СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВЕТИ КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

ДИПЛОМНА РАБОТА

ТЕМА:

ДОПИРАТЕЛНИ КОНУСИ, МОНОТОННИ ОПЕРАТОРИ, СУБДИФЕРЕНЦИАЛИ ОТ ВТОРИ РЕД

ДИПЛОМАНТ:

НАДЯ ПЕЙЧЕВА ЗЛАТЕВА, ФАК. № 9375

Ръководител на катедра ИО:

/доц. Йордан Митев/

Научен ръководител:

/гл.ас. кмн Пандо Георгиев/

Рецензент:

/н.с. кмн Николай Живков/

С О Ф И Я
1 9 9 2

Изказвам благодарност на научния си ръководител гл.ас. кмн Пандо Георгиев за всестранната помощ, оказвана ми в процеса на изработване на настоящата дипломна работа.

Благодарна съм на гл.ас. Венелин Черногоров и на студентите от курса по Математическа текстообработка, които под негово ръководство усъвършенстваха уменията си в системата LaTeX като години по-късно дигитализираха този труд.

Съдържание

Увод

Развитието на теорията и практиката на решаването на оптимизационни задачи довежда до необходимостта от определяне на понятието производна на многозначно изображение. При подхода към дефинирането на производната на многозначно изображение се възприема най-рано исторически възникналият похват, приписван на Ферма. При него графиката на производната на гладка функция се определя чрез построяване на допирателни към графиката на самата функция.

За целта се разработва апаратът на допирателните пространства към подмножества на баханови пространства, но такива пространства не съществуват, ако множеството не е гладко многообразие.

От друга страна от изпъкналия анализ е известно, че е възможно по естествен начин да се определят „допирателни конуси“ към изпъкнали множества, които се оказват полезни благодарение на това, че запазват много от свойствата на допирателните пространства.

Това обаче се явява недостатъчно, защото болшинството от многозначните изображения, с които се срещаме, имат неизпъкнали графики.

Когато множеството K не е нито гладко, нито изпъкнало, съществуват много начини за определяне на допирателни конуси, като всеки един от тях по нищо не отстъпва на другите в своята „естественост“.

Тук се спираме на два варианта от многото възможни: контингентен конус $T_K(x_0)$ към множество K в точката x_0, въведен в началото на тридесетте години от Булиган, и допирателен конус $C_K(x_0)$ към множество K в точката x_0, въведен през 1975 година от Кларк.

Допирателният конус $C_K(x_0)$ се съдържа в контингентния конус $T_K(x_0)$. И двата конуса са затворени, а допирателният конус е и изпъкнал.

Известна е следната връзка между T_K и C_K на непразно слабо затворено множество K в хилбертово пространство

$$\liminf_{x \xrightarrow[K]{} x_0} T_K(x) \subset \liminf_{x \xrightarrow[K]{} x_0} \left(\overline{\mathrm{co}}\, T_K(x)\right) \subset C_K(x_0), \tag{1}$$

като равенства имаме когато пространството е крайномерно (вж. [4]).

В глава 1 тук се показва, че включването (1) е в сила и когато K е непразно слабо затворено множество в рефлексивно пространство.

В глава 2 се разглеждат някои свойства на конуса на Кларк към графиките на локално липшицови и монотонни изображения.

Направено е различно доказателство, а и в случай на по-общи пространства, на една теорема на Рокафелар [5], а именно, че ако X и Y са банахови пространства и $F : U \to Y$ ($U \subset X$ и отворено) е липшицова функция и $(x_0, F(x_0)) \in \operatorname{gph} F$, то конусът на Кларк $C_{\operatorname{gph} F}(x_0, F(x_0))$ е линейно подпространство в $X \times Y$.

Привежда се доказателство на факта, че когато T е собствен монотонен оператор от банахово пространство X в спрегнатото му X^*, то за всяко $(x, p) \in \operatorname{gph} T$ имаме $\langle u, v\rangle \geq 0$ за всяко $(u, v) \in C_{\operatorname{gph} T}(x, p)$.

Въз основа на това се показва, че когато конусът на Кларк към точка от графиката на такъв оператор е максимално монотонно подмножество на $X \times X^*$, той е и линейно подпространство в $X \times X^*$.

Доказва се, че когато T е собствен монотонен оператор от банахово пространство X в X^*, то изображението от X в X^*, чиято графика е конусът на Кларк към $\operatorname{gph} T$ в произволна точка от нея е еднозначно във всяка точка от вътрешността на дефиниционната си област.

В същата глава се показва, че конусът на Кларк към графиката на собствено монотонно изображение в произволна точка от нея не съдържа хипердопирателни в смисъл на Рокафелар.

Глава 3 разглежда някои локални свойства на монотонните оператори.

По идея на доказателството на една теорема на Борвейн и Фицпатрик, изложено в [7], се доказва, че ако X е банахово пространство и $T : X \to X^*$ е собствено монотонно изображение, чийто домейн $D(T)$ е гъст и G_δ в някое отворено подмножество A на X, то T е локално ограничено във всяка точка от $D(T) \bigcap A$.

Като приложение се доказва, че максимално монотонно изображение с такава дефиниционна област е максимално монотонно във всяко отворено подмножество на A.

Фицпатрик и Фелпс доказват, че ако T е субдиференциал на собствена полунепрекъсната отдолу функция, то T е максимално монотонно локално изображение [1]. Като се използва този факт се доказва, че субдиференциалът на Кларк на lower C^2 функция в хилбертово пространство не притежава монотонно продължение в дефиниционната си област.

В глава 4 се разглеждат свойствата на субдиференциала от втори ред $\partial^2_C f(x_0)$ (в смисъл на Кларк) на $C^{1,1}$ функция f, дефинирана в $\mathbb{R}^n$ в точката x_0 (обобщена Хесианова матрица).

С цел пълнота на изложението е доказана отново аналитичната формулировка на опорната бифункция на множеството $\partial^2_C f(x_0)$, означена чрез $f^{\circ\circ}(x_0, u, v)$ (вж. [9]) в термините на градиентното изображение ∇f, която се използва съществено, но се упоменава без доказателство в [2] и [6].

Като основен резултат са получени достатъчни условия от втори ред за локално решение на минимизационни задачи с $C^{1,1}$ данни.

Глава 1

Връзка между конусите на Булиган и Кларк в рефлексивни пространства

Нека K е непразно множество в банахово пространство X.

Ще означаваме с εB и εB_0 съответно затвореното и отвореното кълбо в X с център нулата и радиус $\varepsilon > 0$ и полагаме

$$B_K(x_0, \varepsilon) := K \cap (x_0 + \varepsilon B).$$

Символът $x \underset{K}{\to} x_0$ означава сходимост към x_0 в K.

Определение 1.1. Множество

$$T_K(x) := \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\alpha>0} \bigcup_{0<h\le\alpha} \left(\frac{1}{h}(K - x) + \varepsilon B\right) \tag{1.1}$$

се нарича *контингентен конус* към K в точката x.

