Софийски университет "Свети Климент Охридски"

Факултет по математика и информатика

Изследване на модели за рекламиране

Матей Боянов Константинов, ФН: 25697

Научен ръководител: проф. д.м.н. Михаил Кръстанов

Дипломна работа

специалност "Приложна математика"

Магистърска програма "Оптимизация"

София, 2019

Съдържание

1 Увод

1.1 Встъпителни думи

В бизнес средите понятието реклама бива разбирано като маркетингова комуникация, целяща да насочи, да окуражи и понякога дори да изманипулира част от зрителите, за които е предвидена, да закупят дадена стока, да се възползват от дадена услуга или да предприемат дадено действие. За да популяризира точно своя продукт, услуга или съобщение, дадена фирма, неправителствена или правителствена организация най - често прибягва до помощта и съдействието на радио, вестници, списания, телевизия, улични билбордове, плакати, мобилни платформи, интернет сайтове и редица други, като изброените до тук са само част от широката гама методи за разпространяването на реклама сред масите. На практика рекламите са навсякъде около нас и тяхното въздействие върху търсенето и максимизирането на печалба свързана с това, ще бъде основният обект за изследване и моделиране в настоящата дипломна работа.

Нека сега си кажем нещата честно. Рекламите носят своята доза лоша репутация. Не са малко хората, имащи отрицателно и дори понякога негативно възприятие от тях. Термините нежелана реклама, "фейк нюз" и спам става все по - широко използвани и се превръщат в неразделна част от нашето ежедневие. За момент ще отместим фокуса на темата, казвайки, че множество от философски школи и течения се обединяват в тезата, че процеса на търсене на щастието, без да навлизаме в подробности и дефиниции какво точно е то, частично осмисля човешкия бит. Връщайки се към темата, ще отбележим, че на пазара има фирми и производители, които напълно открито и целенасочено се възползват от гореспоменатите човешки нужди, опитвайки се чрез реклами да внедрят в съзнанието на кандидат-потребителите си идеята, че живота им има недостиг и липса на щастие и точно техния продукт/услуга ще ги направи щастливи, макар и това чувство на щастие да трае за кратко. По този начин се внедряват консуматорски ценности в съзнанието на масовия потребител, чиито ползи за обществото подлежат на дебатиране, но със сигурност влияят на продажбите и търсенето.

Въпреки казаното до тук създаването на здрава основа при стартирането на какъвто и да е бизнес, без използването на реклама граничи с невъзможното. Дори дадена фирма да предлага или да иска да наложи най - добрия от даден клас продукти на пазара, няма как масовият потребител да научи бързо за нея без наличието на някакъв вид реклама. Да участваш на пазара без да рекламираш продукта си е като да правиш научни изследвания изолиран от научната общност на областта, в която работиш, а така дори да направиш революционно откритие, никой няма да разбере за него, освен може би самият ти.

Едно от предположенията, които ще приемем в тази дипломна работа е, че консуматорът на даден вид продукти/стоки, ако спре да гледа рекламите свързани с някоя от тях, то той след време ще забрави за съществуването ѝ. С други думи, рекламирането е ключът и основният механизъм за популяризирането с цел покачването на броят продажби за производителите. Но за да бъде реализирана успешна рекламна кампания в голям мащаб е необходимо не само рекламата да достига до потенциалните клиентите, а и да им повлиява по предварително разработен, анализиран и подбран начин. Това далеч не е лесна задача и постигането ѝ оправдава високата цена обикновено свързана с това. Тъй като въздействието на рекламата върху целевата група, за която е предвидена, по дизайн е съществено, то всяка фирма има интерес да инвестира в рекламирането на своя продукт. Разумно е тази инвестиция да бъде съобразена с бюджета на фирмата. Следователно задачата, с която всяка фирма ежедневно се сблъсква е, каква е минималната инвестицията за реклама, която трябва да направи, така че да максимизира приходите от своите продажби, съобразявайки се с ограниченията на бюджета си. Тъй като въздействието на рекламата върху продажбите се променя с времето, то управлението на бюджета за реклама трябва да е динамичен процес на времето. Изучаването на тази задача изисква дефинирането на подходящи величини, които да я опишат, динамичен процес, който да даде връзка между тези величини, като и критерий, който трябва да се максимизира. Изградени са редица модели в сферата на икономиката, рекламата и изследването на операциите, целящи да опишат и решат тази задачата с достатъчно добра правдоподобност с реалността.

Основно понятие в моделите за реклама е репутацията. То може да се отнася за фирма, марка, френчайз, непреавителствана, правителствена организация или за самият продукт или услуга и цели да опише количеството на положително възприятие, популярност и доверие сред потребителите. Нивото на репутацията има ключова връзка с количеството продажби на съответния продукт или услуга. Именно заради това редица икономически модели използват репутацията като основна величина за моделирането на задачи за реклама.

Исторически едно от първите приложения на теорията на оптималното управление в областта на икономиката е именно моделиране на задачи за реклама с модел за изменение на репутацията във времето. Основен и класически резултат в тази област е статията на K.Arrow и M.Nerlove от 1961 година. След нея редица учени в икономиката, маркетинга и изследването на операциите са допълвали този класически модел и в последствие са създали редица модели описващи развитието на търсенето повлияно от рекламиране в непрекъснато време.

1.2 Обзор на математическите модели в областта рекламата

Следвайки [5] в този подраздел ще дадем кратък обзор на математическите модели в областта на рекламата:

1.2.1 Модел на M.Nerlov-K.Arrow

През 1961 година K.Arrow-M.Nerlov в [1] описват развитието на търсенето на даден продукт в следствие от рекламна политика. Нека $S(t)$ е количеството търсене на продукт на дадена фирма в момента t и $A(t)$ е нивото на репутацията в момента t, достигнато в резултат от сегашни и предишни рекламни кампании. Нека $p(t)$ е цената на продукта в момента t и $Z(t)$ е променлива, която описваща други фактори, освен цена и репутации, които влияят на търсенето, но фирмата не може да контролира. Например това са цените на конкурентите, доходите на потребителите и други.

В този модел търсенето се изчислява в момента t с формулата:

$$S(t) = f\big(A(t), p(t), Z(t)\big)$$

Репутацията $A(t)$ се променя във времето съгласно следната задача на Коши:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{A}(t) = u(t) - \delta\, A(t) \\ \\ A(0) = A_0 > 0 \end{array} \right.$$

В тази задача на Коши реалното число A_0 е началното ниво на репутацията, с което фирмата стартира. Приема се, че A_0 е положително число. В модела $u(t)$ е рекламната инвестиция на фирмата в момента t и константа δ задава с колко репутацията намалява с течение на времето. В този модел се приема, че ако инвестицията в реклама на фирмата е нулева за всеки времеви момент, то в следствие на това потребителите ще започнат да забравят за продукта на фирмата. Това ще накара репутацията да намалява, което се вижда и от самата динамика на модела.

1.2.2 Модел на Vidale-Wolfe

Моделът, разгледан в [8] е първият, в който се описва директна връзка между нивото на промяна в продажбите и продължителния ефект на рекламирането.

Динамиката на модела е:

$$\dot{S}(t) = r\,u(t)\frac{M - S(t)}{M} - \lambda\,S(t) \text{ , където:}$$

- $S(t)$ е нивото на продажбите в момента t;
- $u(t)$ е стойността на рекламната инвестиция в момента t;
- $M > 0$ е нивото на насищане на пазара;
- $r > 0$ е константата задаваща реакция на пазара на рекламните инвестиции;
- $\lambda > 0$ е коефициентът задаващ намаляването на продажбите;
- $\dfrac{M - S(t)}{M}$ е частта на потенциални клиенти в момента t;
- $\lambda\,S(t)$ е броят на изгубените клиенти в момента t, като този брой не е задължително да бъде цяло число.

Този модел на Vidale-Wolfe е широко използван и допълван, за да се анализират различни задачи в областта на икономиката, свързани например с отчитане на конкуренцията, ценообразуването, в анализа на веригите на доставки и много други.

1.2.3 Модел на Luca Grosset и Bruno Viscolani

В [3] Luca Grosset и Bruno Viscolani развиват класическия модел на K.Arrow-M.Nerlov, в който репутацията на дадена фирма расте вследствие на рекламната ѝ инвестиция $u(\cdot)$ и съответно намалява с определен коефициент δ впоследствие допускането, че потребителите забравят рекламните кампании и съобщения на фирмата. Същественото допълнение към модела на K.Arrow-M.Nerlov е добавянето на постоянно външно влияние ξ, имащо отрицателно ефект върху нивото на репутацията на фирмата. Фирмата не може да контролира величината ξ, а тя е повлияна от действията и рекламните политики на конкурентните фирми на пазара.

В модела на Luca Grosset и Bruno Viscolani се разглежда следната задача на оптималното управление с безкраен хоризонт:

Критерий за максимизиране:

$$(1)\left|\; M\big(G_u(\cdot), u(\cdot)\big) := \int_0^\infty e^{-\rho t}\left(\pi\,\beta\,[G_u(t)]^+ - \frac{\kappa}{2}\,u^2(t)\right)dt \underset{u}{\longrightarrow} \max\right.$$

Динамика и начално условие:

$$(2)\left|\begin{array}{l} \dot{G}_u(t) = -\delta\, G_u(t) + \gamma\, u(t) - \xi \\ \\ G_u(0) = G_0 > 0 \end{array}\right. \quad \text{, където:}$$

- $G_u(t)$ е стойността на решението на (2) с управление $u(\cdot)$ в момента t. Тази стойност определя нивото на репутация на фирмата в момента t, достигнато в резултат от сегашни и предишни рекламни кампании.

- $D\big(G_u(t)\big) := \beta\,\max\{G_u(t), 0\} := \beta\,[G_u(t)]^+$ е търсенето на продукта в момента t. Тъй като репутацията може да приема отрицателни стойности, то на отрицателна репутация моделът съпоставя нулево търсене.

- $\pi > 0$ е печалбата за единица продукт/услуга;

- $\beta > 0$ е коефициентът на пропорционалност между търсенето на продукта/услугата и репутацията на фирмата;

- $\delta > 0$ е коефициентът задаващ с колко репутацията намалява във времето;

- $u(t)$ е големината на рекламната инвестиция в момента t, където $u(t) \in [0, u_{\max}]$. Величината $u_{\max}$ задава горна граница на рекламната инвестиция, която фирмата може да си позволи в следствие на бюджетни ограничения и други.

- $\gamma\, u(t)$ е големината на въздействието на рекламната инвестиция на фирмата върху репутацията ѝ в момента t. В този модел се приема че рекламните инвестиции на фирмата нямат отрицателен ефект върху репутацията ѝ.

- $\dfrac{\kappa}{2}\, u^2(t)$ е цената на рекламната инвестиция $u(t)$ в момента t;

- $\xi > 0$ е постоянното ниво на външно влияние, имащо отрицателно въздействие върху репутацията на фирмата;

- $\rho > 0$ е дисконтиращият множител;

- $G_0 > 0$ е стойността на репутацията в началния момент $t = 0$.

По - надолу са изброени основните резултати в [3]:

- В лема 1 от [3] е доказано, че не съществува оптимален процес на задача (1)÷(2), такъв че оптималната му траектория да се анулира в два времеви момента τ и $\tau + \nu$ и да приема отрицателна стойност за всяко $t \in (\tau, \tau + \nu)$, където $\tau > 0$ и $\nu > 0$.

- За решаването на задача (1)÷(2) авторите Luca Grosset и Bruno Viscolani дефинират две гладки задачи на оптималното управление. В първата от тях репутацията на фирмата приема само положителни стойности, т.е. $[G(t)]^+ = G(t)$ за всеки времеви момент t, където $t \in [0, +\infty)$ и решението на тази задача показва, че фирмата остава завинаги на пазара. Във втората задача фирмата излиза от пазара в даден времеви момент, т.е. тази задача е със свободен десен край. В статията се доказва, че решението на задача (1)÷(2) е едно от решенията на тези две задачи.

- Лема 2 от [3] дава връзка между решението на задача (1)÷(2) и следната задача на оптималното управление със свободен десен край:

  Критерий за максимизиране:

$$(3)\ \ \Psi(G_u(\cdot), u(\cdot), T) := \int_0^T e^{-\rho\, t}\left(\pi\,\beta\, G_u(t) - \frac{\kappa}{2}\, u^2(t)\right) dt \underset{u}{\longrightarrow} \max$$

Динамика, начално условие и фазово ограничение:

$$(4)\left|\begin{array}{l}\dot{G}_u(t) = -\delta\, G_u(t) + \gamma\, u(t) - \xi \\ \\ G_u(0) = G_0 > 0 \\ \\ G_u(t) \geq 0, \text{ за всяко } t \in [0, T].\end{array}\right.$$

- В теорема 1 от [3] се доказва, че ако оптималната траектория на задача (1)÷(2) приема само положителна стойност за всяко $t \in [0, +\infty)$, то константата $u^* = \dfrac{\gamma\,\pi\,\beta}{\kappa(\delta + \rho)}$ е оптимално управление за задача (1)÷(2).

- В теорема 2 от [3] се доказва, че ако съществува оптималното управление на задача (3)÷(4), то то е съответно $u(t) = u^* \left[1 - e^{(\rho+\delta)(t-T)}\right]^+$. Времевият момент T се интерпретира в модела като момента, в който фирмата напуска пазара. Посочено е също така и уравнение за намирането на стойността на времевия момент T. В общия случай е възможно това уравнение да няма решение.

- В зависимост от стойностите на параметрите на разгледания модел в [3], теореми 3, 4 и 5 от [3] дават пълна характеризация на въпроса, дали фирмата остава завинаги на пазара или го напуска в даден времеви момент.

Бележка: В доказателството на Лема 2 от [3] се използва твърдението, че ако оптимална за задача (1)÷(2) траектория се анулира в даден времеви момент, то в последствие тя ще приеме отрицателна стойност. Посочено е, че това твърдение следва от Лема 1 от [3]. Но само Лема 1 от [3] не е достатъчна за строго доказателство на това твърдение. В Раздел 3 на настоящата дипломната работа Лема 3.3 и Лема 3.4 напълно изясняват вярността на това твърдение.

1.3 Обзор на задачите разгледани в настоящата дипломна работа

В този подраздел ще дефинираме моделите изследвани в раздел 2 и раздел 3 на настоящата дипломна работа.

1.3.1 Обобщена задача с един производител

Следвайки модела на Luca Grosset и Bruno Viscolani в раздел 2 се разглежда следната задача на оптималното управление с безкраен времеви хоризонт, която ще наричаме

Обобщена задача 1:

Критерий за максимизиране:

$$(5) \left| \; \Pi\big(G_u(\cdot), u(\cdot)\big) := \int_0^\infty e^{-\rho t}\Big(\pi\,\beta\big[G_u(t)\big]^+ - f\big(u(t)\big)\Big)\,dt \underset{u}{\longrightarrow} max \right.$$

В този модел динамиката описващата развитието на репутацията във времето се задава със следната линейна задача на Коши:

$$(6) \left| \begin{array}{l} \dot{G}_u(t) = -\delta\, G_u(t) + g\big(u(t), v(t)\big) \\ \\ G_u(0) = G_0 > 0 \end{array} \right. \quad \text{, където:}$$

- $G_u(t)$ е стойността в момента t на решението на (6) с управление $u(\cdot)$ и фиксирано $v(\cdot)$. Тази стойност определя нивото на репутация на фирмата в момента t, достигнато в резултат от сегашни и предишни рекламни кампании.

- $D\big(G_u(t)\big) := \beta\, \max\{G_u(t), 0\} := \beta\,[G_u(t)]^+$ е търсенето на продукта в момента t. Тъй като репутацията може да приема отрицателни стойности, в разглеждания модел на отрицателна репутация се съпоставя нулево търсене;

- $\rho > 0$ е дисконтиращият множител;

- $\pi > 0$ е печалбата за единица продукт/услуга;

- $\beta > 0$ е коефициентът на пропорционалност между търсенето на продукта/услугата и репутацията на фирмата;

- Искаме функцията f да удовлетворява следните свойства:

$$(7)\quad\left|\begin{array}{l} f(\cdot):[0,u_{max}]\to\mathbb{R} \\ \\ f\in C^2 \\ \\ f(u)\geq 0 \\ \\ f(u)=0\leftrightarrow u=0 \end{array}\right.$$

  Интерпретацията на (7) е, че цената на рекламата приема само неотрицателни стойности за всеки момент от времето t и приема нулева стойност, тогава и само тогава когато рекламната инвестиция е нулева.

- $f\big(u(t)\big)$ е цената на рекламната инвестиция $u(t)$ в момента t;

- $G_0 > 0$ е стойността на репутацията в началния момент $t = 0$;

- $\delta > 0$ е коефициентът задаващ с колко репутацията намалява във времето;

- $u(t)$ е големината на рекламната инвестиция в момента t, където $u(t) \in [0, u_{\max}]$. Величината $u_{\max}$ задава горна граница на рекламната инвестиция, която фирма може да си позволи в следствие на бюджетни ограничения и други.

