(*in Russian:* Foreign Literature, Moscow, 1962)

[DSing] **Davis W.J., Singer I.**
*Boundedly complete M-bases and complemented subspaces in Banach spaces*
Trans. Amer. Math. Soc. **175** (1973), 187-194

[E] **Enflo P.**
*A counterexample to the approximation problem*
Acta. Math. **13** (1973), 309-317.

[H] **Haydon R.**
*A non-reflexive Grothendieck space that does not contain* $l_\infty$
Israel J. Math. **40** (1981), 65-73.

[HMVZ] **Hájek P., Montesinos V., Vanderwerff J., Zizler V.**
*Biorthogonal Systems in Banach Spaces*
CMS, Springer, 2008.

[K] **Kalenda O.**
*M-bases in spaces of continuous functions on ordinals*
Colloq. Math. **92** (2002), 179-187

[L] **Lindenstrauss J.**
*Weakly compact sets-their topological properties and the Banach spaces they generate*
Annals of Math. Studies, **69** (1972), 235-273.

[M] **Markushevich A.I.**
*On a basis in the wide sence for linear spaces*
Dokl.Akad.Nauk. **41** (1943), 241-244.

[P1] **Plichko A.N.**
*On projective resolutions of the identity operator and Markushevich bases*
Dokl.Akad.Nauk.SSSR **263** (1982), 543-546. (*Russian*)

[P2] **Plichko A.N.**
*Projective resolutions, Markushevich bases and equivalent norms*
Matem. Zametki **34** (1983), 719-726. (*Russian*)

[P3] **Plichko A.N.**
*Bases and complements in nonseparable Banach spaces*
Sibirsk. Mat. Zh. 25(1984), no.4, 155-162. (*Russian*)

[R] **Ruckle W.H.**
*Representation and series summability of complete biorthogonal sequences*
Pacific J.Math. **34** (1970), 511-528.

[S1] **Singer I.**
*Bases in Banach Spaces I*
Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[S2] **Singer I.**
*Bases in Banach Spaces II*
Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[Sem] **Semadeni Z.**
*Banach spaces of continuous functions, I*
Monografie Matematyczne, Warszawa, 1971.

[T1] **Troyanski S.L.**
*On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non-separable Banach spaces*
Studia Math., **37** (1971), no.2, 173-180.

[T2] **Troyanski S.L.**
*Equivalent norms and minimal systems in nonseparable Banach spaces*
Studia Math., **43** (1972), 125-138. (*Russian*)

[Ter] **Terenzi P.**
*Every separable Banach space has a bounded strong norming biorthogonal sequence which is also a Steinitz basis*
Studia Math., **111** (1994), 207-222.