С други думи $v \in T_K(x)$ тогава и само тогава, когато

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \forall\ \alpha > 0,\ \exists\ u \in (v + \varepsilon B),\ \exists\ h \in (0, \alpha] : x + hu \in K, \tag{1.2}$$

или, което е еквивалентно, $v \in T_K(x)$ тогава и само тогава, когато съществуват редица от положителни числа $\{h_n\}$ и редица от елементи $\{u_n\}$ на X, такива че: $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = v$ и $x + h_n u_n \in K$ за всяко $n \ge 0$.

Ако се използва функцията разстояние от точка до множество K, която се дефинира с формулата:

$$d_K(x) := \inf\{\|x - y\|,\ y \in K\},$$

то елементите на контингентния конус могат да се характеризират и така:

$$v \in T_K(x) \text{ тогава и само тогава, когато } \liminf_{h\to 0^+} \frac{d_K(x+hv)}{h} = 0. \tag{1.3}$$

Лесно се вижда, че контингентният конус е затворен и че за всяко $x \in K$, $0 \in T_K(x)$. Ако $x \in \operatorname{int}(K)$, то $T_K(x) = X$ и за произволно $x \in X$ имаме, че $T_X(x) = X$. Полагаме $T_\varnothing(x) := \varnothing$.

Определение 1.2. Нека (U,ρ) е метрично пространство с метрика ρ и нека $F : U \to X$ е многозначно изображение. Тогава

$$\liminf_{u\to u_0} F(u) := \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\eta>0} \bigcap_{\rho(u,u_0)<\eta} (F(u)+\varepsilon B). \tag{1.4}$$

Определение 1.3. Множеството

$$C_K(x_0) := \liminf_{\substack{h\to 0^+\\ x\xrightarrow[K]{} x_0}} \frac{1}{h}(K-x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\alpha,\beta>0} \bigcap_{\substack{x\in B_K(x_0,\alpha)\\ h\in(0,\beta]}} \left(\frac{1}{h}(K-x)+\varepsilon B\right) \tag{1.5}$$

се нарича *допирателен конус* или *конус на Кларк* към множеството K в точката x_0.

С други думи $v \in C_K(x_0)$ тогава и само тогава, когато

$$\begin{gathered} \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \exists\, \beta > 0 : \forall\, x \in B_K(x_0,\alpha),\ \forall\, h \in (0,\beta], \\ \exists\, u \in (v+\varepsilon B) : x + hu \in K, \end{gathered} \tag{1.6}$$

или, което е еквивалентно, $v \in T_K(x)$ тогава и само тогава, когато за всяка редица от положителни числа $\{h_n\}$, такива че $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и всяка редица от елементи $\{x_n\}$ на K, такива че $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$, съществува редица от елементи $\{u_n\} \in X$, такива че $\{u_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} v$, за които $x_n + h_n u_n \in K$ за всяко $n \geq 0$.

Конусът на Кларк може да се характеризира и по следния начин:

$$v \in C_K(x_0) \text{ тогава и само тогава, когато } \lim_{\substack{x\xrightarrow[K]{} x_0\\ h\to 0^+}} \frac{d_K(x+hv)}{h} = 0. \tag{1.7}$$

Ако $x \in \operatorname{int} K$, то $C_K(x) = X$ и за произволно $x \in X$ имаме $C_X(x) = X$. Полагаме $C_\varnothing(x) := \varnothing$. Очевидно за $x \in K$, $0 \in C_K(x)$.

За дадените до тук дефиниции вж. [4, стр. 395–401].

Теорема 1.4 ([4]). Конусът на Кларк $C_K(x_0)$ към множеството K в точката x_0 е затворен и изпъкнал.

Да забележим, че $C_K(x_0) \subset T_K(x_0)$ и ако K е изпъкнало множество, то $C_K(x_0) = T_K(x_0)$.

Тези два конуса могат да се различават един от друг. Като пример ще разгледаме множество K в $\mathbb{R}^2$, което е графика на изображението $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дефинирано като

$$\pi(x) = 0, \text{ ако } x \leq 0, \quad \pi(x) = x, \text{ ако } x \geq 0.$$

Тогава

- ако $x < 0$, то $C_K(x, 0) = T_K(x, 0) = \mathbb{R} \times \{0\}$,
- ако $x = 0$, то $C_K(0, 0) = \{(0, 0)\}$, $T_K(0, 0) = (-\mathbb{R}_+ \times \{0\}) \cup \{(u, u) : \ u \in \mathbb{R}_+\}$,
- ако $x > 0$, то $C_K(x, x) = T_K(x, x) = \{(u, u) : \ u \in \mathbb{R}_+\}$.

Допирателният конус към K в точката $(0, 0)$ е изпъкнал, но тривиален, докато контингентният конус в тази точка е неизпъкнал, но доста голям.

Контингентният и допирателният конус са свързани по следния начин [4]:

Теорема 1.5 ([4])**.** Нека K е непразно слабо затворено множество в хилбертово пространство. Тогава

$$\liminf_{x \xrightarrow[K]{} x_0} T_K(x) \subset \liminf_{x \xrightarrow[K]{} x_0} (\overline{\text{co}}\, T_K(x)) \subset C_K(x_0).$$

Възможно е този резултат да бъде доказан и в случай на рефлексивно пространство, а именно:

Теорема 1.6. Нека K е непразно слабо затворено множество в рефлексивно пространство X. Тогава

$$\liminf_{x \xrightarrow[K]{} x_0} T_K(x) \subset \liminf_{x \xrightarrow[K]{} x_0} (\overline{\text{co}}\, T_K(x)) \subset C_K(x_0).$$

Доказателството се опира на следните леми:

Нека $\|\cdot\|$ в X е еквивалентна диференцируема по Фреше норма (такава норма съществува (вж. например Троянски [11]).

Нека $K \subset X$ е слабо затворено множество.

Означаваме с $\pi_K(y)$ непразно подмножество от елементи $x \in K$, такива че $\|x - y\| = d_K(y)$.

Лема 1.7. За произволни $y \notin K$, $x \in \pi_K(y)$ и $v \in \overline{\text{co}}\, T_K(x)$ имаме, че

$$\langle \nabla \|x - y\|, v \rangle \leq 0,$$

където $\langle \cdot, \cdot \rangle$ са обичайните скоби за дуалност между X и X^*.

Доказателство. Нека фиксираме $y \notin K$, $x \in \pi_K(y)$ и $v \in T_K(x)$. От неравенството

$$\|y - x\| - d_K(x + hv) = d_K(y) - d_K(x + hv) \leq \|y - x - hv\|$$

имаме, че

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\|y - x\| - \|y - x - hv\|}{h} \leq \liminf_{h\to 0^+} \frac{d_K(x + hv)}{h}$$

и тъй като функцията $u \to \|u\|$ е диференцуема в точката $u \neq 0$, а в случая $y \neq x$, то след граничния преход получаваме, че

$$\langle \nabla \|y - x\|, v\rangle \leq 0$$

за всяко $v \in T_K(x)$, а следователно и за всяко $v \in \overline{\mathrm{co}}\, T_K(x)$.