- $v(t)$ е големината на външното влияние в момента t, над което фирмата няма никакъв контрол, въздействащо отрицателно на нейната репутация. Приемаме, че $v(t) \in [0, v_{\max}]$, за $t \in [0, +\infty)$. Величината $v_{\max}$ задава ограничеността на външното влияние.

- $g(u,v)$ - това е функцията обединяваща рекламната инвестиция и външното влияние и удовлетворява следните свойства:

$$(8)\left|\begin{array}{l} g(\cdot):[0,u_{max}]\times[0,v_{max}]\to\mathbb{R} \\ \\ g\in C^2 \\ \\ g(u,0)>0 \text{ за } u>0 \\ \\ g(0,v)<0 \text{ за } v>0 \\ \\ g(0,0)=0 \end{array}\right.$$

Интерпретацията на (8) е, че ако външното влияние е нулево, то ефектът върху репутацията би бил положителен. Ако рекламната инвестиция е нулева, то ефектът върху репутацията би бил отрицателен. Ако и външното влияние и репутацията са едновременно нулеви, то ефектът върху репутацията би бил нулев.

- В **Обобщена задача 1** се приема също така, че:

$$(9)\left|\begin{array}{l} \text{ За всеки } u_1,u_2\in[0,u_{\max}] \text{ и всяко } \alpha\in[0,1], \\ \\ \text{ при фиксирано } v\in[0,v_{max}] \text{ съществува } \bar{u}\in[0,u_{\max}],\ \text{ такова че:} \\ \\ \alpha\, g(u_1,v)+(1-\alpha)\, g(u_2,v)=g(\bar{u},v) \\ \\ \alpha\, f(u_1)+(1-\alpha)\, f(u_2)\geq f(\bar{u}) \end{array}\right.$$

Предположение (9) е необходимо за да доказателството, че Обобщена задача 1 има решение.

$$(10)\left|\begin{array}{l} \text{Функцията } H_2\big(G,u,v(t)\big)=\Big(\pi\,\beta\, G-f\big(u\big)\Big)+\dfrac{\pi\,\beta}{\rho+\delta}\,\big(-\delta\, G+g\big(u,v(t)\big)\big) \\ \text{ е строго вдлъбната по втората си променлива } u \text{ за всяко } G,v(\cdot) \text{ и за всяко } t\in[0,+\infty). \\ \\ \text{Функцията } H_3\big(G,u,v(t),t,t_{op}\big)=\Big(\pi\,\beta\, G-f\big(u\big)\Big)+\dfrac{\pi\,\beta}{\rho+\delta}\Big(1-e^{(\rho+\delta)(t-t_{op})}\Big)\big(-\delta\, G+g\big(u,v(t)\big)\big) \\ \text{ е строго вдлъбната по втората си променлива } u \text{ за всяко } G,v(\cdot),\ \text{ за всяко } t\in[0,+\infty) \\ \text{ и за всяко } t_{op}\in[0,+\infty). \end{array}\right.$$

Предположенията в (10) са естествени в теорията на оптималното управление. Те осигуряват единственост на оптималните управления съответно на Обобщена задача 2 и Обобщена задача 3.

Бележка: Условие (9) е по - слабо от това функцията $g(u,v)$ да е линейна по първата си променлива u. Това се вижда от следния пример:

Нека $g\big(u,v\big)=u^2+h(v)$, $f\big(u\big)=u^2$ и нека $u_1,u_2\in[0,u_{\max}]$ и $\alpha\in[0,1]$, тогава:
$\alpha\, g\big(u_1,v\big)+(1-\alpha)\, g\big(u_2,v\big)=\alpha\, u_1^2+\alpha\, h(v)++(1-\alpha)\, u_2^2+(1-\alpha)\, h(v)=\bar{u}^2+h(v),$ където:
$\bar{u}:=\left(\sqrt{\alpha\, u_1^2+(1-\alpha)\, u_2^2}\right).$
Следователно $\alpha\, f\big(u_1\big)+(1-\alpha)\, f\big(u_2\big)=\alpha\, u_1^2+(1-\alpha)\, u_2^2=\bar{u}^2\geq f(\bar{u})$.

В раздел 2 се разглеждат още две задачи на оптималното управление:

Обобщена задача 2:

Разглеждаме следната задача на оптималното управление с безкраен времеви хоризонт:

Критерий за максимизиране:

$$(11)\left|\ \big(G_u(\cdot),u(\cdot)\big):=\int_0^\infty e^{-\rho t}\Big(\pi\,\beta G_u(t)-f\big(u(t)\big)\Big)\,dt\underset{u}{\longrightarrow}\max\right.$$

Динамиката описваща развитието на репутация на фирмата във времето отново се задава със следната линейна задача на Коши:

$$(12)\left|\begin{array}{l}\dot{G}_u(t)=-\delta\, G_u(t)+g\big(u(t),v(t)\big)\\[2ex] G_u(0)=G_0>0\end{array}\right.$$

В тази задача смисълът на величините и параметрите е аналогичен с този в **Обобщена задача 1**, а условията който искаме да изпълняват са отново (7)÷(10). Единственото, което различава **Обобщена задача 1** и **Обобщена задача 2**, е наличието на $\max\{G_u(t),0\}$ в критерия на **Обобщена задача 1** и заместването му с $G_u(t)$ в критерия на **Обобщена задача 2**.

Обобщена задача 3:

Разглеждаме следната задача на оптималното управление на краен времеви интервал:

Критерий за максимизиране:

$$(13)\quad \Big| \ \Psi\big(G_u(\cdot), u(\cdot), T\big) := \int_0^T e^{-\rho t}\Big(\pi\,\beta\,G_u(t) - f\big(u(t)\big)\Big)\,dt \underset{u}{\longrightarrow} \max$$

Динамиката, начално условие и фазово ограничени:

$$(14)\quad \left|\begin{array}{l} \dot{G}_u(t) = -\delta\,G_u(t) + g\big(u(t), v(t)\big) \\ \\ G_u(0) = G_0 > 0 \\ \\ G_u(T) \geq 0 \end{array}\right.$$

Както в **Обобщена задача 2**, така и в тази задача смисълът на променливите и величините е аналогичен с този в **Обобщена задача 1**, а условията който искаме да изпълняват са отново (7)÷(10). Различното при **Обобщена задача 3** е, че е на краен времеви интервал и искаме стойността на репутация в крайния времеви момент да бъде неотрицателна.

1.3.2 Задача с един производител:

В раздел 3 е разгледан същият модел като в [3] както и още две помощни задачи. Тези три задачи са съответно:

Задача 1 :

Критерий за максимизиране:

$$\left| \; M\big(G_u(\cdot), u(\cdot)\big) := \int_0^\infty e^{-\rho t}\left(\pi\,\beta\,[G_u(t)]^+ - \frac{\kappa}{2}\,u^2(t)\right) dt \underset{u}{\longrightarrow} \max \right.$$

Динамика и начално условие:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{G}_u(t) = -\delta\, G_u(t) + \gamma\, u(t) - \xi \\ \\ G_u(0) = G_0 > 0 \end{array} \right.$$

Тази задача е аналогична на задача (1)÷(2) от [3].

Задача 2 :

Критерий за максимизиране:

$$(15) \left| \; K\big(G_u(\cdot), u(\cdot)\big) := \int_0^\infty e^{-\rho t}\left(\pi\,\beta\, G_u(t) - \frac{\kappa}{2}\,u^2(t)\right) dt \underset{u}{\longrightarrow} \max \right.$$

Динамика и начално условие:

$$(16) \left| \begin{array}{l} \dot{G}_u(t) = -\delta\, G_u(t) + \gamma\, u(t) - \xi \\ \\ G_u(0) = G_0 > 0 \end{array} \right.$$

В тази задача смисълът на величините и параметрите е аналогичен с този в **Задача 1** .

Задача 3 :

Критерий за максимизиране:

$$(17)\ \left|\ \Psi\big(G_u(\cdot), u(\cdot), T\big) := \int_0^T e^{-\rho t}\left(\pi\,\beta\,G_u(t) - \frac{\kappa}{2}\,u^2(t)\right)dt \underset{u}{\longrightarrow} \max\right.$$

Динамика, начално условие и фазово ограничение:

$$(18)\ \left|\begin{array}{l} \dot{G}_u(t) = -\delta\,G_u(t) + \gamma\,u(t) - \xi \\ \\ G_u(0) = G_0 > 0 \\ \\ G_u(T) \geq 0 \end{array}\right.$$

В тази задача смисълът на величините и параметрите е аналогичен с този в **Задача 1** .

2 Обобщена задача с един производител

Настоящият раздел разглежда три задачи на оптималното управление. Те са съответно **Обобщена задача 1** $\big((5) \div (6)\big)$, **Обобщена задача 2** $\big((11) \div (12)\big)$ и **Обобщена задача 3** $\big((13) \div (14)\big)$.

В **Лема 2.1** е доказано съществуването на оптимален процес на задача (5)÷(6).

В **Лема 2.2** е доказано, че не съществува оптимален процес за задача (5)÷(6), такъв че оптималната му траектория да се анулира във два времеви момента τ и $\tau + \nu$ и да приема отрицателни стойности в интервала $(\tau, \tau + \nu)$, където $\tau > 0$ и $\nu > 0$.

Една оптимална траектория за задача (5)÷(6) или приема само неотрицателни стойности в целия времеви интервал $[0, +\infty)$, или съществува времеви момент $t_1 > 0$, за който тя приема отрицателна стойност. **Следствие 2.3** показва, че ако оптималната траектория на оптимален процес на **Обобщена задача 1** приема отрицателна стойност, то ще съществува времеви момент $\tau_1 > 0$, такъв че тя се анулира в τ_1, приема неотрицателни стойности за $t \in [0, \tau_1)$ и приема отрицателни стойности за $t \in (\tau_1, +\infty)$.

Теорема 2.4 и **Теорема 2.5** дават връзка между решенията на **Обобщена задача 1** и **Обобщена задача 3** .

Лема 2.6 и **Лема 2.7** характеризират вида на оптималното управление на **Обобщена задача 1** в зависимост от това дали **Обобщена задача 3** има решение.

Лема 2.1:

За всяко произволно и фиксирано външно влияние $v(\cdot)$ съществува оптимален процес на **Обобщена задача 1** .

Доказателство:

За доказателството на тази лема ще използваме **Теорема 5.1:**

Очевидно е, че $Ł(G, u, t) := e^{-\rho t}\Big(\pi\,\beta\,[G]^+ - f(u)\Big)$ и $\bar{f}(G, u) = -\delta\,G + g(u, v)$ са непрекъснати тъй като сума, разлика, произведение и максимум на две непрекъснати функции е непрекъсната функция.

Очевидно е, че $U := [0, u_{max}]$ е затворено и ограничено подмножество на $\mathbb{R}$.

Множеството от допустими процеси на **Обобщена задача 1** е непразно тъй като кандидат допустимият процес $\big(G_{u^0}(\cdot), u^0(\cdot)\big)$, където $u^0(t) = 0$ за всяко $t \in [0, +\infty)$ е допустим процес. За да докажем, че този процес е допустим за задача (5)÷(6) ще напишем $G_{u^0}(\cdot)$ в явен вид, използвайки една от формулите на Коши за решаване на линейно обикновено диференциално уравнение$\Big($**(ФНК$_3$)** от раздел 4$\Big)$:

$$G_{u^0}(t) = e^{-\int_0^t \delta\, dt} G_0 + \int_0^t e^{-\int_s^t \delta\, dt} g\big(u^0(s), v(s)\big)\, ds = e^{-\delta\, t}\Big(G_0 + \int_0^t e^{\delta\, s}\, g\big(0, v(s)\big)\, ds\Big)$$

От горното равенство определяме $G_{u^0}(\cdot)$ и заместваме в критерия на **Обобщена задача 1** . Ще покажем, че получения несобствен интеграл е сходящ:

$$\Pi\big(G_{u^0}(\cdot), u^0(\cdot)\big) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho\, t}\Big(\pi\beta\Big[e^{-\delta\, t}\Big(G_0 + \int_0^t e^{\delta\, s}\, g\big(0, v(s)\big)\, ds\Big)\Big]^+ - f\big(u^0(t)\big)\Big)\, dt =$$

$$= \pi\beta\int_0^{+\infty} e^{-\rho\, t}\Big[e^{-\delta\, t}\Big(G_0 + \int_0^t e^{\delta\, s}\, g\big(0, v(s)\big)\, ds\Big)\Big]^+ dt$$

Тъй като от (8) $g\big(u, v\big)$ е непрекъсната и дефинирана в компакта $[0, u_{max}] \times [0, v_{max}]$, то по теорема на Вайерщрас ще намерим константа $C_1 \geq 0$, такава че:

$$\Big[e^{-\delta\, t}\Big(G_0 + \int_0^t e^{\delta\, s}\, g\big(0, v(s)\big)\, ds\Big)\Big]^+ \leq C_1.$$

Връщайки се към критерия на **Обобщена задача 1** получаваме, че:

$$\Pi\big(G_{u^0}(\cdot), u^0(\cdot)\big) \leq C_1\, \pi\, \beta\int_0^{+\infty} e^{-\rho\, t}\, dt = C_1\, \pi\, \beta\, \lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-\rho\, t}\, dt$$

$$= -\frac{C_1\, \pi\, \beta}{\rho}\lim_{A\to+\infty}\Big(e^{-\rho\, A} - 1\Big) = \frac{C_1\, \pi\, \beta}{\rho} < +\infty.$$

Следователно множеството от допустими процеси на **Обобщена задача 1** е непразно.

Нека $\big(G_u(\cdot), u(\cdot)\big)$ е произволен допустим процес на **Обобщена задача 1** .

Ще покажем, че съществува мажорираща отгоре функция, която е интегруема в $[0, +\infty)$, за $\text{Ł}(G_u(\cdot), u(\cdot), t)$:

Пак от непрекъснатостта на $g\big(u, v\big)$ и теорема на Вайерщрас ще намерим константа $C_2 \geq 0$, такава че:

$$\Big[e^{-\delta\, t}\Big(G_0 + \int_0^t e^{\delta\, s}\, g\big(u(s), v(s)\big)\, ds\Big)\Big]^+ \leq C_2.$$

Също така от (7) имаме, че $-f(u(t)) \leq 0$ за всяко $t \in [0, +\infty)$.

С помощта на тези неравенства, ще оценим $Ł\big(G_u(t), u(t), t\big)$ отгоре:

$$Ł\big(G_u(t), u(t), t\big) = e^{-\rho t}\left(\pi\,\beta\,\big[G_u(t)\big]^+ - f\big(u(t)\big)\right) = e^{-\rho t}\left(\pi\,\beta\left[e^{-\delta t}\left(G_0 + \int_0^t e^{\delta s}\,g\big(u(s), v(s)\big)\,ds\right)\right]^+ -\right.$$

$$\left. -f\big(u(t)\big)\right) \le e^{-\rho t}\Big(\pi\,\beta\,C_2 - 0\Big) = C_2\,\pi\,\beta\,e^{-\rho t} := \phi(t).$$

За функция $\phi(\cdot)$ имаме, че:

$Ł\big(G_u(t), u(t), t\big) \le \phi(t)$ за всяко $t \in [0, +\infty)$;

$\phi(t) \ge 0$ за всяко $t \in [0, +\infty)$;

$$\int_0^{+\infty} \phi(t)\,dt = C_2\,\pi\,\beta\,\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-\rho t}\,dt = -\frac{C_2\,\pi\,\beta}{\rho}\,\lim_{A\to+\infty}\Big(e^{-\rho A} - 1\Big) = \frac{C_2\,\pi\,\beta}{\rho} < +\infty.$$

Следователно функцията $\phi(\cdot)$ е мажоранта за $Ł\big(G_u(\cdot), u(\cdot), t\big)$.

Пристъпваме към намирането на функции $a(t)$ и $b(t)$, такива че при фиксирано $v \in [0, v_{\max}]$ да имаме, че $|\bar{f}\big(G, u, t\big)| \le a(t)\,|G| + b(t)$, за всяко $t \in [0, +\infty)$.

$$|\bar{f}\big(G, u, t\big)| = |-\delta\,G + g\big(u, v\big)| \le \delta\,|G| + |g\big(u, v\big)|$$

В контекста на теоремата бихме имали, че $a(t) = \delta > 0$, а $b(t) = |g\big(u, v\big)|$.

Последно нека при фиксирано $v \in [0, v_{\max}]$ разгледаме множеството:

$N(G, U, t) := \{\Big(L(G, u, t) + \varepsilon, -\delta\,G + g\big(u, v\big)\Big) : u \in U, \varepsilon \le 0\}$, където $U = [0, u_{\max}]$.