Лема 1.8. За всяко $y \in X$ е в сила неравенството

$$\liminf_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} \left(d_K(y + hv)^2 - d_K(y)^2\right) \leq d_K(y) d\left(v, \overline{\mathrm{co}}\, T_K(\pi_K(y))\right).$$

Доказателство. Ако $y \notin K$, то избираме $x \in \pi_K(y)$. Тъй като $d_K(y) = \|y - x\|$, то

$$\frac{1}{2h} \left(d_K(y + hv)^2 - d_K(y)^2\right) \leq \frac{1}{2h} \left(\|y + hv - x\|^2 - \|y - x\|^2\right).$$

Следователно

$$\begin{aligned} \liminf_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} \left(d_K(y + hv)^2 - d_K(y)^2\right) &\leq \liminf_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} \left(\|y + hv - x\|^2 - \|y - x\|^2\right) \\ &= \|y - x\| \langle \nabla \|y - x\|, v\rangle \end{aligned}$$

и за всяко $w \in \overline{\mathrm{co}}\, T_K(x)$ от Лема 1.7 получаваме

$$\begin{aligned} \liminf_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} \left(d_K(y + hv)^2 - d_K(y)^2\right) &\leq \|y - x\| \langle \nabla \|y - x\|, v\rangle + \|y - x\| \langle \nabla \|y - x\|, -w\rangle \\ &= \|y - x\| \langle \nabla \|y - x\|, v - w\rangle \leq \|y - x\| \|v - w\|. \end{aligned}$$

Твърдението на лемата следва непосредствено, като вдясно вземем инфинум, когато w пробягва $\overline{\mathrm{co}}\, T_K(x)$, а x пробягва $\pi_K(y)$.

Ако $y \in K$, то $d_K(y) = 0$ и

$$d_K(y + hv) = d_K(y + hv) - d_K(y) \leq \|hv\| = h\|v\|,$$

откъдето

$$\liminf_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} \left(d_K(y + hv)^2 - d_K(y)^2\right) \leq \liminf_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} h^2 \|v\|^2 = 0$$

и твърдението на лемата е в сила и в този случай.

Лема 1.9. Нека $f(t) := \frac{1}{2}d_K^2(x+tv)$. Тогава за почти всяко $t \geq 0$ е изпълнено неравенството

$$f'(t) \leq d_K(x+tv)d\left(v, \overline{\mathrm{co}}\, T_K(\pi_K(x+tv))\right).$$

Доказателство. Ще покажем, че функцията $f(t) := \frac{1}{2}d_K^2(x+tv)$ е локално липшицова, т.е. за всяко $t_0 > 0$ съществува $\delta > 0$ и константа $L \geq 0$, такива че щом $|t_0 - t_1| < \delta$ и $|t_0 - t_2| < \delta$, то $|f(t_1) - f(t_2)| \leq L|t_1 - t_2|$.

Нека $t_0 > 0$. Тогава полагаме $\delta = t_0$ и нека $z \in K$. За произволни t_1 и t_2, такива че $|t_1 - t_0| < \delta$ и $|t_2 - t_0| < \delta$ имаме, че

$$\begin{aligned} d_K(x+t_1v) + d_K(x+t_2v) &= d_K(x+t_1v) - d_K(z) + d_K(x+t_2v) - d_K(z) \\ &\leq \|x+t_1v - z\| + \|x+t_2v - z\| \leq 2\|x-z\| + (t_1+t_2)\|v\| \leq 2\|x-z\| + 4t_0\|v\|. \end{aligned}$$

Полагаме $M = 2\|x-z\|+4t_0\|v\|$. Оттук за всеки t_1, t_2, такива че $|t_0-t_1| < \delta$, $|t_0-t_2| < \delta$ и $L = M\|v\|$ имаме, че

$$\begin{aligned} |f(t_1) - f(t_2)| &= \left|\frac{1}{2}d_K^2(x+t_1v) - \frac{1}{2}d_K^2(x+t_2v)\right| \\ &= \frac{1}{2}(d_K(x+t_1v) + d_K(x+t_2v))|d_K(x+t_1v) - d_K(x+t_2v)| \\ &\leq \frac{M}{2}|d_K(x+t_1v) - d_K(x+t_2v)| \leq \frac{M}{2}|t_1 - t_2|\|v\| \leq L|t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Съгласно теоремата на Радемахер функцията $f(\cdot)$ е диференцируема почти навсякъде в множеството $(t : t \geq 0)$, т.е. f' съществува почти навсякъде в това множество и от Лема 1.8 непосредствено следва и твърдението на настоящата.

Доказателство на Теорема 1.6. Нека $v_0 \neq 0$ и

$$v_0 \in \liminf_{x \xrightarrow[K]{} x_0} \overline{\mathrm{co}}\, T_K(x).$$

Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\eta > 0$, такова че за всяко $x \in B_K(x_0, \eta)$ имаме, че $v_0 \in \overline{\mathrm{co}}\, T_K(x) + \varepsilon B$. Ако изберем $\alpha := \frac{\eta}{2}$ и $\beta := \frac{\eta}{4\|v_0\|}$, то ако $x \in B_K(x_0, \alpha)$ и $t \in [0, \beta]$ имаме, че $\pi_K(x+tv_0) \in B_K(x+tv_0, t\|v_0\|)$ и ако $z \in \pi_K(x+tv_0)$, то

$$\begin{aligned} \|z - x_0\| &\leq \|z - (x+tv_0)\| + \|(x+tv_0) - x_0\| \leq t\|v_0\| + \|x - x_0\| + t\|v_0\| \\ &\leq 2\beta\|v_0\| + \alpha \leq 2\left(\frac{\eta}{4\|v_0\|}\right)\|v_0\| + \frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta \end{aligned}$$

и следователно $\pi_K(x+tv_0) \subset B_K(x_0, \eta)$.

Полагаме $f(t) = \frac{1}{2}d_K^2(x+tv_0)$ и от Лема 1.9 следва че

$$f'(t) \leq d_K(x+tv_0)d(v_0, \overline{\mathrm{co}}\, T_K(\pi_K(x+tv_0))) \leq \varepsilon d_K(x+tv_0) \leq \varepsilon t\|v_0\|,$$

тъй като $d_K(x + tv_0) \leq t\|v_0\|$.

Следователно за всяко $x \in B_K(x_0, \alpha)$ и всяко $h \in (0, \beta)$

$$\frac{1}{2} d_K(x + hv_0)^2 = f(h) - f(0) = \int_0^h f'(t)\, dt \leq \varepsilon \|v_0\| \frac{h^2}{2},$$

откъдето имаме, че

$$\lim_{\substack{x \xrightarrow[K]{} x_0 \\ h \to 0^+}} \frac{d_K(x + hv_0)}{h} = 0,$$

което е еквивалентно на това, че $v_0 \in C_K(x_0)$ и окончателно получаваме

$$\liminf_{x \xrightarrow[K]{} x_0} T_K(x) \subset \liminf_{x \xrightarrow[K]{} x_0} \overline{\text{co}}\, T_K(x) \subset C_K(x_0).$$

Глава 2

Свойства на конуса на Кларк към графиките на локално липшицови и монотонни изображения

В статията си [5] Рокафелар доказва, че ако U е отворено подмножество на $\mathbb{R}^n$, $F : U \to \mathbb{R}^m$ е липшицова функция и $x_0 \in U$, т. е. $(x_0, F(x_0)) \in M := \operatorname{gph} F$, конусът на Кларк $C_M(x_0, F(x_0))$ е линейно подпространство на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Възможно е и косвено доказателство на аналогичен резултат за произволни банахови пространства, което ще изложим по-долу.

Определение 2.1. Нека X и Y са банахови пространства. Тогава в пространството $X \times Y$ дефинираме норма $\|\cdot\|_{X\times Y}$ по следния начин:

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Теорема 2.2. Нека X и Y са банахови пространства, $U \subset X$ е отворено подмножество, а $F : U \to Y$ е локално липшицова функция. Тогава за всяко $(x_0, F(x_0)) \in M := \operatorname{gph} F$ конусът на Кларк $C_M(x_0, F(x_0))$ е линейно подпространство на $X \times Y$.

Доказателство. Нека $x_0 \in U$ и функцията F е локално липшицова в точката x_0 с константа L, т. е. съществува $\delta > 0$, такова че за произволни $x, y \in U$, за които $\|x - x_0\| < \delta$ и $\|y - x_0\| < \delta$, е в сила неравенството $\|F(x) - F(y)\| \le L\|x - y\|$.

Да допуснем, че съществува вектор $(u_0, v_0) \in C_M(x_0, F(x_0))$, такъв че противоположният му вектор $(-u_0, -v_0) \notin C_M(x_0, F(x_0))$. С други думи:

$$
(2.1)\quad
\begin{aligned}
&\text{за някои } \varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 > 0 \text{ и произволни } \alpha > 0, \beta > 0 \text{ съществуват}\\
&\text{точка } (x, F(x)) \in B_M\big((x_0, F(x_0)), \alpha\big) \text{ и число } h \in (0, \beta] \text{ със}\\
&\text{свойството, че за всички вектори } u \in B(u_0, \varepsilon_1) \text{ и } v \in B(v_0, \varepsilon_2)\\
&\text{е изпълнено } (x - hu, F(x) - hv) \notin M, \text{ т. е. } F(x - hu) \neq F(x) - hv.
\end{aligned}
$$

В частност

$$
(2.2)\qquad F(x - hu_0) \neq F(x) - hv \text{ за всяко } v \in B(v_0, \varepsilon_2).
$$

Без ограничение на общността можем да считаме, че

$$
(2.3)\qquad L\varepsilon_1 \leq \frac{\varepsilon_2}{2}.
$$

От факта, че $(u_0, v_0) \in C_M(x_0, F(x_0))$ можем да заключим, че

$$
(2.4)\quad
\begin{aligned}
&\text{за } \varepsilon_1 > 0 \text{ и } \varepsilon_2/2 > 0 \text{ съществуват числа } \alpha' > 0 \text{ и } \beta' > 0,\\
&\text{такива че за произволни } (x', F(x')) \in B_M\big((x_0, F(x_0)), \alpha'\big) \text{ и}\\
&h' \in (0, \beta'] \text{ могат да се намерят вектори } u' \in B(u_0, \varepsilon_1) \text{ и}\\
&v' \in B(v_0, \varepsilon_2/2), \text{ за които } (x' + h'u', F(x') + h'v') \in M,\\
&\text{т. е. } F(x' + h'u') = F(x') + h'v'.
\end{aligned}
$$

Нека $\delta^* > 0$ удовлетворява неравенствата $\delta^* \leq \delta$ и $(L+1)\delta^* \leq \alpha'$. Тогава за точките x', за които $\|x' - x_0\| < \delta^*$, съответните точки $(x', F(x')) \in B_M\big((x_0, F(x_0)), \alpha'\big)$. Нека сега α и β са избрани в (2.1) така, че да са изпълнени условията $\alpha + \beta(2\|u_0\| + \varepsilon_1) < \delta^*$ и $\beta \leq \beta'$. В такъв случай имаме оценката

$$
\|x - hu_0 - x_0\| \leq \|x - x_0\| + h\|u_0\| \leq \alpha + \beta\|u_0\| < \delta^*.
$$

Следователно $(x - hu_0, F(x - hu_0)) \in B_M\big((x_0, F(x_0)), \alpha'\big)$. Тогава за $x' = x - hu_0$ и $h' = h \leq \beta \leq \beta'$ имаме, че $(x', F(x')) \in B_M\big((x_0, F(x_0)), \alpha'\big)$ и $h' \in (0, \beta']$ тъй като $h \leq \beta \leq \beta'$. От (2.4), получаваме, че съществуват $u' \in B(u_0, \varepsilon_1)$ и $v' \in B(v_0, \varepsilon_2/2)$, такива че $(x - hu_0 + hu', F(x - hu_0) + hv') \in M$, т. е.

$$
F(x + h(u' - u_0)) = F(x - hu_0) + hv'.
$$

Сега (2.2) ни позволява да заключим, че

$$
F(x + h(u' - u_0)) - hv' \neq F(x) - hv \text{ при всеки избор на } v \in B(v_0, \varepsilon_2),
$$

т. е.

$$
(2.5)\qquad F(x + h(u' - u_0)) - F(x) \neq h(v' - v) \text{ за произволно } v \in B(v_0, \varepsilon_2),
$$

а следователно и за всяко v, такова че $\|v - v'\| \leq \varepsilon_2/2$, тъй като това условие влече

$$\|v - v_0\| \leq \|v - v'\| + \|v' - v_0\| \leq \frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2} = \varepsilon_2.$$

Но сега, вземайки предвид неравенствата $\|x - x_0\| \leq \alpha < \delta^*$ и

$$\|x + h(u' - u_0) - x_0\| \leq \|x - x_0\| + h\|u' - u_0\| \leq \alpha + h\varepsilon_1 \leq \alpha + \beta\varepsilon_1 < \delta^* < \delta,$$

получаваме оценката

$$\|F(x + h(u' - u_0)) - F(x)\| \leq Lh\|u' - u_0\| \leq Lh\varepsilon_1 \leq h\frac{\varepsilon_2}{2},$$

където последното неравенство имаме благодарение на (2.3). Следователно съществува $v \in B(v', \varepsilon_2/2)$, такова че

$$F(x + h(u' - u_0)) - F(x) = h(v' - v).$$

Това заключение обаче противоречи на (2.5).