За да докажем, че $N(G, U, t)$ е изпъкнало множество, нека G и t са произволни и фиксирани и $n_1, n_2 \in N(G, U, t)$, където:

$n_1 = \Big(L(G, u_1, t) + \varepsilon_1, -\delta\,G + g\big(u_1, v\big)\Big)$, $\varepsilon_1 \le 0$;

$n_2 = \Big(L(G, u_2, t) + \varepsilon_2, -\delta\,G + g\big(u_2, v\big)\Big)$, $\varepsilon_2 \le 0$.

Нека $\alpha \in [0, 1]$.

От поисканото в (9) следва, че:

$$\alpha\,n_1 + (1-\alpha)\,n_2 = \Big(\alpha\,L(G, u_1, t) + \alpha\,\varepsilon_1 + (1-\alpha)\,L(G, u_2, t) + (1-\alpha)\,\varepsilon_2, -\alpha\,\delta\,G + \alpha\,g\big(u_1, v\big) -$$

$$-(1-\alpha)\,\delta\,G + (1-\alpha)\,g\big(u_1, v\big)\Big) =$$

$$= \left(e^{-\rho t}\left(\pi\,\beta\,[G]^{+} - \big(\alpha\,f(u_1) + (\alpha-1)\,f(u_2)\big)\right) + \alpha\,\varepsilon_1 + (1-\alpha)\,\varepsilon_2, -\delta\,G + g(\bar{u},v)\right) =$$
$$= \left(L(G,\bar{u},t) + \bar{\varepsilon}, -\delta\,G + g(\bar{u},v)\right),$$ където:

$\bar{\varepsilon} := \alpha\,\varepsilon_1 + (1-\alpha)\,\varepsilon_2 + e^{-\rho t}\left(\pi\,\beta\,[G]^{+} - \big(\alpha\,f(u_1) + (\alpha-1)\,f(u_2)\big)\right) - e^{-\rho t}\left(\pi\,\beta\,[G]^{+} - f(\bar{u})\right)$ и $\bar{u} \in U$.

Нека оценим знака на $\bar{\varepsilon}$:

От това, че $\varepsilon_1 \leq 0$, $\varepsilon_2 \leq 0$ и $\alpha\,f(u_1) + (1-\alpha)\,f(u_2) \geq f(\bar{u})$, следва че:

$$\bar{\varepsilon} \leq \alpha\,0 + (1-\alpha)\,0 + e^{-\rho t}\left(0 - \left(\alpha\,f(u_1) + (1-\alpha)\,f(u_2) - f(\bar{u})\right)\right) \leq e^{-\rho t}\big(f(\bar{u}) - f(\bar{u})\big) = 0$$

Следователно $\alpha\,n_1 + (1-\alpha)\,n_2 = \left(L(G,\bar{u},t) + \bar{\varepsilon}, -\delta\,G + g(\bar{u},v)\right) \in N(G,U,t)$,

а това показва че множеството $N(G,U,t)$ е изпъкнало.

$\square$

Лема 2.2:

Нека $\big(G_u(\cdot), u(\cdot)\big)$ е допустим процес на **Обобщена задача 1**.

Нека $\tau, \nu > 0$ са такива времеви моменти, че:

$$(19)\left|\begin{array}{l} G_u(t) > 0, \text{ ако } t \in [0,\tau) \\ \\ G_u(\tau) = G_u(\tau+\nu) = 0 \\ \\ G_u(t) < 0, \text{ ако } t \in (\tau, \tau+\nu) \end{array}\right.$$

(Фигура №1)

Тогава $\big(G_u(\cdot), u(\cdot)\big)$ не е оптимален процес на **Обобщена задача 1** .

Доказателство:

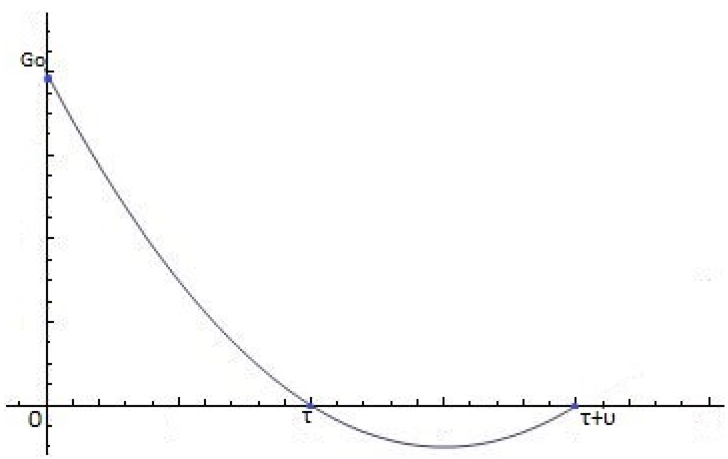
За процеса $\big(G_u(\cdot), u(\cdot)\big)$ имаме, че $\Pi\big(G_u(\cdot), u(\cdot)\big) = A + B + C$, където:

$$A = \int_0^{\tau} e^{-\rho t}\Big(\pi\,\beta\,G_u(t) - f\big(u(t)\big)\Big)\,dt$$

$$B = -\int_{\tau}^{\tau+\nu} e^{-\rho t}\,f\big(u(t)\big)\,dt$$

$$C = \int_{\tau+\nu}^{+\infty} e^{-\rho t}\Big(\pi\,\beta\,\big[G_u(t)\big]^{+} - f\big(u(t)\big)\Big)\,dt$$

Фигура №1



(I) Тъй като $e^{-\rho t} f\big(u(t)\big) \geq 0$ за всяко $t \in [\tau, \tau+\nu]$, то $B \leq 0$.

Да допуснем, че $B = 0$.

Тъй като $B = 0$, то $f(u(t)) = 0$ п.н. за $t \in [\tau, \tau+\nu]$.

Следователно от (7) ще имаме, че $u(t) = 0$ п.н. за $t \in [\tau, \tau+\nu]$.

Дефинираме множеството $S := \{t \in [\tau, \tau+\nu] : u(t) \neq 0\}$. Ясно е, че $\mu\big(S\big) = 0$.

Дефинираме множеството $E := \{t \in [\tau, \tau+\nu] : v(t) > 0\}$.

1 случай.

Нека $\mu(E) = 0$.

Нека $\tau' \in \mathbb{R}$ е такова, че $\tau < \tau' < \tau + \nu$. Следователно $G_u\big(\tau'\big) < 0$.

Нека $S_1 := \big([\tau,\tau'] \setminus S\big) \cap E$; $S_2 := \big([\tau,\tau'] \setminus S\big) \setminus S_1$.

Ясно е, че $S_1 \cup S_2 = [\tau,\tau'] \setminus S$.

Тъй като $\mu\big(E\big) = 0$ и $S_1 \subset E$, то $0 \le \mu\big(S_1\big) \le \mu\big(E\big) = 0$. От което следва, че $\mu\big(S_1\big) = 0$.

Следните пресмятания водят до противоречие с допускането, че $\mu\big(E\big) = 0$:

$$0 > G_u(\tau') = e^{-\int_\tau^{\tau'} \delta\, ds} G_u(\tau) + \int_\tau^{\tau'} e^{-\int_s^{\tau'} \delta\, d\sigma} g\big(u(s), v(s)\big)\, ds =$$

$$= 0 + e^{-\delta\,\tau'} \Bigg(\int\limits_S e^{\delta\, s}\, g\big(u(s), v(s)\big)\, d\mu + \int\limits_{[\tau,\tau']\setminus S} e^{\delta\, s}\, g(0, v(s))\, d\mu \Bigg) =$$

$$= e^{-\delta\,\tau'} \Bigg(\int\limits_{S_1} e^{\delta\, s}\, g\big(0, v(s)\big)\, d\mu + \int\limits_{S_2} e^{\delta\, s}\, g\big(0,0\big)\, d\mu \Bigg) = 0 \quad ↯$$

2 случай.

Нека $\mu(E) > 0$.

Нека представим множеството E по следния начин:

$E = \bigcup\limits_{n \in N} E_n$ където $E_n = \{t \in [\tau, \tau+\nu] : v(t) > \frac{1}{n}\}$.

Тъй като $\mu\big(E\big) > 0$, то съществува $n_0 \in I\!N$, такова, че $\mu\big(E_{n_0}\big) > 0$.

В противен случай множеството E би било изброимо обединение от множества

с мярка нула, което би довело до следното противоречие:

$0 < \mu\big(E\big) = \mu\big(\bigcup\limits_{n \in N} E_n\big) \le \sum\limits_{n \in N} \mu\big(E_n\big) = 0 \quad ↯$.

Тъй като $g(u,v)$ е непрекъсната, то съществува реално число $M<0$, такова че $e^{\delta\, t}\, g\big(0,v(t)\big) < M$, когато $v(t)\in[\frac{1}{n_0}, v_{\max}]$.

Следователно $\displaystyle\int\limits_{E} e^{\delta\, s}\, g\big(0,v(s)\big)\, d\mu \le \int\limits_{E_{n_0}} e^{\delta\, s}\, g\big(0,v(s)\big)\, d\mu < \mu\big(E_{n_0}\big)\, M < 0$

Нека $S_3 := \big([\tau,\tau+\nu]\setminus S\big)\cap E$; $S_4 := \big([\tau,\tau+\nu]\setminus S\big)\setminus S_3$.

Ясно е, че $S_3\cup S_4 = [\tau,\tau+\nu]\setminus S$.

Ясно е, че $S_3 := \big([\tau,\tau+\nu]\setminus S\big)\cap E = \big([\tau,\tau+\nu]\cap E\big)\setminus S = E\setminus S$.

Тъй като $\mu\big(S\big)=0$ и $E\cap S\subset S$, то:

$0\le \mu\big(E\cap S\big)\le \mu\big(S\big)=0$. От което следва, че $\mu\big(E\cap S\big)=0$.

Бележка: По дефиниция $\mu\big(\emptyset\big)=0$(ако $E\cap S=\emptyset$).

Следната сметка води до противоречие с допускането, че $\mu\big(E\big)>0$:

$$0 = G_u(\tau+\nu) = e^{-\displaystyle\int_{\tau}^{\tau+\nu}\delta\, ds} G_u(\tau) + \int_{\tau}^{\tau+\nu} e^{-\displaystyle\int_{s}^{\tau+\nu}\delta\, d\sigma} g(u(s),v(s))\, ds =$$

$$= e^{-(\tau+\nu)\delta}\Bigg(\int\limits_{S} e^{\delta\, s}\, g\big(u(s),v(s)\big)\, d\mu + \int\limits_{[\tau,\tau+\nu]\setminus S} e^{\delta\, s}\, g\big(0,v(s)\big)\, d\mu\Bigg) \le \int\limits_{S_3} e^{\delta\, s}\, g\big(0,v(s)\big)\, d\mu + \int\limits_{S_4} e^{\delta\, s}\, g\big(0,0\big)\, ds =$$

$$= \int\limits_{S_3} e^{\delta\, s}\, g\big(0,v(s)\big)\, d\mu = \int\limits_{E} e^{\delta\, s}\, g\big(0,v(s)\big)\, d\mu - \int\limits_{E\cap S} e^{\delta\, s}\, g\big(0,v(s)\big)\, d\mu = \int\limits_{E} e^{\delta\, s}\, g(0,v(s))\, ds < 0 \quad \lightning$$

$\rightarrow \boxed{B<0}$

(II) Разглеждаме процеса $\big(G_{\tilde u}(\cdot),\tilde u(\cdot)\big)$ на **Обобщена задача 1**, за който:

$$\tilde u(t) = \begin{cases} u(t), & \text{ако} \quad t\in[0,\tau) \\ \ 0, & \text{ако} \quad t\in[\tau,\tau+\nu] \\ u(t), & \text{ако} \quad t\in(\tau+\nu,+\infty) \end{cases}$$

За процеса $\big(G_{\tilde{u}}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)\big)$ имаме, че:

$$\Pi\big(G_{\tilde{u}}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)\big) = A + \pi\,\beta \int_{\tau}^{\tau+\nu} e^{-\rho\, t}\,\big[G_{\tilde{u}}(t)\big]^{+}\,dt + C$$

От непрекъснатост на траекторията имаме, че $G_{\tilde{u}}(\tau) = G_u(\tau)$.

Следователно за $t \in [\tau, \tau+\nu]$ ще е изпълнено, че:

$$G_{\tilde{u}}(t) = e^{-\displaystyle\int_{\tau}^{t} \delta\, ds} G_{\tilde{u}}(\tau) + \int_{\tau}^{t} e^{-\displaystyle\int_{s}^{t} \delta\, d\sigma} g\big(\tilde{u}(s), v(s)\big)\,ds = e^{-\delta\, t}\int_{\tau}^{t} e^{\delta\, s}\, g(0, v(s))\,ds \leq 0$$

Следователно $\big[G_{\tilde{u}}(t)\big]^{+} = 0$ за всяко $t \in [\tau, \tau+\nu]$.

Връщайки се към критерия на **Обобщена задача 1** получаваме, че:

$\Pi\big(G_{\tilde{u}}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)\big) = A + C.$

Следователно $\Pi\big(G(\cdot), u(\cdot)\big) - \Pi\big(G_{\tilde{u}}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)\big) = A + B + C - A - C = B < 0$, а от това

следва,че $\Pi\big(G(\cdot), u(\cdot)\big) < \Pi\big(G_{\tilde{u}}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)\big)$.

Следователно $\big(G(\cdot), u(\cdot)\big)$ не е оптимален процес за **Обобщена задача 1** . $\square$

Следствие 2.3:

Нека $\big(G_u(\cdot), u(\cdot)\big)$ е оптимален процес на **Обобщена задача 1**, за който съществува времеви момент $t_1 > 0$, такъв че $G_u(t_1) < 0$.

Нека $S_1 := \{\tau |\ G_u(s) < 0,\ \text{където } s \in [\tau, t_1]\}$ и $\tau_1 := \inf\ S_1$.

Тогава:

$$(20)\left|\begin{array}{ll} G_u(t) \geq 0, & \text{ако } t \in [0, \tau_1) \\ \\ G_u(\tau_1) = 0 & \\ \\ G_u(t) < 0, & \text{ако } t \in (\tau_1, +\infty) \end{array}\right.$$

Доказателство:

Тъй като $G_u(\cdot)$ е непрекъсната функция на времето t и $G_u(0) = G_0 > 0$, то съответно

$S_1 \neq \emptyset$ и S_1 е ограничено отдолу множество. Следователно съществува $\inf S_1$.

Нека $\tau_1 = \inf S_1$. Това означава, че $\tau_1 \leq s$ за всяко $s \in S_1$ и за всяко $\tau > \tau_1$ ще съществува $s_1 \in S_1$, такова че $s_1 < \tau$.

Да допуснем, че: $G(\tau_1) > 0$.

Тъй като $G_u(t)$ е непрекъсната, то ще съществува $\varepsilon_1 > 0$, такова че $\tau_1 + \varepsilon_1 < t_1$

и $G_u(t) > 0$ за $t \in [\tau_1, \tau_1 + \varepsilon)$.

Нека $\tau_2 \in (\tau_1, \tau_1 + \varepsilon)$. Следователно $\tau_1 < \tau_2$.

Тъй като $\tau_1 = \inf\ S_1$, то ще съществува $\tau_3 \in (\tau_1, \tau_2)$, такова че $\tau_3 \in S_1$.

Но от дефиницията на множеството S_1 следва, че $G_u(t) < 0$ за $t \in [\tau_3, t_1]$,

а пък $[\tau_3, t_1] \cap [\tau_1, \tau_2) \neq \emptyset$. Противоречие!

Да допуснем, че: $G(\tau_1) < 0$.

Очевидно е, че за $t \in [\tau_1, t_1]$ в този случай ще имаме $G_u(t) < 0$.

Пак от непрекъснатост ще намерим $\varepsilon_2 > 0$, такова че $G_u(t) < 0$, за $t \in (\tau_1 - \varepsilon_2, \tau_1 + \varepsilon_2)$.

Но от тук следва, че ще намерим $\tau_4 \in (\tau_1 - \varepsilon_2, \tau_1)$ и за него ще имаме, че $\tau_4 \in S_1$ и $\tau_4 < \tau_1$, но това противоречи с условието, че $\tau_1 = \inf\ S_1$.

От противоречията получени в тези два случая, следва че $G_u(\tau_1) = 0$.

Да допуснем, че съществува времеви момент $t_2 \in (0, \tau_1)$, такъв че $G(t_2) < 0$.

Тогава от непрекъснатостта на $G_u(t)$ и теорема на Болцано ще намерим времеви моменти t_3 и t_4, такива че:

$t_3 \in (0, t_2)$ и $G_u(t_3) = 0$ и $t_4 \in (t_2, \tau_1]$ и $G_u(t_4) = 0$.