Окончателно получаваме, че ако $(u_0, v_0) \in C_M(x_0, F(x_0))$, то и $(-u_0, -v_0) \in C_M(x_0, F(x_0))$. Оттук и от изпъкналостта на конуса C_M следва твърдението на теоремата, а именно, че

$$\begin{gathered}\text{ако векторите } (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in C_M(x_0, F(x_0)), \text{ то и векторът}\\ (\lambda u_1 + \mu u_2, \lambda v_1 + \mu v_2) \in C_M(x_0, F(x_0)) \text{ за произволни } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.\end{gathered}$$

Теорема 2.3 ([4]). Нека X е банахово пространство и $T : X \to X^*$ е собствено монотонно изображение (т. е. T е с нетривиален домейн $D(T)$=$\{x \in X : T(x) \neq \emptyset\}$). Тогава за всяка точка $(x_0, p_0) \in \operatorname{gph} T$ конусът на Кларк $C_{\operatorname{gph} T}(x_0, p_0) \subset X \times X^*$ е монотонно множество.

Доказателство. Нека (u^i, v^i), $i = 1, 2$, са две точки от $C_{\operatorname{gph} T}(x_0, p_0)$, а редицата от положителни числа $\{h_n\}$ е такава, че $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0^+$. Тогава знаем, че съществуват редици $\{u^i_n\}$ и $\{v^i_n\}$ от елементи съответно на X и X^*, такива че $u^i_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u^i$, $v^i_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v^i$ и също така

$$(x_0 + h_n u^i_n, p_0 + h_n v^i_n) \in \operatorname{gph} T \quad \text{ за } i = 1, 2 \text{ и } n \geq 0.$$

Тъй като T има монотонна графика, то

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle (x_0 + h_n u^1_n) - (x_0 + h_n u^2_n), (p_0 + h_n v^1_n) - (p_0 + h_n v^2_n) \right\rangle \\ &= h_n^2 \left\langle u^1_n - u^2_n, v^1_n - v^2_n \right\rangle. \end{aligned}$$

Делим на $h_n^2 \neq 0$ и след граничен преход при $n \to \infty$ получаваме

$$\left\langle u^1 - u^2, v^1 - v^2 \right\rangle \geq 0,$$

т. е. $C_{\operatorname{gph} T}(x_0, p_0)$ е монотонно множество.

Теорема 2.4. Нека $T : X \to X^*$ е собствен монотонен оператор в банахово пространство X. Тогава ако $(x, p) \in \operatorname{gph} T$, то за всяко $(u, v) \in C_{\operatorname{gph} T}(x, p)$ имаме, че

$$\langle u, v \rangle \geq 0,$$

където $\langle \cdot, \cdot \rangle$ са обичайните скобки на дуалност между X и X^*.

Доказателство. От $(u, v) \in C_{\operatorname{gph} T}(x, p)$ следва, че за всяка редица $(x_n, p_n) \xrightarrow[\operatorname{gph} T]{} (x, p)$ и за всяка редица от положителни числа $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0^+$ могат да се намерят редици от елементи съответно на X и X^*, такива че

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u, \quad v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v$$

и

$$(x_n + h_n u_n, p_n + h_n v_n) \in \operatorname{gph} T \quad \text{за всяко } n \geq 0,$$

т. е. $x_n + h_n u_n = x'_n$, $p_n + h_n v_n = p'_n$, като $(x'_n, p'_n) \in \operatorname{gph} T$ за всяко $n \geq 0$.

От монотонността на T за точките (x_n, p_n), $(x'_n, p'_n) \in \operatorname{gph} T$ имаме, че

$$\begin{aligned} \langle x'_n - x_n, p'_n - p_n \rangle &\geq 0 \qquad \text{за всяко } n \geq 0, \\ \langle h_n u_n, h_n v_n \rangle &\geq 0 \qquad \text{за всяко } n \geq 0. \end{aligned}$$

Като разделим на $h_n^2 > 0$ и извършим граничен преход по $n \to \infty$, получаваме търсеното неравенство

$$\langle u, v \rangle \geq 0.$$

Теорема 2.5. Нека X е банахово пространство и $T : X \to X^*$ е собствено изображение. Тогава, ако в точка (x, p) от $\operatorname{gph} T$, $C_{\operatorname{gph} T}(x, p)$ е максимално монотонно подмножество на $X \times X^*$, то е и линейно подпространство в $X \times X^*$.

Доказателство. Нека (x, p) е такава точка от $\operatorname{gph} T$, в която съответният конус на Кларк към $\operatorname{gph} T$ в нея удовлетворява условието на теоремата.

Нека $(u, v) \in C_{\operatorname{gph} T}(x, p)$. Ще покажем, че $(-u, -v) \in C_{\operatorname{gph} T}(x, p)$.

Нека $(u_1, v_1) \in C_{\operatorname{gph} T}(x, p)$ е произволно. Тогава

$$\langle -u - u_1, -v - v_1 \rangle = \langle u + u_1, v + v_1 \rangle .$$

Но тъй като $C_{\operatorname{gph} T}(x, p)$ е изпъкнал конус, то от $(u, v), (u_1, v_1) \in C_{\operatorname{gph} T}(x, p)$ имаме и $(u + u_1, v + v_1) \in C_{\operatorname{gph} T}(x, p)$ и от Теорема 2.4 следва, че

$$\langle u + u_1, v + v_1 \rangle \geq 0.$$

Следователно

$$\langle -u - u_1, -v - v_1 \rangle \geq 0 \qquad \text{за всяко } (u_1, v_1) \in C_{\operatorname{gph} T}(x, p)$$

и от максималната монотонност на $C_{\operatorname{gph} T}(x, p)$ имаме, че $(-u, -v) \in C_{\operatorname{gph} T}(x, p)$.

От изпъкналостта на конуса на Кларк твърдението на теоремата следва непосредствено.

Теорема 2.6. Нека X е банахово пространство, $T : X \to X^*$ е собствен монотонен оператор, чиято графика е изпъкнало множество, и чийто домейн $D(T)$ е гъст в някое отворено подмножество A на X. Тогава T е еднозначен в $A \cap D(T)$.

Доказателство. Допускаме, че съществува $u_0 \in D(T) \cap A$, такова че T не е еднозначен в u_0, т. е. съществуват поне $v_1, v_2 \in T(u_0)$, $v_1 \neq v_2$. Нека $u \neq u_0$, $u \in D(T) \cap A$, $v \in T(u)$. За всяко $1 > \lambda > 0$ образуваме

$$\begin{aligned} u_\lambda &= \lambda u_0 + (1-\lambda)u, \\ v_\lambda^1 &= \lambda v_1 + (1-\lambda)v, \\ v_\lambda^2 &= \lambda v_2 + (1-\lambda)v. \end{aligned}$$

От изпъкналостта на графиката на T имаме, че (u_λ, v_λ^1), (u_λ, v_λ^2) принадлежат на графиката на T за всяко λ, такова че $\lambda \in (0,1)$.

От монотонността на T следва

$$0 \leq \left\langle u_\lambda - u_0, v_\lambda^2 - v_1 \right\rangle = (1-\lambda) \left\langle u - u_0, v_\lambda^2 - v_1 \right\rangle,$$

т. е.

$$0 \leq \left\langle u - u_0, v_\lambda^2 - v_1 \right\rangle \text{ за всяко } \lambda \in (0,1).$$

При граничен преход по $\lambda \to 1^-$ получаваме

$$0 \leq \langle u - u_0, v_2 - v_1 \rangle .$$

Аналогично получаваме, че

$$0 \leq \langle u - u_0, v_1 - v_2 \rangle .$$

Следователно

$$0 = \langle u_0 - u, v_1 - v_2 \rangle .$$

От вида на дефиниционната област на T е ясно, че горното равенство е в сила за точки u от гъсто множество в отвореното множество A. Оттук непосредствено следва, че $v_1 = v_2$, което е в противоречие с направеното допускане.

Като непосредствено следствие на Теорема 2.3 и Теорема 2.6 получаваме

Следствие 2.7. Нека X е банахово пространство и $T : X \to X^*$ е собствено монотонно изображение (т. е. $D(T) \neq \emptyset$). Тогава изображението от X в X^*, чиято графика е конусът на Кларк към $\operatorname{gph} T$ в дадена нейна точка, е еднозначно изображение във всяка точка от вътрешността на дефиниционната си област.

Определение 2.8. Нека X е банахово пространство. Вектор $v \in X$ се нарича *хипердопирателна* към множеството $K \subset X$ в точката $x \in K$, ако за някое $\varepsilon > 0$ $y + hw \in K$ за произволни $y \in B_K(x, \varepsilon)$, $w \in B(v, \varepsilon)$ и $h \in (0, \varepsilon]$.

Очевидно всяка хипердопирателна към K в точка $x \in K$ се съдържа в $C_K(x)$.

Възможно е хипердопирателни въобще да не съществуват.

Теорема 2.9 (Рокафелар, в [3])**.** Нека съществува поне една хипердопирателна към K в x. Тогава множеството от всички хипердопирателни към K в x съвпада с $\operatorname{int} C_K(x)$.

Теорема 2.10. Нека X е банахово пространство, $F : X \to X^*$ е монотонно изображение, такова че $D(F) \neq \emptyset$. Тогава не съществуват хипердопирателни към $\operatorname{gph} F$ в произволна точка от $\operatorname{gph} F$.

Доказателство. Допускаме противното. Нека $x_0 \in D(F)$ и в $(x_0, F(x_0))$ съществува поне една хипердопирателна към $\operatorname{gph} F$ и нека тя е (u_0, v_0). От теоремата на Рокафелар имаме $(u_0, v_0) \in \operatorname{int} C_{\operatorname{gph} F}(x_0, F(x_0))$.

Означаваме с $S_{\operatorname{gph} F}(x_0, F(x_0))$ изображението от X в X^*, чиято графика е $C_{\operatorname{gph} F}(x_0, F(x_0))$. Оттук $u_0 \in \operatorname{int} D(S_{\operatorname{gph} F}(x_0, F(x_0)))$ и съществува $\gamma > 0$, такова че $(u_0, v) \in S_{\operatorname{gph} F}(x_0, F(x_0))$ за всяко $v \in B(v_0, \gamma)$.

Получаваме противоречие със Следствие 2.7, което твърди, че изображението от X в X^*, чиято графика е конусът на Кларк към $\operatorname{gph} F$ в произволна нейна точка, е еднозначно изображение от X в X^* във всяка точка от вътрешността на дефиниционната си област.

Глава 3

Монотонни оператори. Локални свойства

Теорема 3.1. Нека X е банахово пространство и $T : X \to X^*$ е максимално монотонно изображение, такова че $\operatorname{int} D(T) \neq \varnothing$. Тогава рестрикцията му до отворено множество в $\operatorname{int} D(T)$ е максимално монотонно изображение.

Доказателство. Нека $A \subset D(T)$ е отворено множество. Разглеждаме рестрикцията $T|_A$ и допускаме, че тя не е максимално монотонна в A, т. е. съществува $y \in A$ и $(y, q) \notin \operatorname{gph} T|_A$, такива че за всяко $(x, p) \in \operatorname{gph} T|_A$ имаме $\langle x - y, p - q\rangle \geq 0$.

От максималната монотонност на T следва, че съществува $(x', p') \in \operatorname{gph} T$, $x' \notin A$, такова че $\langle x' - y, p' - q\rangle < 0$. Точката $y \in A$ и понеже A е отворено, то съществува $\delta > 0$, такова че щом $\|x - y\| < \delta$, то $x \in A$.

Нека положим

$$x_\lambda := y + \lambda(x' - y), \quad \lambda \in (0, 1). \tag{3.1}$$

Тогава $\|x_\lambda - y\| = \lambda\|x' - y\|$ и за достатъчно малки λ имаме $\|x_\lambda - y\| < \delta$, т. е. $x_\lambda \in A$. Тъй като $A \subset D(T)$, то съществува $p_\lambda \in T(x_\lambda)$ и следователно $(x_\lambda, p_\lambda) \in \operatorname{gph} T|_A$. За (y, q) имаме

$$\begin{aligned}\langle y - x_\lambda, q - p_\lambda\rangle &= \langle \lambda(y - x'), q - p_\lambda\rangle = \lambda\langle y - x', q - p'\rangle + \lambda\langle y - x', p' - p_\lambda\rangle \\ &< \lambda\langle y - x', p' - p_\lambda\rangle.\end{aligned} \tag{3.2}$$

От представянето (3.1) изразяваме y

$$y = \frac{x_\lambda - \lambda x'}{1 - \lambda},$$

заместваме го в (3.2) и получаваме

$$\begin{aligned}\langle y - x_\lambda, q - p_\lambda\rangle < \lambda\langle y - x', p' - p_\lambda\rangle &= \lambda\left\langle \frac{x_\lambda - \lambda x'}{1 - \lambda} - x', p' - p_\lambda\right\rangle \\ &= \frac{\lambda}{1 - \lambda}\langle x_\lambda - \lambda x' - x' + \lambda x', p' - p_\lambda\rangle = \frac{\lambda}{1 - \lambda}\langle x_\lambda - x', p' - p_\lambda\rangle < 0,\end{aligned}$$

тъй като (x_λ, p_λ) и $(x', p') \in \operatorname{gph} T$.

Полученото противоречие доказва верността на твърдението на теоремата.

В статията си [7] Борвейн и Фитцпатрик доказват, че ако X е банахово пространство, $T : X \to X^*$ е монотонен оператор и x е поглъщаща точка на неговият домейн $D(T)$, то T е локално ограничен в x. Да напомним, че за произволно множество $S \subseteq X$ точката $x \in S$ се нарича *поглъщаща* за S, ако $S_x = X$, където $S_x := \{y \in X : y = t(s - x), s \in S, t > 0\}$.

Тук доказваме следната

Теорема 3.2. Нека X е банахово пространство. Нека $T : X \to X^*$ е монотонен оператор, такъв че неговият домейн $D(T)$ е гъсто G_δ множество в отворено множество A. Тогава T е локално ограничено във всяка точка от $D(T) \cap A$.