Но тъй като по условие $G_u(\cdot)$ е оптимална траектория, наличието на времевите моменти t_3 и t_4, такива че $G_u(t_3) = G_u(t_4) = 0$, води до противоречие с **Лема 2.1**.

Аналогично, ако допуснем, че съществува времеви момент $t_5 \in (\tau_1, +\infty)$, такъв че $G_u(t_5) \geq 0$, то ще намерим времеви момент $t_6 \in (\tau_1, t_5]$, такъв че $G_u(t_6) = 0$.

Отново получаваме два времеви момента τ_1 и t_6, за които $G_u(\tau_1) = G_u(t_6) = 0$, което поради оптималността на $\big(G_u(\cdot), u(\cdot)\big)$ води до противоречие с **Лема 2.1**. $\square$

Теорема 2.4:

Нека $\big(G_u(\cdot), u(\cdot)\big)$ е оптимален процес на **Обобщена задача 1** , за който съществува времеви момент $t_1 > 0$, такъв че $G_u(t_1) < 0$. Тогава съществува оптимален процес за **Обобщена задача 3** .

Доказателство:

Нека в контекста на **Следствие 2.3** означим $\tau_1 = \inf\{\tau \,|G_u(s) < 0, \text{ където } s \in [\tau, t_1]\}$.

Да забележим, че траекторията $G_u(t)|_{t\in[0,\tau_1]}$ е допустима за **Обобщена задача 3** .

Нека допуснем, че $\big(G_u(\cdot), u(\cdot), \tau_1\big)$ не е оптимален процес на **Обобщена задача 3** .

Следователно съществуват управление $\omega(\cdot)$ със съответстващата му траектория $G_\omega(\cdot)$

и времеви момент $\nu > 0$, такива че $\Psi\big(G_u(\cdot), u(\cdot), \tau_1\big) < \Psi\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot), \nu\big)$.

Нека заместим в критерия на **Обобщена задача 1** процеса $\big(G_u(\cdot), u(\cdot)\big)$:

$$\Pi\big(G_u(\cdot), u(\cdot)\big) = \int_0^{\tau_1} e^{-\rho t}\Big(\pi\,\beta\,[G(t)]^+ - f\big(u(t)\big)\Big)\,dt + \int_{\tau_1}^{+\infty} e^{-\rho t}\Big(\pi\,\beta\,[G(t)]^+ - f\big(u(t)\big)\Big)\,dt =$$

$$= \int_0^{\tau_1} e^{-\rho t}\Big(\pi\,\beta\,G(t) - f\big(u(t)\big)\Big)\,dt - \int_{\tau_1}^{+\infty} e^{-\rho t} f\big(u(t)\big)\,dt = \Psi\big(G(\cdot), u(\cdot), \tau_1\big) + 0 = \Psi\big(G(\cdot), u(\cdot), \tau_1\big)$$

Предпоследното равенство е изпълнено тъй като $u(\cdot)$ е оптимално управление за **Обобщена задача 1** , което влече че множеството $Q = \{t \in [\tau_1, +\infty) | u(t) \neq 0\}$ има мярка нула, т.е. $\mu(Q) = 0$. Това е така, защото ако допуснем противното, че $\mu(Q) > 0$, то в интервала $[\tau_1, +\infty)$ критерият на **Обобщена задача 1** би имал отрицателна стойност. На свой ред това не би било оптимално, тъй като с нулево рекламиране същият критерий в интервала $[\tau_1, +\infty)$ би имал нулева стойност.

Нека сега разгледаме управлението $\bar{\omega}_\nu(\cdot)$ за **Обобщена задача 1** със съответстващата му траектория $G_{\bar{\omega}_\nu}(\cdot)$,

където:

$$\bar{\omega}_\nu(t) := \begin{cases} \omega(t), & \text{за } t \in [0, \nu) \\ \\ 0, & \text{за } t \in [\nu, +\infty) \end{cases}$$

Тъй като $\max\{G_{\bar{\omega}_\nu}(t), 0\} \geq G_{\bar{\omega}_\nu}(t) = G_\omega(t)$ за всяко $t \in [0, \nu)$, то за процеса $\big(G_{\bar{\omega}_\nu}(\cdot), \bar{\omega}_\nu(\cdot)\big)$ имаме, че:

$$\Pi\big(G_{\bar{\omega}_\nu}(\cdot), \bar{\omega}_\nu(\cdot)\big) = \int_0^\nu e^{-\rho\, t}\Big(\pi\, \beta\, [G_{\bar{\omega}_\nu}(t)]^+ - f\big(\bar{\omega}_\nu(t)\big)\Big)\, dt + \int_\nu^{+\infty} e^{-\rho\, t}\Big(\pi\, \beta\, [G_{\bar{\omega}_\nu}(t)]^+ -$$

$$-f\big(\bar{\omega}_\nu(t)\big)\Big)\, dt \geq \int_0^\nu e^{-\rho\, t}\Big(\pi\, \beta\, G_\omega(t) - f\big(\omega(t)\big)\Big)\, dt + \int_\nu^{+\infty} e^{-\rho\, t}\Big(\pi\, \beta\, [G_{\bar{\omega}_\nu}(t)]^+ - f\big(\bar{\omega}_\nu(t)\big)\Big)\, dt =$$

$$= \Psi\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot), \nu\big) + \int_\nu^{+\infty} e^{-\rho\, t}\Big(\pi\, \beta\, [G_{\bar{\omega}_\nu}(t)]^+ - f\big(\bar{\omega}_\nu(t)\big)\Big)\, dt =$$

$$= \Psi\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot), \nu\big) + \pi\, \beta \int_\nu^{+\infty} e^{-\rho\, t}\, [G_{\bar{\omega}_\nu}(t)]^+\, dt \geq \Psi\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot), \nu\big).$$

Следователно $\Pi\big(G_u(\cdot), u(\cdot)\big) = \Psi\big(G_u(\cdot), u(\cdot), \tau_1\big) < \Psi\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot), \nu\big) \leq \Pi\big(G_{\bar{\omega}_\nu}(\cdot), \bar{\omega}_\nu(\cdot)\big).$

което противоречи с оптималността на $\big(G_u(\cdot), u(\cdot)\big)$ за **Обобщена задача 1** .

Следователно $\big(G_u(\cdot), u(\cdot), \tau_1\big)$ е оптимален процес за **Обобщена задача 3** . □

Теорема 2.5:

Нека $\big(G_u(\cdot), u(\cdot), \tau\big)$ е оптимална процес на **Обобщена задача 3** .

Тогава $\big(G_{\bar{u}_\tau}(.), \bar{u}_\tau(.)\big)$ е оптимален процес на **Обобщена задача 1** и $G_{\bar{u}_\tau}(\tau) = 0$, където:

$$\bar{u}_\tau(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0, \tau) \\ \\ 0, & t \in [\tau, +\infty) \end{cases}$$

Доказателство:

Да допуснем, че $G_u(\tau) > 0$.

От непрекъснатост на траекторията имаме, че $G_u(\tau) = G_{\bar{u}_\tau}(\tau) > 0$.

Следователно съществува положително число $\varepsilon > 0$ такова, че $G_{\bar{u}_\tau}(t) > 0$ за $t \in [\tau, \tau + \varepsilon)$.

От това следва че:

$$\Psi\big(G_{\bar{u}_\tau}(\cdot), \bar{u}_\tau(\cdot), \tau + \varepsilon\big) = \Psi\big(G_u(\cdot), u(\cdot), \tau\big) + \int_\tau^{\tau+\varepsilon} e^{-\rho\, t}\Big(\pi\, \beta\, [G_{\bar{u}_\tau}(t)]^+ - f\big(\bar{u}_\tau(t)\big)\Big)\, dt =$$

$$= \Psi\big(G_u(\cdot), u(\cdot), \tau\big) + \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} e^{-\rho\, t}\Big(\pi\, \beta\, [G_{\bar{u}_\tau}(t)]^+ - f\big(0\big)\Big)\, dt =$$

$$= \Psi\big(G_u(\cdot), u(\cdot), \tau\big) + \pi\, \beta \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} e^{-\rho\, t}[G_{\bar{u}_\tau}(t)]^+\, dt > \Psi\big(G_u(\cdot), u(\cdot), \tau\big)$$

Но това противоречи с оптималността на процеса $\big(G_u(\cdot), u(\cdot), \tau\big)$.

Следователно $G_u(\tau) = G_{\bar{u}_\tau}(\tau) = 0$.

Нека да разгледаме стойността на критерия на **Обобщена задача 1**

с допустимия процеса $\big(G_{\bar{u}_\tau}(\cdot), \bar{u}_\tau(\cdot)\big)$:

$$\Pi\big(G_{\bar{u}_\tau}(\cdot), \bar{u}_\tau(\cdot)\big) = \Psi\big(G_u(\cdot), u(\cdot), \tau\big) + \int_{\tau}^{+\infty} e^{-\rho\, t}\Big(\pi\, \beta [G_{\bar{u}_\tau}(t)]^+ - f\big(\bar{u}_\tau(t)\big)\Big)\, dt =$$

$$= \Psi\big(G_u(\cdot), u(\cdot), \tau\big) + \pi\, \beta \int_{\tau}^{+\infty} e^{-\rho\, t}\, [G_{\bar{u}_\tau}(t)]^+\, dt$$

За траекторията $G_{\bar{u}_\tau}(\cdot)$ от **(ΦHK_3)** следва, че:

$$G_{\bar{u}_\tau}(t) = e^{-\delta\, t}\Big(G_{\bar{u}_\tau}(\tau) + \int_{\tau}^{t} e^{\delta\, s}\, g\big(\bar{u}_\tau(s), v(s)\big)\, ds\Big) = e^{-\delta\, t} \int_{\tau}^{t} e^{\delta\, s}\, g\big(0, v(s)\big)\, ds \leq 0.$$

Следователно $G_{\bar{u}_\tau}(t) \leq 0$ за $t \in [\tau, +\infty)$, което влече че $[G_{\bar{u}_\tau}(t)]^+ = 0$ за $t \in [\tau, +\infty)$.

Връщайки се към критерия на **Обобщена задача 1** получаваме, че:

$\Pi\big(G_{\bar{u}_\tau}(\cdot), \bar{u}_\tau(\cdot)\big) = \Psi\big(G_u(\cdot), u(\cdot), \tau\big)$

Да допуснем, че $\big(G_{\bar{u}_\tau}(\cdot), \bar{u}_\tau(\cdot)\big)$ не е оптимален процес за **Обобщена задача 1** .

Нека $\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot)\big)$ е оптимален процес за **Обобщена задача 1** .

Следователно $\Pi\big(G_{\bar{u}_\tau}(\cdot), \bar{u}_\tau(\cdot)\big) < \Pi\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot)\big)$.

Да забележим, че точно едно от следните две твърдение е вярно:

1) Съществува времеви момент $\nu > 0$ такова, че $G_\omega(\nu) < 0$

2) $G_\omega(t) \geq 0$ за всяко $t \in [0, +\infty)$

Нека 1) е изпълнено.

Да означим в контекста на **Следствие 2.3** $\bar{\nu} := \inf S_1 = \inf \{\tau : G_\omega(t) < 0, \text{ когато } s \in [\tau, \nu]\}$.

Тогава $\Pi\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot)\big) = \Psi\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot), \bar{\nu}\big) + \displaystyle\int_{\bar{\nu}}^{\infty} e^{-\rho t} \Big(\pi\, \beta\, [G_\omega(t)]^+ - f\big(\omega(t)\big)\, dt\Big) =$

$= \Psi\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot), \bar{\nu}\big) + \pi\, \beta \displaystyle\int_{\bar{\nu}}^{\infty} e^{-\rho t}\, [G_\omega(t)]^+\, dt$, тъй като ако $\omega(t)$ не е равна на нула п.н. за $t \in [\bar{\nu}, +\infty)$, то стойността на критерия на **Задача 1** би била по - малка от $\Pi\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot)\big)$, което би противоречело с оптималността на процеса $\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot)\big)$.

За траекторията $G_\omega(\cdot)$ от **(ФНК$_3$)** следва, че:

$$G_\omega(t) = e^{-\delta\, t}\Big(G_\omega(\bar{\nu}) + \int_{\bar{\nu}}^{t} e^{\delta\, s}\, g\big(\omega(s), v(s)\big)\, ds\Big) = e^{-\delta\, t} \int_{\bar{\nu}}^{t} e^{\delta\, s}\, g\big(0, v(s)\big)\, ds \leq 0.$$

Следователно $G_\omega(t) \leq 0$ за всяко $t \in [\bar{\nu}, +\infty)$, което влече че $[G_\omega(t)]^+ = 0$ за всяко $t \in [\tau, +\infty)$.

Връщайки се към критерия на **Обобщена задача 1** получаваме, че:

$\Pi\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot)\big) = \Psi\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot), \bar{\nu}\big)$

Следователно $\Psi\big(G_u(\cdot), u(\cdot), \tau\big) = \Pi\big(G_{\bar{u}_\tau}(\cdot), \bar{u}_\tau(\cdot)\big) < \Pi\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot)\big) = \Psi(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot), \bar{\nu})$,

което противоречи с оптималността на процеса $\big(G_u(\cdot), u(\cdot), \tau\big)$.

Нека 2) е изпълнено:

Тъй като множеството на неотрицателни, оптимални траектории за **Обобщена задача 1** се съдържа в множеството от оптимални траектории на **Обобщена задача 2**, то тъй като траекторията $G_\omega(\cdot)$ е неотрицателна, то тя е оптимална и за **Обобщена задача 2**.

Следователно $\lim\limits_{T \to +\infty} \Psi\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot), T\big) = K\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot)\big) = \Pi\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot)\big)$.

Тъй като $\Psi\big(G_u(\cdot), u(\cdot), \tau\big) = \Pi\big(G_{\bar{u}_\tau}(\cdot), \bar{u}_\tau(\cdot)\big) < \Pi\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot)\big)$, то съществува времеви момент

$\tau' > 0$, такъв че $\Psi\big(G_u(\cdot), u(\cdot), \tau\big) < \Psi\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot), \tau'\big)$, което противоречи с оптималността

на процеса $\big(G_u(.), u(.), \tau\big)$.

Да допуснем, противното, т.е. че за всяко $t \in [0, +\infty)$ е изпълнено:

$\Psi\big(G_u(\cdot), u(\cdot), \tau\big) \geq \Psi\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot), t\big)$.

Следователно $\Pi\big(G_{\bar{u}_\tau}(\cdot), \bar{u}_\tau(\cdot)\big) \geq \Psi\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot), t\big)$.

След граничен преход $t \to +\infty$ получаваме $\Pi\big(G_{\bar{u}_\tau}(\cdot), \bar{u}_\tau(\cdot)\big) \geq \lim\limits_{t\to+\infty} \Psi\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot), t\big) =$

$= \Pi\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot)\big)$, което противоречи с оптималността на процеса $\big(G_\omega(\cdot), \omega(\cdot)\big)$.

Следователно $\big(G_{\bar{u}_\tau}(\cdot), \bar{u}_\tau(\cdot)\big)$ е оптимален процес за **Задача 1** . $\square$

Лема 2.6:

Нека за фиксирано $v(t)$ **Обобщена задача 3** няма решение. Тогава оптималното управление $u^*(\cdot)$ на **Обобщена задача 1** се определя еднозначно от решението на уравнението: $-\dfrac{\partial f}{\partial u}\big(u\big) + \dfrac{\pi\,\beta}{\rho+\delta}\,\dfrac{\partial g}{\partial u}\big(u, v\big) = 0$.

Доказателство: Тъй като **Обобщена задача 3** няма решение, то от **Лема 2.4** следва, че не съществува времеви момент, за който оптималната траектория на **Обобщена задача 1** да приема отрицателна стойност. Следователно за оптималния процес $\big(G_{u^*}(\cdot), u^*(\cdot)\big)$ на **Обобщена задача 1** , е изпълнено че оптималната траектория $G_{u^*}(t) \geq 0$ за всяко $t \in [0, +\infty)$. Но тъй като множеството на неотрицателни, оптимални траектории за **Обобщена задача 1** се съдържа в множеството от оптимални траектории на **Обобщена задача 2** , то тъй като траекторията $G_{u^*}(\cdot)$ е неотрицателна, то тя е оптимална и за **Обобщена задача 2** .

Пристъпваме към доказателството на настоящата Лема. За него ще използваме **Теорема 5.2** от раздел 4. Необходимите за нея условия (A1) и (A2) са изпълнени съответно с функциите $\gamma(t) = \varepsilon > 0$ и $\varphi(t) = \delta + \pi\,\beta\,e^{-\rho\,t}$ за (A1) и $\lambda(t) = \pi\,\beta\,e^{-(\rho+\delta)\,t}$ за (A2).

Прилагаме тази теорема за намирането на явния вид на спрегната променлива $\psi(t)$:

$$\psi(t) = e^{\delta\,t}\int_t^{+\infty} e^{-\delta\,s}\,\pi\,\beta\,e^{-\rho\,s}\,ds = \pi\,\beta\,e^{\delta\,t}\int_t^{+\infty} e^{-(\delta+\rho)\,s}\,ds = \pi\,\beta\lim_{A\to+\infty}\int_t^{A} e^{-(\delta+\rho)\,s}\,ds =$$

$$= -\frac{\pi\,\beta}{\delta+\rho}\,e^{\delta\,t}\lim_{A\to+\infty}\left(e^{-(\delta+\rho)\,A} - e^{-(\delta+\rho)}\right) = \frac{\pi\,\beta}{\delta+\rho}\,e^{\delta\,t}\,e^{-(\delta+\rho)\,t} = \frac{\pi\,\beta}{\delta+\rho}\,e^{-\rho\,t}$$

$$\to \boxed{e^{\rho\,t}\,\psi(t) = \frac{\pi\,\beta}{\delta+\rho}}$$

Хамилтонианът на **Обобщена задача 2** е:

$$H(G,u,\psi,v,t) := e^{-\rho t}\Big(\pi\,\beta\,G - f\big(u\big)\Big) + \psi\Big(-\delta\,G + g\big(u,v\big)\Big)$$

Диференцирайки хамилтониана на **Обобщена задача 2** по втората му променлива u получаваме:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -e^{-\rho t}\,\frac{\partial f}{\partial u}\big(u\big) + e^{-\rho t}\,\frac{\pi\,\beta}{\rho+\delta}\,\frac{\partial g}{\partial u}\big(u,v\big)$$

От Принцип за Максимума на Понтрягин доказан в **Теорема 5.2** имаме, че:

$$H\big(G_{u^*}(t),u^*(t),\psi(t),v(t),t\big) = \max_{u\in[0,u_{max}]} H\big(G_{u^*}(t),u(t),\psi(t),v(t),t\big)$$

За да намерим максимизиращото хамилтониана управление, ще използваме необходимо условие за екстремум, а именно: $\dfrac{\partial H}{\partial u}\big(u^*(t)\big) = 0$.

От това условие, след съкращаване на израза $e^{-\rho t}$ получаваме, че:

$$\text{(I)}\quad \boxed{-\frac{\partial f}{\partial u}\big(u\big) + \frac{\pi\,\beta}{\rho+\delta}\,\frac{\partial g}{\partial u}\big(u,v\big) = 0}.$$

Тъй като от (10) имаме, че функцията $\Big(\pi\,\beta\,G - f\big(u\big)\Big) + \dfrac{\pi\,\beta}{\rho+\delta}\,\big(-\delta\,G + g\big(u,v(t)\big)\big)$ е строго вдлъбната по u, то необходимото условие от по-горе за екстремум е и достатъчно. Следователно уравнението (I) има единствено решение и това решение е търсеното оптимално управление. $\square$

Лема 2.7:

Нека $\big(G_u(\cdot),u(\cdot)\big)$ е оптимален процес на **Обобщена задача 1** и нека $G_u(t_1) < 0$ за някой времеви момент $t_1 > 0$. Нека $\tau_1 := \inf S_1 = \inf\{\tau : G_u(s) < 0,\ \text{когато}\ \tau \in [\tau,t_1]\}$. Тогава оптималното управление на **Задача 1** е решение на уравнението $-\dfrac{\partial f}{\partial u}\big(u\big) + \dfrac{\pi\,\beta}{\rho+\delta}\Big(1 - e^{(\rho+\delta)(t-\tau_1)}\Big)\dfrac{\partial g}{\partial u}\big(u,v\big) = 0.$

Доказателство:

Нека разгледаме **Обобщена задача 3** без фазовото ограничение $G_u(T) \geq 0$.

Тази задача ще наричаме **Обобщена задача 3 с облекчено условие**.

Следвайки **Теорема 5.3** хамилтонианът на тази задача с облекчено условие е:

$$H(G,u,v,p_0,p,t) := p_0\, e^{-\rho\, t}\Big(\pi\,\beta\, G - f\big(u\big)\Big) + p\Big(-\delta\, G + g\big(u,v\big)\Big)$$

1 случай.

Нека $p_0 = 0$.

В този случай разглежданият хамилтониан приема вида:

$$H(G,u,v,0,p,t) = p\Big(-\delta\, G + \gamma\, u - \xi\Big)$$

От Принцип за Максимума на Понтрягин и условието за трансферзалност получаваме следната задача на Коши:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{p}(t) = \delta\, p(t) \\ \\ p(T) = 0 \end{array}\right.$$

Нейното решение е $p(t) = e^{\int_T^t \delta\, ds}\, p(T) = 0$, но това противоречи с Принцип за максимума!

2 случай.

Нека $p_0 = 1$.

В този случай разглежданият хамилтониан приема вида:

$$H(G,u,v,1,p,t) = e^{-\rho\, t}\Big(\pi\,\beta\, G - f\big(u\big)\Big) + p\Big(-\delta\, G + g\big(u,v\big)\Big)$$

Пак от Принцип за Максимума на Понтрягин и условието за трансферзалност получаваме следната задача на Коши:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{p}(t) = -e^{-\rho\, t}\,\pi\,\beta + \delta\, p(t) \\ \\ p(T) = 0 \end{array}\right.$$

Нейното решение записано в явен вид е:

$$p(t) = e^{\displaystyle\int_T^t \delta\, ds} p(T) + \int_T^t e^{\displaystyle\int_s^t \delta\, d\sigma} \Big(-\pi\,\beta\, e^{-\rho\, s} \Big)\, ds = -\pi\,\beta \int_T^t e^{\delta\,(t-s)}\, e^{-\rho\, s}\, ds =$$

$$= \frac{\pi\,\beta}{\rho+\delta}\, e^{\delta\, t} \Big(e^{-(\rho+\delta)\, t} - e^{-(\rho+\delta)\, T} \Big) = \frac{\pi\,\beta}{\rho+\delta}\, e^{-\rho\, t} \Big(1 - e^{(\rho+\delta)(t-T)} \Big)$$

$$\rightarrow \boxed{p(t) = \frac{\pi\,\beta}{\rho+\delta}\, e^{-\rho\, t} \Big(1 - e^{(\rho+\delta)(t-T)} \Big)}$$

От Принцип за Максимума на Понтрягин доказан в **Теорема 5.3** имаме, че:

- $H\big(G_{u^*}(t), u^*(t), v, 1, p(t), t\big) = \max\limits_{u \in [0, u_{max}]} H\big(G_{u^*}(t), u(t), v, 1, p(t), t\big)$
- $H\big(G_{u^*}(T^*), u^*(T^*), v(T^*), 1, p(T^*), T^*\big) = 0$, където T^* е оптималния времеви

  момент на **Обобщена задача 3** .

Тъй като от (10) функцията $\Big(\pi\,\beta\, G - f\big(u\big)\Big) + \dfrac{\pi\,\beta}{\rho+\delta}\Big(1 - e^{(\rho+\delta)(t-T)}\Big)\big(-\delta\, G + g\big(u, v(t)\big)\big)$ е строго вдлъбната по u, то тогава търсеното оптимално управление е решение на уравнението: $-\dfrac{\partial f}{\partial u}\big(u\big) + \dfrac{\pi\,\beta}{\rho+\delta}\Big(1 - e^{(\rho+\delta)(t-T)}\Big)\dfrac{\partial g}{\partial u}\big(u, v\big) = 0.$ $\square$

3 Задача с един производител

Настоящият раздел разглежда задача (1)÷(2), задача (15)÷(16) и задача (17)÷(18).

В **Лема 3.1** е доказано съществуването на оптимален процес за задача (1)÷(2).

Лема 3.2 и **Лема 3.4** характеризират вида на оптималната траектория на задача (1)÷(2).

В **Лема 3.3** е намерен явният вид на оптималното управление на задача (15)÷(16).

Лема 3.3 и **Лема 3.4** изясняват вярността на твърдението, че ако в даден времеви момент оптимална траектория за задача (1)÷(2) приеме нулева стойност, то впоследствие тя ще приеме отрицателна стойност.

Лема 3.5 и **Лема 3.6** дават връзка между задача (1)÷(2) и задача (17)÷(18).

В **Лема 3.7** е намерен явният вид на оптималното управление на задача (17)÷(18) и е посочено уравнение за намиране на оптималния момент за напускане на пазара.

Посочен е двустъпков алгоритъм за намиране на решението на **Задача 1** .

В зависимост от стойността на параметрите в **Задача 1** , **твърдения 1 - 3** дават пълна характеризация на въпроса, дали фирмата остава завинаги на пазара или излиза от пазара в оптималния за това времеви момент.

В **Програма за визуализация** е представен програмният код на програма написана на Wolfram Mathematica, визуализиращ оптималните траектории на **Задача 1** и са разгледани три примера към нея.

Лема 3.1:

Съществува оптимален процес на **Задача 1** .

Доказателство:

Доказателството следва непосредствено от **Лема 2.1** замествайки:

$$f(u) = \frac{\kappa}{2} u^2 \text{ и } g(u,v) = \gamma\, u - \xi.$$

$\square$

Лема 3.2:

Нека $\big(G_u(\cdot), u(\cdot)\big)$ е допустим процес на **Задача 1** .

Нека $\tau, \nu > 0$ са такива времеви моменти, че:

$$\left|\begin{array}{l} G_u(t) > 0, \text{ ако } t \in [0, \tau) \\ \\ G_u(\tau) = G_u(\tau + \nu) = 0 \\ \\ G_u(t) < 0, \text{ ако } t \in (\tau, \tau + \nu) \end{array}\right.$$

(Фигура №2)

Тогава $(G_u(\cdot), u(\cdot))$ не е оптимално управление за **Задача 1** .

Доказателство:

Подробно доказателство на тази лема може да бъде открито в Лема 1 от [3].

Доказателството на лемата следва директно и от **Лема 2.2** замествайки:

$$f(u) = \frac{\kappa}{2}\, u^2 \text{ и } g(u, v) = \gamma\, u - \xi.$$

$\square$

Лема 3.3:

Оптималното управление за **Задача 2** е $u^*(\cdot)$, където:

$$u^*(t)=\begin{cases}\dfrac{\gamma\,\pi\,\beta}{\kappa(\delta+\rho)}, & \text{ако } \dfrac{\gamma\,\pi\,\beta}{\kappa(\delta+\rho)}\le u_{max}\\ \\ u_{max}, & \text{ако } u_{max}<\dfrac{\gamma\,\pi\,\beta}{\kappa(\delta+\rho)}\end{cases}\quad \text{за всяко } t\in[0,+\infty).$$

Доказателство:

За доказателството на тази Лема ще използваме **Теорема 5.2** от раздел 4. Необходимите за нея условия (A1) и (A2) са изпълнени съответно с функциите $\gamma(t)=\varepsilon>0$ и $\varphi(t)=\delta+\pi\,\beta\,e^{-\rho\,t}$ за (A1) и $\lambda(t)=\pi\,\beta\,e^{-(\rho+\delta)\,t}$ за (A2).

Прилагаме тази теорема за намирането на явния вид на спрегнатата променлива $\psi(t)$:

$$\psi(t)=e^{\delta\,t}\int_t^{+\infty}e^{-\delta\,s}\,\pi\,\beta\,e^{-\rho\,s}\,ds=\pi\,\beta\,e^{\delta\,t}\int_t^{+\infty}e^{-(\delta+\rho)\,s}\,ds=\pi\,\beta\lim_{A\to+\infty}\int_t^{A}e^{-(\delta+\rho)\,s}\,ds=$$

$$=-\frac{\pi\,\beta}{\delta+\rho}\,e^{\delta\,t}\lim_{A\to+\infty}\Big(e^{-(\delta+\rho)\,A}-e^{-(\delta+\rho)}\Big)=\frac{\pi\,\beta}{\delta+\rho}\,e^{\delta\,t}\,e^{-(\delta+\rho)\,t}=\frac{\pi\,\beta}{\delta+\rho}\,e^{-\rho\,t}$$

$$\to\boxed{e^{\rho\,t}\,\psi(t)=\frac{\pi\,\beta}{\delta+\rho}}$$

Хамилтонианът на **Задача 2** е $H(G,u,\psi,t):=e^{-\rho\,t}\Big(\pi\,\beta\,G-\dfrac{\kappa}{2}\,u^2\Big)+\psi\Big(-\delta\,G+\gamma\,u-\xi\Big)$.

Нека пресметнем производните от първи и втори ред само по u на хамилтониана $H(G,u,\psi,t)$ по втората му променлива u:

$$\frac{\partial H}{\partial u}\big(G,u,\psi,t\big)=-\kappa\,e^{-\rho\,t}\,u+\psi\,\gamma;\quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\big(G,u,\psi,t\big)=-\kappa\,e^{-\rho\,t}<0.$$

Тъй като $\dfrac{\partial^2 H}{\partial u^2}\big(G,u,\psi,t\big)<0$, то $H(G,u,\psi,t)$ е строго вдлъбната функция на втората си променлива u, когато останалите променливи са фиксирани. Следователно $H(G,u,\psi,t)$ има единствен максимум по променлива u, когато останалите променливи са фиксирани.

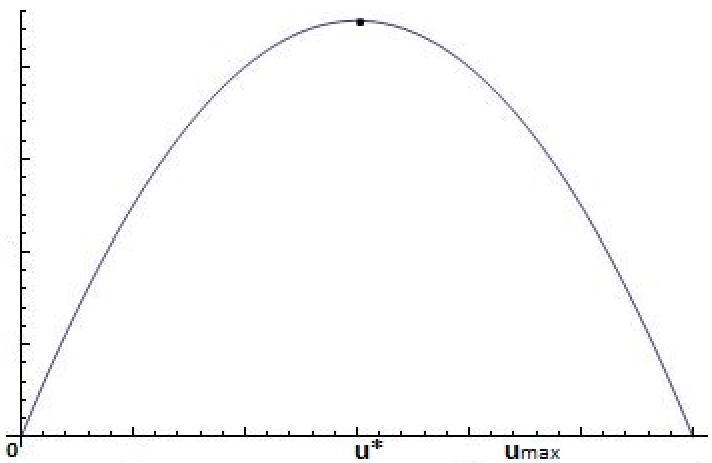
От Принцип за Максимума на Понтрягин доказан в **Теорема 5.2** имаме, че:

$H(G^*, u^*, \psi, t) = \underset{u \in [0, u_{max}]}{max} H(G^*, u, \psi, t).$

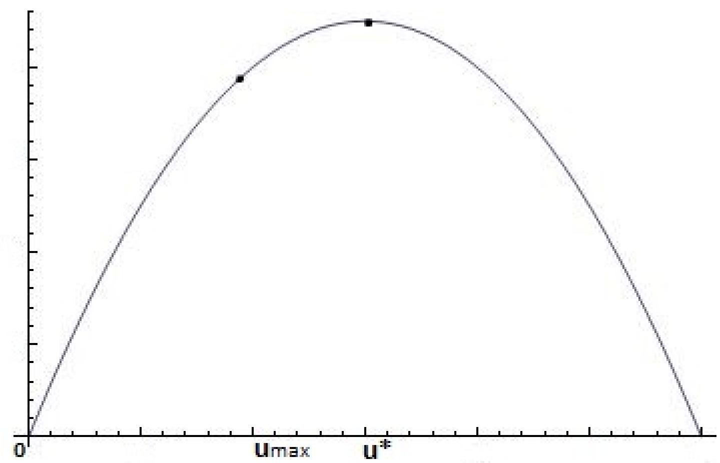
Тъй като максимумът на $H(G, u, \psi, t)$ е единствен, то необходимото условие за екстремум $\dfrac{\partial H}{\partial u}\big(G, u^*, \phi, t\big) = 0$ е и достатъчно.

Следователно $u^*(t) = \dfrac{\gamma}{\kappa}\, e^{\rho\, t}\, \psi(t) = \dfrac{\gamma\, \pi\, \beta}{\kappa(\delta + \rho)} := u^*$ за всяко $t \in [0, +\infty)$.

Фигура №3



Фигура №4



Тъй като Хамилтонианът $H\big(G^*, u, \psi, t\big)$ е квадратна функция с отрицателен старши коефициент по променлива u т.е. графиката ѝ е парабола, то максималната ѝ стойност ще се достига или във върха на тази параболата, ако стойността на u^* принадлежи на интервала $[0, u_{\max}]$ $\big($**Фигура №3**$\big)$ или в $u_{\max}$, ако имаме,че стойноста на u^* е по - голяма от тази на $u_{\max}$ $\big($**Фигура №4**$\big)$.