Доказателство. Нека $D(T) \cap A$. Можем да приемем, че при транслация точката x отива в 0 и $0 \in T(0)$. Запазваме същите означения за транслираните образи на $D(T)$ и A.

Образуваме множеството $\Pi = \{y \in X : y = tz, z \in D(T), t > 0\}$. Ясно е, че то е гъсто и G_δ множество в X.

Нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е изпъкнала полунепрекъсната отдолу функция, чийто домейн $\operatorname{dom}(f) := \{x \in X : f(x) < \infty\}$ е такъв, че $\operatorname{dom}(f) \supseteq D(T)$ и $f(0) = 0$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно реално число. Разглеждаме множеството

$$C := \{x \in X : f(x) \le \varepsilon\}.$$

Тъй като f е изпъкнала и полунепрекъсната отдолу функция, то C е изпъкнало и затворено.

За всяко $x \in \Pi$ имаме, че съществува $r > 0$, такова че $rx \in D(T)$ и следователно $f(rx) < \infty$. Избираме $\lambda > 0$, такова че $\lambda f(rx) < \varepsilon$ и $\lambda < 1$. Тогава $\lambda rx \in C$, защото

$$f(\lambda rx) \le \lambda f(rx) + (1 - \lambda) f(0) = \lambda f(rx) < \varepsilon.$$

Следователно, ако означим $C_n := nC$ за $n \ge 1$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \supseteq \Pi. \tag{3.3}$$

Тъй като Π е гъсто и G_δ в X, то Π може да се представи по следния начин

$$\Pi = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Pi_i,$$

където Π_i е гъсто и отворено множество за всяко $i \in \mathbb{N}$.

От (3.3) имаме, че

$$\varnothing = \Pi \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\Pi \setminus C_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \Pi_i \right) \setminus C_n \right)$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} (\Pi_i \setminus C_n).$$

Ако допуснем, че не съществува $n_0 \in \mathbb{N}$, такова че C_{n_0} да е с непразна вътрешност, то тогава $\Pi_i \setminus C_n$ ще са отворени и гъсти и от теоремата на Бер ще следва, че ще имат непразно сечение, което води до противоречие.

Следователно съществува $n_0 \geq 1$, такова че $\operatorname{int} C_{n_0} \neq \varnothing$, а оттук и $\operatorname{int} C \neq \varnothing$.

Лесно се вижда, че $0 \in \operatorname{int} C$. Тогава съществува $\delta > 0$, такова че щом $\|x\| < \delta$, то $x \in C$.

Нека сега разгледаме функцията $f : X \to (-\infty, \infty]$, дефинирана като

$$f(x) := \sup\{\langle y^*, x - y \rangle : y^* \in T(y),\ \|y\| \leq 1\}.$$

Функцията f е неотрицателна, тъй като $0 \in T(0)$, и е изпъкнала и полунепрекъсната отдолу като супремум на непрекъснати линейни функционали.

Нека $x \in \Pi$. Можем да намерим $t > 0$, такова че $T(tx) \neq \varnothing$.

Взимаме произволно $u^*(t) \in T(tx)$. За всяко $y^* \in T(y)$

$$\langle y^*, tx - y \rangle \leq \langle u^*(t), tx - y \rangle,$$

тъй като T е монотонен. От това, че $0 \in T(0)$ имаме също, че $f(0) = 0$. Следователно

$$f(tx) \leq \sup\{\langle u^*(t), tx - y \rangle : \|y\| \leq 1\} < \infty.$$

От направените по-горе разсъждения имаме, че съществува $\delta > 0$, такова че $f(x) \leq 1$, когато $\|x\| \leq 2\delta$, или, което е еквивалентно, ако $y^* \in T(y)$, $\|y\| \leq 1$, $\|x\| \leq 2\delta$, то

$$\langle y^*, x \rangle \leq \langle y^*, y \rangle + 1.$$

Следователно, ако $y^* \in T(y)$ и $\|y\| \leq \delta$, то

$$2\delta\|y^*\| = \sup\{\langle y^*, x \rangle : \|x\| \leq 2\delta\} \leq \|y^*\|.\|y\| + 1 \leq \delta\|y^*\| + 1$$

и

$$\|y^*\| \leq 1/\delta,$$

с което локалната ограниченост на T е установена.

Теорема 3.3. Нека X е банахово пространство и $T : X \to X^*$ е максимално монотонно изображение, чийто домейн $D(T)$ е гъсто G_δ подмножество на някое отворено множество A' в X. Тогава върху всяко отворено подмножество A на A' рестрикцията на T върху A е максимално монотонно изображение в смисъл, че за всяко $(y, q) \notin \operatorname{gph} T$, където $y \in A$, съществува $(x_0, p_0) \in \operatorname{gph} T|_A$, за което $\langle x_0 - y, p_0 - q \rangle < 0$.

Доказателство. Допускаме противното на твърдението на теоремата, т. е. съществува $(y,q) \notin \operatorname{gph} T$, $y \in A$:

$$\langle x - y, p - q \rangle \geq 0 \text{ за всяко } (x,p) \in \operatorname{gph} T|_A.$$

От максималната монотонност на T съществува $(x', p') \in \operatorname{gph} T$:

$$\langle x' - y, p' - q \rangle = -\varepsilon < 0, \quad x' \notin A.$$

Полагаме $\Delta := \|x' - y\|$. От Теорема 3.2 следва, че T е локално ограничен в x', т. е. съществуват $\delta > 0$ и константа $M > 0$, такива че щом $x'' \in B(x', \delta) \bigcap D(T)$, то $\|p''\| \leq M$ за всяко $p'' \in T(x'')$.

Без ограничение на общността предполагаме, че $\delta < \Delta$ и $B(x', \delta) \subset A'$. Означаваме

$$\tilde{x} = x' + \frac{\delta^*}{\Delta}(y - x'),$$

където $\delta^* > 0$ е такова, че

$$\delta^* \leq \min\left\{\frac{\delta}{2}; \frac{\varepsilon}{8(M + \|q\|)}\right\}.$$

Разглеждаме отвореното множество

$$S = \left\{\tilde{x} + \nu' d,\ \|d\| = 1,\ \nu' < \nu := \min\left\{\delta^*; \frac{\varepsilon\delta^*}{8M(\Delta + 2\delta^*)}\right\}\right\}, \quad S \subset A'.$$

От гъстотата на $D(T)$ в A' следва, че $S \cap D(T) \neq \emptyset$.