Следователно константното управлението $u^*(.)$, където: $u^*(t) = \begin{cases} \dfrac{\gamma\, \pi\, \beta}{\kappa(\delta + \rho)}, & \text{ако } \dfrac{\gamma\, \pi\, \beta}{\kappa(\delta + \rho)} \leq u_{max} \\ \\ u_{max}, & \text{ако } \dfrac{\gamma\, \pi\, \beta}{\kappa(\delta + \rho)} < u_{max} \end{cases}$

за всяко $t \in [0, +\infty)$

е оптимално за **Задача 2** . $\square$

Лема 3.4:

Нека $\big(G_{u^*}(.), u^*(.)\big)$ е оптимален процес на **Задача 1** ,

за който $G_{u^*}(t) \geq 0$ за всяко $t \in [0, +\infty)$. Тогава $G_{u^*}(t) > 0$ за всяко $t \in [0, +\infty)$.

Доказателство:

Тъй като $max\{G_{u^*}(t), 0\} = G_{u^*}(t)$, за всяко $t \in [0, +\infty)$, то траекторията $G_{u^*}(t)$ ще принадлежи

към множеството от оптимални траектории на **Задача 2** . Но от **Лема 3.3** знаем, че

оптимално управление на **Задача 2** е константата: $u^* = \begin{cases} \dfrac{\gamma\,\pi\,\beta}{\kappa(\delta+\rho)}, & \text{ако } \dfrac{\gamma\,\pi\,\beta}{\kappa(\delta+\rho)} \leq u_{max} \\ \\ u_{max}, & \text{ако } u_{max} < \dfrac{\gamma\,\pi\,\beta}{\kappa(\delta+\rho)} \end{cases}.$

Тъй като уравнение на динамиката на **Задача 2** е автономно и линейно по G, то ще има единствена равновесна точка. Означаваме с $\hat{G}$ нейната стойност.

Имаме че:

$-\delta\,\hat{G} + \gamma\,u^* - \xi = 0 \rightarrow \boxed{\hat{G} := \dfrac{\gamma\,u^* - \xi}{\delta}}$

От **(ФНК$_3$)** от раздел 4 имаме, че:

$$G_{u^*}(t) = e^{-\delta\,t}\,G_0 + \int_0^t e^{\delta(s-t)}\left(\gamma\,u^* - \xi\right)ds = e^{-\delta\,t}\,G_0 + \frac{\gamma\,u^* - \xi}{\delta}\left(1 - e^{-\delta\,t}\right) = \hat{G} + \left(G_0 - \hat{G}\right)e^{-\delta\,t}.$$

Като диференцираме $G_{u^*}(\cdot)$ по t получаваме:

$\dot{G}_{u^*}(t) = \delta\left(\hat{G} - G_0\right)e^{-\delta\,t}$. Знакът на $\dot{G}_{u^*}(t)$ е постоянен и зависи от стойността на $\hat{G} - G_0$. След граничен преход $t \rightarrow +\infty$ получаваме:

$\lim\limits_{t\rightarrow+\infty} G_{u^*}(t) = \hat{G}.$

Следователно $G_{u^*}(t)$ е монотонна траектория (дали е монотонно растяща или намаляваща зависи от знака на $\hat{G} - G_0$) започващата в $G^*(0) = G_0 > 0$ (по условие) и клоняща, когато времето t клони към положителна безкрайност, към числото $\hat{G}$.

Ако $\hat{G} \geq 0$, то $G_{u^*}(t) > 0$ за всяко $t \in [0, +\infty)$.

Ако $\hat{G} < 0$, то в някой времеви момент $t' > 0$ траекторията $G_{u^*}(\cdot)$ ще пресече абцисната ос $(G_{u^*}(t') = 0)$ и за всеки следващ времеви момент тя ще е с отрицателна стойност, т.е. $G_{u^*}(t) < 0$ за $t \in (t', +\infty)$.

Ако допуснем, че съществува времеви момент $\tau > 0$ такъв, че $G_{u^*}(\tau) = 0$, то от разсъжденията по - горе би следвало, че за някой следващ времеви момент $\tau' > \tau$ ще имаме, че $G_{u^*}(\tau') < 0$, което противоречи с допускането.

Следователно $G_{u^*}(t) > 0$ за всяко $t \in [0, +\infty)$. $\square$

Лема №3.5:

Нека $\big(G_u(\cdot), u(\cdot)\big)$ е оптимален процес на **Задача 1** , за който съществува времеви момент $t_1 > 0$, такъв че $G_u(t_1) < 0$.

Тогава съществува оптимален процес за **Задача 3** .

Доказателство:

Доказателството на тази лема следва непосредствено от доказателството на **Лема 2.4**. $\square$

Лема №3.6:

Нека $\big(G_u(\cdot), u(\cdot), \tau\big)$ е оптимална процес на **Задача 3** .

Тогава $\big(G_{\bar{u}_\tau}(\cdot), \bar{u}_\tau(\cdot)\big)$ е оптимален процес на **Задача 1** и $G_{\bar{u}_\tau}(\tau) = 0$, където:

$$\bar{u}_\tau(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0, \tau) \\ \\ 0, & t \in [\tau, +\infty) \end{cases} .$$

Доказателство:

Докзателството на тази Лема следва непосредствено от доказателството на **Лема 2.5**. $\square$

Лема №3.7:

Нека $\big(G_u(\cdot), u(\cdot)\big)$ е оптимален процес за **Задача 1** и нека $G_u(t_1) < 0$, за някой

времеви момент $t_1 > 0$. Нека $\tau_1 = \inf\ S_1 = \inf\{\tau : G_u(s) < 0$ когато $s \in [\tau, t_1]\}$.

Тогава $u(t) = u^*\Big[1 - e^{(\delta+\rho)(t-\tau_1)}\Big]^+$, където $u^* := \dfrac{\gamma\,\pi\,\beta}{\kappa(\delta+\rho)}$

и времевият момент τ_1 е решение на уравнението:

$G_0 - \hat{G} + (\hat{G} - \underset{v}{G})e^{\delta\,\tau_1} + \underset{v}{G}\,e^{-(\delta+\rho)\,\tau_1} = 0$, където:

$\hat{G} := \dfrac{\gamma\,u^* - \xi}{\delta} \quad \underset{v}{G} := \dfrac{\gamma\,u^*}{2\delta+\rho}$

Доказателство:

Нека разгледаме **Задача 3** без фазовото ограничение $G(T) \geq 0$.

Тази задача ще наричаме **Задача 3 с облекчено условие**.

Нейният хамилтониан е $H(G,u,p_0,p,t) := p_0\,e^{-\rho\,t}\Big(\pi\,\beta\,G - \frac{\kappa}{2}\,u^2\Big) + p\Big(-\delta\,G + \gamma\,u - \xi\Big)$

Нека разгледаме два случая:

1 случай.

Нека $p_0 = 0$.

В този случай видът на хамилтониана е $H(G,u,0,p,t) = p\Big(-\delta\,G + \gamma\,u - \xi\Big)$.

От Принцип за Максимума на Понтрягин и условието за трансферзалност получаваме следната задача на Коши:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{p}(t) = \delta\,p(t) \\ \\ p(T) = 0 \end{array}\right.$$

Нейното решение е $p(t) = e^{\delta(t-T)}\, p(T) = 0$, но това е в противоречи с Принцип за максимума!

2 случай.

Нека $p_0 = 1$.

В този случай видът на хамилтониана е $H(G,u,1,p,t) = e^{-\rho\, t}\left(\pi\,\beta\, G - \frac{\kappa}{2}\, u^2\right) + p\left(-\,\delta\, G + \gamma\, u - \xi\right)$

Имаме, че:

$\frac{\partial H}{\partial u} = -e^{-\rho\, t}\,\kappa\, u + \gamma\, p$ и $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -e^{-\rho\, t}\,\kappa < 0$ за всяко $t \in [0, T]$.

Следователно при фиксирани G и p хамилтонианът $H(G,u,1,p,t)$ е строго вдлъбната функция по втората си променлива u.

Пак от Принцип за Максимума на Понтрягин и условието за трансферзалност получаваме следната задача на Коши:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{p}(t) = -e^{-\rho\, t}\,\pi\,\beta + \delta\, p(t) \\ \\ p(T) = 0 \end{array}\right.$$

Нейното решение е $p(t) = e^{\int_T^t \delta\, ds}\, p(T) + \int_T^t e^{\int_s^t \delta\, d\sigma}\left(-\,\pi\,\beta\, e^{-\rho\, s}\right) ds = -\pi\,\beta \int_T^t e^{\delta\,(t-s)}\, e^{-\rho\, s}\, ds =$

$$= \frac{\pi\,\beta}{\rho+\delta}\, e^{\delta\, t}\left(e^{-(\rho+\delta)\, t} - e^{-(\rho+\delta)\, T}\right) = \frac{\pi\,\beta}{\rho+\delta}\, e^{-\rho\, t}\left(1 - e^{(\rho+\delta)(t-T)}\right)$$

$$\boxed{p(t) = \frac{\pi\,\beta}{\rho+\delta}\, e^{-\rho\, t}\left(1 - e^{(\rho+\delta)(t-T)}\right)}$$

От принцип за Максимума имаме, че:

$$H(G^*, u^*, 1, p(t), t) = \max_{u\in[0,u_{max}]} H(G^*, u, 1, p(t), t) = \max_{u\in[0,u_{max}]}\left(e^{-\rho\, t}\,\pi\,\beta\, G^* - \frac{\kappa}{2}\, e^{-\rho\, t} u^2 + p(t)\,\gamma\, u - \delta\, p(t) G^*\right)$$

Искаме да максимизираме по u квадратната функция $-\frac{\kappa}{2}\, e^{-\rho\, t} u^2 + p(t)\,\gamma\, u$ на променива u.

Следователно $u^*(t) = \frac{\gamma}{\kappa}\, e^{\rho\, t}\, p(t) = \frac{\gamma\,\pi\,\beta}{\kappa(\rho+\delta)}\left(1 - e^{(\rho+\delta)(t-T)}\right) = u^*\left(1 - e^{(\rho+\delta)(t-T)}\right)$.

Да забележим,че $u^*(T) = 0$.

Пак от принцип за Максимума на Понтрягин имаме, че $H\big(G_{u^*}(T)\big), u^*(T), 1, p(T), T) = 0$.

Следователно $e^{-\rho T}\bigg(\pi\,\beta\, G_{u^*}(T) - \frac{\kappa}{2}\, u^*(T)^2\bigg) + p(T)\bigg(-\delta\, G_{u^*}(T) + \gamma\, u(T) - \xi\bigg) = 0.$

От това следва,че $G_{u^*}(T) = 0$

Получихме за оптималната траектория на **Задача 3** с облекчено условие, че приема нулева стойност в крайния, оптимален момент. Следователно тази траектория е допустима и съответно оптимална и за **Задача 3** . Но от **Лема3.5)** ще имаме, че съответно $\bar{u}^*_T(t)$ ще е оптимално управление за **Задача 1** , където:

$$\bar{u}^*_T(t) = \begin{cases} u^*(t), & t \in [0, T) \\ \\ 0, & t \in [T, +\infty) \end{cases}.$$

По - компактен запис е $\bar{u}^*_T(t) = u^*\bigg[1 - e^{(\rho+\delta)(t-T)}\bigg]^+$, тъй като за $t \geq T$ ще имаме, че $\bar{u}^*_T(t) = 0$

Понеже $G_{\bar{u}^*_T}(T) = 0$, а от самата дефниция на τ_1 имаме, че $G_{\bar{u}^*_T}(\tau_1) = 0$, то $\tau_1 = T$.

Следователно $u^*(t) = u^*\bigg[1 - e^{(\rho+\delta)(t-\tau_1)}\bigg]^+$.

Нека пресметнем оптималната траектория $G_{\bar{u}^*_T}(t)$ в явен вид:

$$G_{\bar{u}^*_T}(t) = e^{-\delta\, t}\bigg(G_0 + \int_0^t e^{\delta\, s}(\gamma\, \bar{u}^*_T(s) - \xi)\, ds\bigg) = e^{-\delta\, t}\bigg(G_0 + \int_0^t e^{\delta\, s}(\gamma\, u^*(1 - e^{(\delta+\rho)(s-T)}) - \xi)\, ds\bigg) =$$

$$= e^{-\delta\, t}\bigg(G_0 + \frac{\gamma\, u^* - \xi}{\delta}(e^{\delta\, t} - 1) - \gamma\, u^*\, e^{-(\delta+\rho)T}\int_0^t e^{(2\delta+\rho)\, s}\, ds\bigg) =$$

$$= e^{-\delta\, t}\bigg(G_0 + \hat{G}(e^{\delta\, t} - 1) - \underset{v}{G}(e^{(\delta+\rho)(t-T)}\, e^{\delta\, t} - e^{-(\delta+\rho)\, T})\bigg)$$

Искаме $G\big(\tau_1, u(\tau_1)\big) = G\big(T, u(T)\big) = 0$, от което следва, че $G_0 + \hat{G}(e^{\delta\, T} - 1) - \underset{v}{G}(e^{\delta\, T} - e^{-(\delta+\rho)\, T}) = 0$

Решение на полученото уравнение би бил оптимален момент за напускане на пазара:

(I) $\boxed{G_0 - \hat{G} + (\hat{G} - \underset{v}{G})e^{\delta\, \tau_1} + \underset{v}{G}\, e^{-(\delta+\rho)\, \tau_1} = 0}$

□

Лема №3.8:

Нека $u(t) = u^*\left(1 - e^{(\delta+\rho)(t-\tau_1)}\right)$ е оптимално управление за **Задача 1** и $\xi < \gamma\, u^*$, тогава постоянното управление u^* не е оптимално.

Доказателство:

Подробно доказателство на тази лема може да се намери в Лема 3 от [3]. $\square$

Алгоритъм за решаване на задача (1)÷(2):

1) Решаваме **Задача 3** .

1.1) Ако тя НЯМА решение,то оптималната траектория е с неотрицателни стойности и оптималното управление е u^*.

1.2) Ако тя ИМА решение, то оптимален процес е съответно $\big(G_{\bar{u}_\tau}(\cdot), \bar{u}_\tau(\cdot)\big)$.

Забележка: При конкретни стойности на параметрите на (I) може да има две решения. В този случай имаме два кандидата за оптимален процес. Оптимален е този с по - голяма стойност на критерия.

Следвайки [3] Твърдения 1,2,3 са аналогични на Теореми 1,2,3 от [3].

Твърдение 1:

Ако $\xi > \gamma\, u^* \dfrac{\delta+\rho}{2\,\delta+\rho}$, то уравнение (I) има единствено решение τ^* и съответното управление $\bar{u}^*_{\tau^*} = u^*\left(1 - e^{(\delta+\rho)(t-\tau^*)}\right)$ е оптимално за задача (1)÷(2).

Доказателство:

Дефинираме $\varphi(T) := G_0 - \hat{G} + (\hat{G} - \underset{v}{G})e^{\delta\, T} + \underset{v}{G}\, e^{-(\delta+\rho)T}$.

Очевидна е тавтологията $\varphi(T) = 0 \Leftrightarrow T$ е решение на (I).

Имаме, че $\dot{\varphi}(T) = \delta\,(\hat{G} - \underset{v}{G})\, e^{\delta\, T} - (\delta+\rho)\,\underset{v}{G}\, e^{-(\delta+\rho)\,T}$.

Ако $\hat{G} - \underset{v}{G} < 0$, то $\dot{\varphi}(T) < 0$ и $\lim\limits_{T \to +\infty} \varphi(T) = -\infty$.

Тъй като $\varphi(0) = G_0 > 0$ и $\varphi()$ е монотонно намаляваща, то (I) има единствено решение, нека това решение е τ^*.

Да забележим, че $\hat{G} - \underset{v}{G} < 0 \Leftrightarrow \xi > \gamma\, u^* \dfrac{\delta + \rho}{2\,\delta + \rho}$ (Което бе поискано по условие).

Следователно $\bar{u}^*_{\tau^*}(\cdot)$ е оптимално управление за задача (1)÷(2).

$\square$

Бележка:

Възможно е $\hat{G} > 0$, докато $\hat{G} - \underset{v}{G} < 0$.

Това би означавало, че постоянното управление u^* ще запази фирмата завинаги на пазара, но тя би спечели повече ако напусна пазара в оптималния за това времеви момент.

Нека $\xi = \varepsilon\, \gamma\, u^*$, където $0 < \varepsilon < 1$.

$$\to \hat{G} - \underset{v}{G} = \left(\frac{\gamma\, u^* - \xi}{\delta} - \frac{\gamma\, u^*}{2\delta + \rho} \right) = \gamma\, u^* \left(\frac{1 - \varepsilon}{\delta} - \frac{1}{2\delta + \rho} \right) = \frac{\gamma\, u^*}{\delta} \left(1 - \varepsilon - \frac{\delta}{2\delta + \rho} \right) =$$

$= \dfrac{\gamma\, u^*}{\delta} \left(\dfrac{\delta + \rho}{2\,\delta + \rho} - \varepsilon \right) < 0$, което може да направим отрицателно за стойност на ε такава, че :

$$\frac{\delta + \rho}{2\,\delta + \rho} < \varepsilon < 1$$

Твърдение 2:

Ако $\xi = \gamma\, u^* \dfrac{\delta + \rho}{2\,\delta + \rho}$, то уравнение (I) има единствено решение т.с.т.к.$G_0 < \underset{v}{G}$. Ако $G_0 \geq \underset{v}{G}$, то уравнение (I) няма решение и управлението $u^*(\cdot)$, такова че $u^*(t) = u^*$ за всяко $t \in [0, +\infty)$ е оптимално за задача (1)÷(2).

Доказателство:

Ако $\xi = \gamma\, u^* \frac{\delta+\rho}{2\,\delta+\rho}$, то $\varphi(T) = G_0 - \hat{G} + \underset{v}{G} e^{-(\delta+\rho)T}$.

Следователно:

$\varphi(T) = G_0 + (\underset{v}{G} - \hat{G}) = G_0$ и $\dot{\varphi}(T) = -G_0(\delta + \rho)\, e^{-(\delta+\rho)T} < 0$.

От това следва, че $\varphi(T)$ е монотонно намаляваща.

Но имаме, че $\lim\limits_{T\to+\infty}\varphi(T) = G_0 - \hat{G}$.

Следователно:

Ако $\hat{G} - \underset{v}{G} = 0$ и $G_0 < \hat{G}$, то (I) има решение.

Ако $\hat{G} - \underset{v}{G} = 0$ и $G_0 \geq \hat{G}$, то (I) няма решение.

Твърдение 3:

Ако $\xi < \gamma\, u^* \frac{\delta+\rho}{2\,\delta+\rho}$, то е възможно (I) да няма решение, да има единствено решение или да има точно две решения.

Доказателство:

$$\varphi(T) = G_0 - \hat{G} + \left(\hat{G} - \underset{v}{G}\right) e^{\delta\, T} + \underset{v}{G}\, e^{-(\delta+\rho)\, T}$$

$$\dot{\varphi}(T) = \delta\left(\hat{G} - \underset{v}{G}\right) e^{\delta\, T} - (\delta+\rho)\, \underset{v}{G}\, e^{-(\delta+\rho)\, T}$$

$$\ddot{\varphi}(T) = \delta^2\left(\hat{G} - \underset{v}{G}\right) e^{\delta\, T} + (\delta+\rho)^2\, \underset{v}{G}\, e^{-(\delta+\rho)\, T} > 0$$

$\ddot{\varphi}(T) > 0 \to \varphi(T)$ е строго вдлъбната функция на времето T.

Следователно съществува единствен времеви момент $T_{min} > 0$, такова че

$\underset{T\in[0,+\infty)}{min}\, \varphi(T) = \varphi(T_{min})$, а то ще е решението на уравнението $\dot{\varphi}(T) = 0$

Следователно $\delta\left(\hat{G} - \underset{v}{G}\right) e^{\delta\, T_{min}} = (\delta+\rho)\, \underset{v}{G}\, e^{-(\delta+\rho)\, T_{min}}$

$$e^{-(2\delta+\rho)\, T_{min}} = \frac{\delta}{\delta+\rho}\, \frac{\hat{G} - \underset{v}{G}}{\underset{v}{G}}$$

$$T_{min} = -\frac{1}{2\delta+\rho}\, \ln\left(\frac{\delta}{\delta+\rho}\Big(\frac{\hat{G}}{\underset{v}{G}} - 1\Big)\right) = -\frac{1}{2\delta+\rho}\, \ln\left(1 - \frac{2\delta+\rho}{\delta+\rho}\, \frac{\xi}{\gamma\, u^*}\right)$$

$$\varphi(T_{min}) = G_0 - \hat{G} + \frac{\gamma\, u^*}{\delta}\left(1 - \frac{2\delta+\rho}{\delta+\rho}\, \frac{\xi}{\gamma\, u^*}\right)^{\frac{\delta+\rho}{2\delta+\rho}}.$$

Следователно ако $\varphi(T_{min}) > 0$, то (I) няма решение. Ако $\varphi(T_{min}) = 0$, то (I) има единствени решение и ако $\varphi(T_{min}) < 0$, то (I) има точно две решения. $\square$

Програма за визуализация

По - надолу е представена програма, реализирана на Wolfram Mathematica, която при подадени стойности на всички параметри от модела на **Задача 1** като входни данни, връща отговор дали уравнението за оптималния момента за напускане на пазара има решение, стойността на оптималното управление, стойността на критерия и графика на оптималната траектория за **Задача 1** . Дадени и са три конкретни примера.

Програма:

```
GetProfitValue[π0_, β_, κ_, ρ_, δ_, γ_, ξ_, G0_] := (

  u* = γ π0 β / (κ (δ + ρ));
  Ĝ = (γ u* - ξ) / δ;
  G_ = γ u* / (2 δ + ρ);
  exitTimeSolution = T /.NSolve[G0 - Ĝ + (Ĝ - G_) e^(δ T) + G_ / e^((δ+ρ) T) == 0, T, Reals];
  Ginf[t_] := Ĝ + (G0 - Ĝ) / e^(δ t);
  Gexit[t_, T_] := Ĝ + (G0 - Ĝ) / e^(δ t) - G_ (e^((δ+ρ) (t-T)) - 1 / (e^((δ+ρ) T) e^(δ t)));
  u_inf = γ π0 β / (κ (δ + ρ));
  If[Length[exitTimeSolution] == 0, Print["Уравнението за намиране на оптималния момент
за напускане на пазара няма решение!"];
   Print[""];
   Print["Стойността на оптималното управление за Задача 1 е константата u*=", u*];
   Print[""];
   Print["Оптималната стойност на  критерия на Задача 1 е M(G_u*(.),u*(.))=",
    ∫_0^∞ (π0 β Ginf[t] - κ u_inf^2 / 2) / e^(ρ t) dt];
   Print[""];
   If[G0 < Ĝ, Plot[{Ĝ, Ginf[t]}, {t, 0, 3}, PlotRange → {G0 - 1, Ĝ}, PlotStyle → {Thick}],
    Plot[{Ĝ, Ginf[t]}, {t, 0, 3}, PlotRange → {Ĝ - 1, G0}, PlotStyle → {Thick}]],
   If[Length[exitTimeSolution] == 1, Texit = exitTimeSolution[[1]]; uexit[t_] :=
     Expand[u* (1 - e^Expand[(δ+ρ) (t-Texit)])];
    Print["Уравнението за намиране на оптималния момент за напускане на пазара има
```

```
единствено решение!"];
    Print[""];
    Print["Оптималният момент за напускане на пазара е T_exit)=",
     N[exitTimeSolution[[1]], 20]; Print[""];
    Print["Стойността на оптималното управление за Задача 1 е функцията u*(t)=",
     uexit[t]]; Print[""];
    Print["Оптималната стойност на критерия на Задача 1 е M((G_u*(.),u*(.))=",
     ∫_0^Texit (π0 β Gexit[t, Texit] - 1/2 κ uexit[t]^2)/e^(ρ t) ⅆt];
    Print[∫_0^∞ (π0 β Ginf[t] - (κ u_inf^2)/2)/e^(ρ t) ⅆt, u_inf];
    Plot[{If[t ≤ Texit, Gexit[t, Texit], 0], Ĝ, Ginf[t]}, {t, 0, 2 Texit}, PlotStyle → {Thick}],
    Print["Уравнението за намиране на оптималния момент за напускане на пазара
    има две решения!"];
    Texit1 = exitTimeSolution[[1]];
    Texit2 = exitTimeSolution[[2]];
    uexits[t_, T_] := Expand[u* (1 - e^Expand[(δ+ρ) (t-T)])];
    value1 = ∫_0^Texit1 (π0 β Gexit[t, Texit1] - 1/2 κ uexits[t, Texit1]^2)/e^(ρ t) ⅆt;
    value2 = ∫_0^Texit2 (π0 β Gexit[t, Texit2] - 1/2 κ uexits[t, Texit2]^2)/e^(ρ t) ⅆt;
    Print[""]; Print["Те са съответно:"];
    Print["T_1=", Texit1, " и T_2=", Texit2];
    Print[""];
    If[value1 > value2, Print["Оптималният момент за напускане на пазара е T_exit=", Texit1];
     Print[""];
     Print["Стойността на оптималното управление за Задача 1 е функцията u*(t)=",

      uexits[t, Texit1]];
     Print[""];
     Print["Оптималната стойност на критерия на Задача 1 е M((G_u*(.),u*(.))=", value1];,
```

```
Print["Оптималният момент за напускане на пазара е Texit=", Texit2];
Print[""];
Print["Стойността на оптималното управление за Задача 1 е функцията u*(t)=",
 uexits[t, Texit2]];
Print[""];
Print["Оптималната стойност на критерия на Задача 1 е M(Gu*(.),u*(.))=", value2];];

Plot[{Gexit[t, Texit1], Gexit[t, Texit2]}, {t, 0, 1.1 Texit2}, PlotStyle → {Thick}]]]
```

Пример 1:

Разглеждаме **Задача 1** в следния вид:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}\left(\left[G_u(t)\right]^{+} - \frac{1}{2}\,u^2(t)\right)dt \underset{u}{\longrightarrow} \max \\ \dot{G}_u(t) = -G_u(t) + 5\,u(t) - 2 \\ G_u(0) = 3 \end{cases}$$

Това означава, че реализираме функцията GetProfitValue[1, 1, 1, 1, 1, 5, 2, 3].

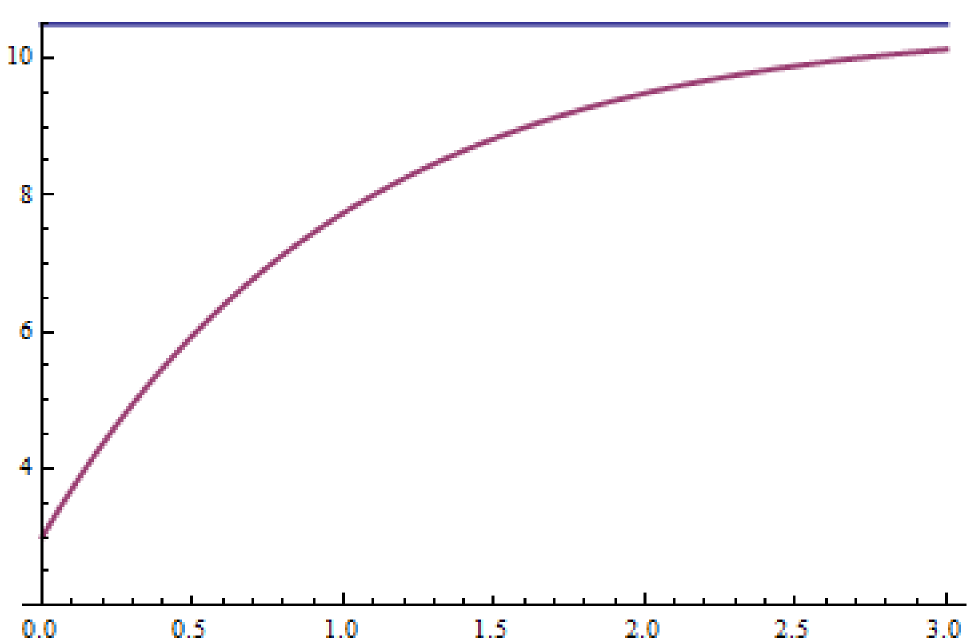
Резултатът от програмата е:

Уравнението за намиране на оптималния момента за напускане на пазара няма решение.

Стойността на оптималното управление за Задача 1 е константата $u^* = 5/2$

Оптималната стойност на критерия на Задача 1 е $\left(G_{u^*}(\cdot), u^*(\cdot)\right) = 29/8$

Графика 1:



Пример 2:

Разглеждаме **Задача 1** в следния вид:

$$\left|\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}\left(\left[G_u(t)\right]^+ - \frac{1}{2}\,u^2(t)\right)dt \underset{u}{\longrightarrow} \max \\ \dot{G}_u(t) = -G_u(t) + 4\,u(t) - 6 \\ G_u(0) = 3 \end{array}\right.$$

Това означава, че реализираме функцията GetProfitValue[1, 1, 1, 1, 1, 4, 6, 3].

Резултатът от програмата е:

Уравнението за намиране на оптималния момент за напускане на пазара има единствено решение.

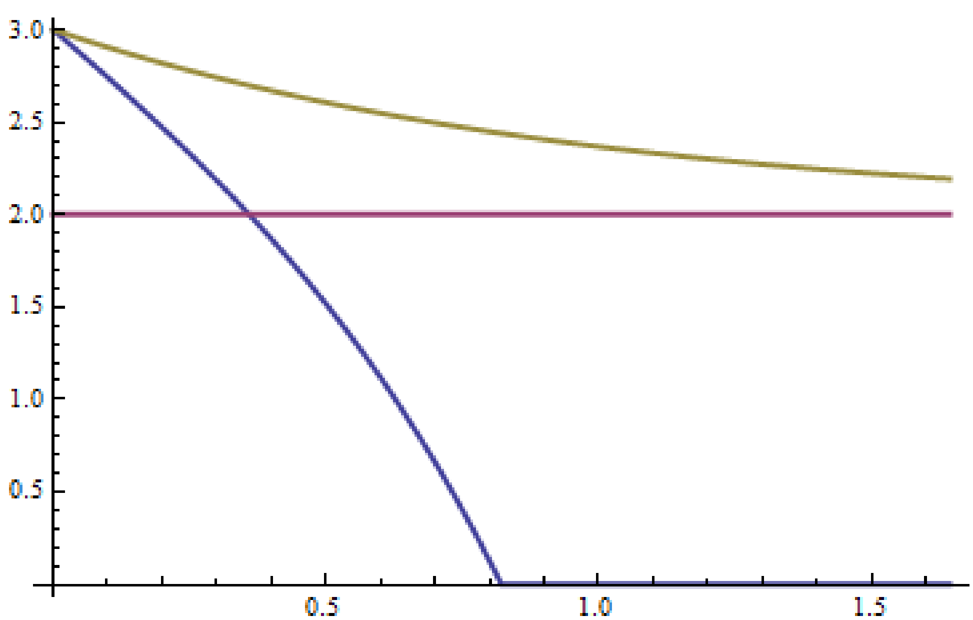
Оптималният момент за напускане на пазара е $T^* = 0.82141820$.

Стойността на оптималното управление за Задача 1 е функцията $u^*(t) = 2 - 2e^{-1.64284+2\,t}$.

Оптималната стойност на критерия на Задача 1 е $\big(G_{u^*}(\cdot), u^*(\cdot)\big) = 0.671546$

За сравнение стойността на критерия на Задача 1 с постоянното управление $u^* = 2$ е 0.5.(Виж бележка от Твърдение 1).

Графика 2:



Пример 3:

Разглеждаме **Задача 1** в следния вид:

$$\left|\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\left(\big[G_u(t)\big]^+ - \frac{1}{2}\,u^2(t)\right)dt \underset{u}{\longrightarrow} \max \\ \dot{G}_u(t) = -G_u(t) + 5\,u(t) - 8 \\ G_u(0) = 3 \end{array}\right.$$

Това означава, че реализираме функцията GetProfitValue[1, 1, 1, 1, 1, 5, 8, 3].

Резултатът от програмата е:

Уравнението за намиране на оптималния момент за напускане на пазара има две решения. Те са съответно $T_1 = 0.916291$ и $T_2 = 1.23823$

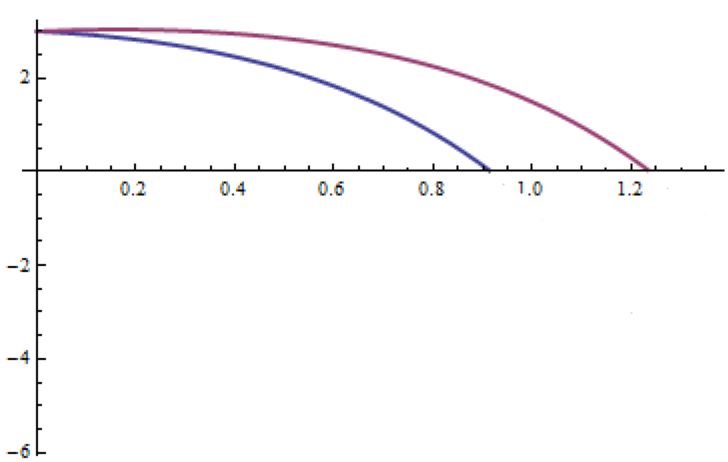
Оптималният момент за напускане на пазара е $T_1 = 0.916291$

Стойността на оптималното управление за Задача 1 е функцията $u^*(t) = 5/2 - 5/2e^{-1.83258+2\,t}$.

Оптималната стойност на критерия на Задача 1 е $\big(G_{u^*}(\cdot), u^*(\cdot)\big) = 0.585$.

За сравнение стойността на критерия на Задача 1 с постоянното управление $u^* = 5/2$ е 0.52.

Графика: 3



В пример 1 Задача 3 няма решение, а Задача 2 има решение(тя винаги има решение). На графика 1 е нарисувана оптималната траектория на Задача 2 и съответно оптимална за Задача 1.

В пример 2 и Задача 3 и Задача 2 имат решение. На графика 2 са нарисуване оптималните траектория на задача 2 в жълто, оптимналата траектория на задача 3 в синьо, а в лилаво е начертана линията на равновесната точка $\hat{G}$.

В пример 3 и Задача 3 и Задача 2 имат решения. Задача 3 има два кандидата за оптимална траектория. На графика 3 те са оцветени в синьо и лилаво. Оптималната траектория за Задача 3 и съответно за Задача 1 е оцветената в синьо.

4 Използвани твърдения

В този раздел може да бъдат намерени основните дефиниции, твърдения и теореми от теорията на оптималното управление и диференциалните уравнения, използвани в останалите раздели от настоящата дипломната работа.

(I) Диференциални уравнения:

Формула на Коши за решението на линейни ОДУ:

Нека $G(t)$ е диференцируема функция на времето t.

Тогава:

(ФНК$_1$) $\boxed{G(t) = e^{\alpha\,(t-t_0)}\,G_0}$

е решението на задачата на Коши: $\begin{cases} \frac{d}{dt}\,G(t) = \alpha\,G(t) \\ G(t_0) = G_0 \\ \alpha > 0 \end{cases}$

(ФНК$_2$) $\boxed{G(t) = e^{\displaystyle\int_{t_0}^{t} \alpha(s)\,ds}\,G_0}$

е решението на задачата на Коши:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\,G(t) = \alpha(t)\,G(t) \\ G(t_0) = G_0 \\ \alpha(t) \text{ - интегруема} \end{cases}$$

(ФНК$_3$) $\boxed{G(t) = e^{\displaystyle\int_{t_0}^{t} \alpha(s)\,ds}\,G_0 + \int_{t_0}^{t} \beta(s)\,e^{\displaystyle\int_{s}^{t} \alpha(\sigma)\,d\sigma}\,ds}$

е решението на задачата на Коши: $\begin{cases} \frac{d}{dt}\,G(t) = \alpha(t)\,G(t) + \beta(t) \\ G(t_0) = G_0 \\ \alpha(t) \text{ и } \beta(t) \text{ - интегруеми} \end{cases}$

(II) Оптимално управление:

Следвайки [4, стр. 76] разглеждаме следната задача на оптималното управление:

Задача с безкраен времеви хоризонт:

$$I\big(x(\cdot), u(\cdot)\big) := \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} L\big(x(t), u(t), t\big)\, dt \longrightarrow \max \qquad (\text{БХ}_1)$$

$$\dot{x}(t) = \bar{f}\big(x(t), u(t), t\big), \text{ за всяко } t \in [0, +\infty) \qquad (\text{БХ}_2)$$

$$x(0) = x_0, \qquad (\text{БХ}_3)$$

където: траекторията $x(\cdot)$ приема стойности в отворено подмножество X на $\mathbb{R}^n$, управлението $u(\cdot)$ е ограничена и измерима функция приемаща стойности в затворено подмножество U на $\mathbb{R}^m$, функциите $\bar{f} : X \times U \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ и $L : X \times U \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ са непрекъснато диференцируеми по фазовата променлива $x(t)$, параметърът ρ е неотрицателно число и се нарича дисконтиращ множител.

Дефиниция 5.1:

Наредената двойка траектория и управление $\big(x(\cdot), u(\cdot)\big)$ ще наричаме допустим процес на задачата $(\text{БХ}_1)\div(\text{БХ}_3)$, ако $x(\cdot)$ е решение на уравнението на динамиката $(\text{БХ}_2)\div(\text{БХ}_3)$ с управление $u(\cdot)$ в интервала $[0, +\infty)$ и интегралът (БХ_1) заместен със съответните $x(\cdot)$ и $u(\cdot)$ е сходящ.

Дефиниция 5.2:

Процесът $\big(x^*(\cdot), u^*(\cdot)\big)$ на задачата $(\text{БХ}_1)\div(\text{БХ}_3)$ ще наричаме оптимален, ако е допустим и $I\big(x^*(\cdot), u^*(\cdot)\big) \geq I\big(x(\cdot), u(\cdot)\big)$ за всеки допустим процес $\big(x(\cdot), u(\cdot)\big)$ на задачата $(\text{БХ}_1)\div(\text{БХ}_3)$. Траекторията $x^*(\cdot)$ се нарича оптимална траектория, а управлението $u^*(\cdot)$ се нарича оптимално управление.

Съществуване на оптимален процес:

Теорема 5.1.[6, стр. 237, Теорема 15]:

За задача ($БХ_1$)÷($БХ_3$) да допуснем, че функциите $L\big(x(\cdot),u(\cdot),t\big)$ и $\bar{f}\big(x(\cdot),u(\cdot),t\big)$ са непрекъснати. Да допуснем също, че множеството U е ограничено и съществува частично непрекъсната функция $\phi(.)$, за която $\phi(t) \geq 0$ за всяко $t \in [0,+\infty]$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi(t)\,dt < +\infty$ и $L\big(x(t),u(t),t\big) \leq \phi(t)$ за всеки процес $\big(x(.),u(.)\big)$ на задача ($БХ_1$)÷($БХ_3$) и за всяко $t \in [0,+\infty)$. По нататък да допуснем, че съществуват неотрицателни и частично непрекъснати функции $a(t)$ и $b(t)$ такива, че $\|\bar{f}\big(x,u,t\big)\| \leq a(t)\,\|x\| + b(t)$ за всяко $t \in [0,+\infty)$.

Последно да допуснем, че множеството $N\big(x,U,t\big) = \{\big(L(\big(x,u,t\big)+\varepsilon, \bar{f}\big(x,u,t\big))\big) : u \in U, \varepsilon \leq 0\}$ е изпъкнало за всеки (x,t). Тогава от съществуването на процес на задача ($БХ_1$)÷($БХ_3$) следва, че съществува оптимален процес на задача ($БХ_1$)÷($БХ_3$).

Намиране на оптимално управление:

Следвайки [2]:

(A1) Съществува непрекъсната функция $\gamma : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ и локално интегруема функция $\psi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, такива че $\{x : \|x - x^*(t)\| \leq \gamma(t)\} \subseteq X$ за всяко $t \geq 0$ и за почти всяко $t \in [0,+\infty)$ $\underset{\{x:\|x-x^*(t)\|\leq g(t)\}}{max}\{\|f_x\big(x,u^*(t),t\big)\| + \|L_x\big(x,u^*(t),t\big)\|\} \leq \psi(t)$, където $\big(x^*(t),u^*(t)\big)$ е произволен процес на задачата ($БХ_1$)÷($БХ_3$).

(A2) Съществува число $\beta > 0$ и неотрицателна, интегруема функция $\lambda : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, такава че за всяко $\xi \in X$ с норма $\|\xi - x_0\| < \beta$ уравнението ($БХ_2$) с $u(.) = u^*(.)$ и начално условие $x(0) = \xi$(вместо $x(0) = x_0$) има решение $x\big(\xi;.\big)$ върху интервала $[0,+\infty)$ в X и също така $\underset{x\in[x(\xi;t),x^*(t)]}{max} | < L_x\big(x,u^*,t\big), x\big(\xi;t\big) - x^*(t) > | \leq \|\xi - x_0\|\lambda(t)$.., където: $[x\big(\xi;t\big),x^*(t)] = co\{x\big(\xi;t\big),x^*(t)\}$ и $\big(x^*(.),u^*(.)\big)$ е произволен процес на задачата ($БХ_1$)÷($БХ_3$).

Дефиниция 5.3: Допустимият процес $\big(x^*(\cdot),u^*(\cdot)\big)$ на задача ($БХ_1$)÷($БХ_3$) се нарича LWOO(locally weakly overtaking optimal) ако съществува $\delta > 0$ такова, че за всеки допустим процес
$\big(x(\cdot),u(\cdot)\big)$ на задача ($БХ_1$)÷($БХ_3$) удовлетворяващо, че $\mu\big(t \geq 0 | u(t) \neq u^*(t)\big) \leq \delta$ и за всеки $\varepsilon > 0$, $T > 0$ съществува $T' > T$, такова че

$$\int_0^{T'} L\big(x^*(t),u^*(t),t\big)\,dt \geq \int_0^{T'} L\big(x^(t),u(t),t\big)\,dt - \varepsilon$$

.

Бележка: Ясно е, че ако $\big(x(\cdot),u(\cdot)\big)$ е оптимален процес на задача ($БХ_1$)÷($БХ_3$), то $\big(x(\cdot),u(\cdot)\big)$ е LWOO процес на задача ($БХ_1$)÷($БХ_3$).

Теорема 5.2.[2, Теорема 3.3]:

Нека $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ е LWOO процес на задача (БХ$_1$)÷(БХ$_3$). Да допуснем, че **(A1)** и **(A2)** са изпълнени. Тогава фунцкията $\psi(t) = Z_*(t) \displaystyle\int_t^{+\infty} [Z_*(s)]^{-1} L_x\big(x^*(s), u^*(s), s\big)\, ds$, $t \in [0, +\infty)$ е локално абсолютно непрекъсната и удовлетворява основните условия на принцип за максимума на Понтрягин, т.е.:

(1) $\psi(.)$ е решение на спрегнатото уравнение:

$$\frac{d}{dt}\,\psi(t) = -H_x\big(x^*(t), u^*(t), \psi(t), t\big)$$

(2) Условието за максимум е изпълнено:

$$H\big(x^*(t), u^*(t), \psi(t), t\big) = \max_{u \in U} H\big(x^*(t), u(t), \psi(t), t\big)$$

Бележки:

$H\big(x(\cdot), u(\cdot), \psi(\cdot), t\big)$ е хамилтонианът на задача (БХ$_1$)÷(БХ$_3$):

$$H\big(x, u, \psi, t\big) := e^{-\rho\, t}\, L\big(x, u, t\big) + \psi\, f\big(x, u, t\big)$$

$Z_*(t)$ е фундаменталната матрица от решения на спрегнатото линеализирано уравнение:

$$\dot{Z}(t) = -[f_x\big(x^*(t), u(t), t\big)]^*\, Z(t)$$
$$Z(0) = E$$

Под $[f_x\big(x^*(t), u(t), t\big)]^*$ разбираме транспонираната матрица на матрицата $f_x\big(x^*(t), u(t), t\big)$.

Задача със свободен десен край:

$$J\big(x(\cdot),u(\cdot),T\big) := \int_0^T e^{-\rho t}\, L\big(x(t),u(t),t\big)\, dt \longrightarrow \max \tag{СДК$_1$}$$

$$\dot{x}(t) = \bar{f}\big(x(t),u(t),t\big), \text{ за всяко } t \in [0,T] \tag{СДК$_2$}$$

$$x(0) = x_0, \tag{СДК$_3$}$$

където: траекторията $x(\cdot)$ приема стойности в отворено подмножество X на $\mathbb{R}^n$, управлението $u(\cdot)$ е ограничена и измерима функция приемаща стойности в затворено подмножество U на $\mathbb{R}^m$, функциите $\bar{f} : X \times U \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}^n$ и $L : X \times U \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ са непрекъснато диференцируеми по фазовата променлива $x(t)$, а T е положително реално число.

Дефиниция 5.4:

Наредената тройка траектория, управление и времеви момент $\big(x(\cdot),u(\cdot),T\big)$ ще наричаме допустим процес в интервала $[0,T]$ на задача (СДК$_1$)÷(СДК$_3$), ако $x(\cdot)$ е решение на уравнението на динамиката (СДК$_2$)÷(СДК$_3$) с управление $u(\cdot)$ в интервала $[0,T]$ с фиксиран времеви момент T.

Дефиниция 5.5:

Наредената тройка траектория, управление и времеви момент $\big(x^*(\cdot),u^*(\cdot),T^*\big)$ ще наричаме оптимален процес в интервала $[0,T^*]$ на задача (СДК$_1$)÷(СДК$_3$), ако е допустим и $J\big(x^*(\cdot),u^*(\cdot),T^*\big) \geq J\big(x(\cdot),u(\cdot),T\big)$ за всеки процес $\big(x(\cdot),u(\cdot),T\big)$ на задача (СДК$_1$)÷(СДК$_3$) с $T > 0$.Траекторията $x^*(\cdot)$ се нарича оптимална траектория, управлението $u^*(\cdot)$ се нарича оптимално управление, а T^* се нарича оптимален краен момент.

Теорема 5.3[7, 116стр]:

Нека $\big(x^*(\cdot), u^*(\cdot), T^*\big)$ е оптимален процес в интервала $[0, T^*]$ за задача (СДК$_2$)÷(СДК$_3$).

Тогава съществуват $\big(p_0, p(t)\big)$, такива че:

(1) $p_0 \in \{0, 1\}$.

(2) $\big(p_0, p(t)\big) \neq \big(0, 0\big)$ за всяко $t \in [0, T^*]$.

(3) $\dfrac{d}{dt}\, p(t) = -H_x\big(x^*(t), u^*(t), p_0, p(t), t\big)$

(4) $H\big(x^*(t), u^*(t), p_0, p(t), t\big) = \max\limits_{u \in U} H\big(x^*(t), u(t), p_0, p(t), t\big)$

(5) $H\big(x^*(T^*), u^*(T^*), p_0, p(T^*), T^*\big) = 0$

Изпълнено е и условието за трасферзалност: $p(T^*) = 0$.

Бележки:

$H\big(x(\cdot), u(\cdot), p_0, p(\cdot), t\big)$ е хамилтонианът на задача (СДК$_1$)÷(СДК$_3$):

$$H\big(x, u, p_0, p(\cdot), t\big) := p_0\, e^{-\rho\, t}\, L\big(x, u, t\big) + p\, \bar{f}\big(x, u, t\big)$$

5 Заключение

В тази дипломна работа са разгледани две основни математически модела, съответно в раздел 2 и раздел 3. Основните резултати са съответно:

- Лема 3.3 и Лема 3.4 изясняват вярността на Лема 2 от [3].
- Направена е програма за визуалзизация за **Задача 1** и са разгледани три примера.
- Направен е обобщен модел на модела разгледан в [3].
- Лема 2.1 доказва, че **Обобщена задача 1** има решение.
- Лема 2.2 и следствие 2.3 характеризират структурата на оптималните траектории на **Обобщена задача 1** .
- Теорема 2.4 и 2.5 дават връзка между решенията на **Обобщена задача 1** и **Обобщена задача 3** .
- Лема 2.6 и Лема 2.7 характеризира вида на оптималното управление на **Обобщена задача 1** в зависимост от това дали **Обобщена задача 3** има решение.

Литература

[1] K.J. Arrow and M. Nerlove, OPTIMAL ADVERTISING POLICY UNDER DYNAMIC CONDITIONS, Stanford University, December 11, 1961.

[2] S.M. Aseev†, V.M. Veliov Maximum Principle for Infinite-Horizon Optimal Cntrol Problems inder Weak Prgualrity Asumptions, Technische Universitat Wien, 2014.

[3] L. Grosset, B. Viscolani, Optimal dynamic advertising with an adverse exogenous effect on brand goodwill, Automatica **45** (2009), 863–870.

[4] Krastanov, M., Lecture Notes on Optimal Control, http://www.math.bas.bg/krast/zip/OCnote.pdf, 2007.

[5] Petrova, D., Дипломна работа на тема: РЕКЛАМНИ СТРАТЕГИИ В УСЛОВИЯ НА ДИФРЕНЦИАЛНА ИГРА МЕЖДУ ДВАМА ПРОИЗВОДИТЕЛИ С ВЗАИМНО ВЛИЯНИЕ ВЪРХУ РЕКЛАМНИТЕ УСЛОВИЯ НА КОНКУРЕНТА, специалност Математическо моделиране в икономиката, Софийски Университет "Св. Климент Охридски", Факултет по математика и информатика, София 2013.

[6] Seierstad A., Sydsaeter K. Optimal control theory with economic applications (NH, 1987)(ISBN 0444879234)(T)(S)(463s).

[7] G., Tragler, Grass, D., Caulkins, J.P., Feichtinger, G., Bechrens, D.A., Optimal Control of Nonlinear Provesses, Springer, 2008.

[8] M.L. Vidale and H.B. Wolfe, An operations research study for sales response to advertising. Operations Research 5 (1957) 370–381.