Нека $x^* \in S \cap D(T)$ е произволно. Тогава съществуват вектор d с $\|d\| = 1$ и число $\nu' < \nu$, такива че

$$x^* = \tilde{x} + \nu' d.$$

Нека $p^* \in T(x^*)$. От монотонността на T

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x' - x^*, p' - p^* \rangle = \langle x' - (\tilde{x} + \nu' d), p' - p^* \rangle \\ &= \left\langle (\tilde{x} - y)\frac{\|x' - \tilde{x}\|}{\|\tilde{x} - y\|} - \nu' d, p' - p^* \right\rangle. \end{aligned}$$

Следователно

$$\langle \tilde{x} - y, p' - p^* \rangle \geq \nu' \langle d, p' - p^* \rangle \cdot \frac{\|\tilde{x} - y\|}{\|x' - \tilde{x}\|} \geq -2\nu M \frac{(\Delta + \delta^*)}{\delta^*}.$$

Оттук

$$\langle x^* - y, p' - p^* \rangle + \langle \tilde{x} - x^*, p' - p^* \rangle \geq -2\nu M \frac{(\Delta + \delta^*)}{\delta^*},$$

$$\langle x^* - y, p' - p^* \rangle \geq -2\nu M \frac{(\Delta + \delta^*)}{\delta^*} - 2\nu M \geq -2\nu M \frac{(\Delta + 2\delta^*)}{\delta^*} \geq -\varepsilon/4.$$

За всяко $x^* \in S \cap D(T)$ и всяко $p^* \in T(x^*)$ имаме, че

$$\langle x^* - y, p^* - q\rangle \leq -\varepsilon/2,$$

тъй като

$$\begin{aligned}-\varepsilon &= \langle x' - y, p' - q\rangle = \langle x' - x^* + x^* - y, p' - p^* + p^* - q\rangle \\ &= \langle x' - x^*, p' - p^*\rangle + \langle x' - x^*, p^* - q\rangle + \langle x^* - y, p' - p^*\rangle + \langle x^* - y, p^* - q\rangle \\ &\geq 0 - (\delta^* + \nu)(M + \|q\|) - \varepsilon/4 + \langle x^* - y, p^* - q\rangle \\ &\geq -\varepsilon/4 - \varepsilon/4 + \langle x^* - y, p^* - q\rangle\,.\end{aligned}$$

Построяваме отворения конус с връх точката y

$$K = \{z \in X : z = t(x - y),\ x \in S,\ t > 0\}.$$

Множеството $K \cap A \neq \emptyset$ е отворено и следователно съществува $\tilde{y} \in D(T) \cap K \cap A$. От Теорема 3.2 имаме, че T е локално ограничено в $\tilde{y}$, т. е. съществуват константа M' и $\delta' > 0$, такива че щом $y'' \in B(\tilde{y}, \delta') \cap D(T)$, $\|p''\| \leq M'$ за всяко $p'' \in T(y'')$.

Без ограничение на общността вземаме δ' толкова малко, че $B_0(\tilde{y}, \delta') \subset K \cap A$. Тъй като $D(T)$ е гъсто в S, то съществува $x^* \in S \cap D(T)$, такова че сечението на $B_0(\tilde{y}, \delta')$ и отсечката, свързваща y и x^* е различно от празното множество, т. е. съществува $1 > \lambda > 0$, такова че

$$y' = y + \lambda(x^* - y) \in B_0(\tilde{y}, \delta'). \tag{3.4}$$

Следователно съществува $\delta'' > 0$, такова че

$$B_0(y', \delta'') \subset B_0(\tilde{y}, \delta').$$

Нека $C := \{y'' : \|y' - y''\| < \mu\}$, където $\mu < \delta''$ и

$$\mu \leq \frac{\lambda\varepsilon}{4}\Big(2M + M' + \|q\| + \frac{\lambda}{1-\lambda}(M + M')\Big).$$

Оттук $C \subset A$ и следователно съществува $y'' \in C$, такова че $y'' \in D(T)$ и

$$y'' = y + \lambda(x^* - y) + \mu' d$$

за някои μ' и d, такива че $\mu' < \mu$, $\|d\| = 1$.

Нека $p'' \in T(y'')$. Тогава

$$\begin{aligned}\langle y'' - y, p'' - q\rangle &= \langle \lambda(x^* - y) + \mu' d, p'' - q\rangle \\ &= \langle \lambda(x^* - y) + \mu' d, p'' - p^*\rangle + \langle \lambda(x^* - y) + \mu' d, p^* - q\rangle \\ &= \lambda\,\langle x^* - y, p^* - q\rangle + \mu'\,\langle d, p^* - q\rangle \\ &\quad + \mu'\,\langle d, p'' - p^*\rangle + \lambda\,\langle x^* - y, p'' - p^*\rangle \\ &\leq -\frac{\lambda\varepsilon}{2} + \mu'(M + \|q\|) + \mu'(M + M') + \lambda\,\langle x^* - y, p'' - p^*\rangle\,.\end{aligned} \tag{3.5}$$

От (3.4) изразяваме y по следния начин

$$y = (y' - \lambda x^*)/(1 - \lambda)$$

и го заместваме в дясната страна на (3.5), за да получим

$$\begin{aligned}
\langle y'' - y, p'' - q\rangle \le\ & -\frac{\lambda\varepsilon}{2} + \mu'(M + \|q\|) + \mu'(M + M') \\
& + \frac{\lambda}{1-\lambda}\langle x^* - \lambda x^* - y' + \lambda x^*, p'' - p^*\rangle \\
\le\ & -\frac{\lambda\varepsilon}{2} + \mu(M + \|q\|) + \mu(M + M') + \frac{\lambda}{1-\lambda}\langle x^* - y', p'' - p^*\rangle \\
=\ & -\frac{\lambda\varepsilon}{2} + \mu(M + \|q\|) + \mu(M + M') + \frac{\lambda}{1-\lambda}\langle x^* - y'', p'' - p^*\rangle \\
& + \frac{\lambda}{1-\lambda}\langle y'' - y', p'' - p^*\rangle \\
\le\ & -\frac{\lambda\varepsilon}{2} + \mu(2M + M' + \|q\|) + \frac{\lambda}{1-\lambda}\mu(M + M') \\
\le\ & -\frac{\lambda\varepsilon}{2} + \mu(2M + M' + \|q\| + \frac{\lambda}{1-\lambda}(M + M')) \\
\le\ & -\frac{\lambda\varepsilon}{2} + \frac{\lambda\varepsilon}{4} = -\frac{\lambda\varepsilon}{4} < 0.
\end{aligned}$$

Окончателно получаваме

$$\langle y'' - y, p'' - q\rangle < 0, \quad \text{за всяко } (y'', p'') \in \operatorname{gph} T_{|A},$$

което е в противоречие с направеното допускане. Оттук следва верността на твърдението на теоремата.

Нека E е банахово пространство и $T : E \to E^*$ е оператор.

Определение 3.4 ([1]). Монотонният оператор T е *локално максимално монотонен*, ако за всяко отворено изпъкнало подмножество U на E^*, такова че $U \cap R(T) \neq \emptyset$, операторът T^{-1} е максимален в U.

Определение 3.5 ([1]). Ако рестрикцията на монотонен оператор T върху всяко отворено изпъкнало множество U, такова че $U \cap D(T) \neq \emptyset$, е максимална в U, то T се нарича *максимално монотонен локално*.

Забележка. От доказателството на Теорема 3.3 е ясно, че ако T е монотонен оператор, такъв че $D(T)$ е гъсто G_δ подмножество на E, то T е максимално монотонен локално.

Предположение. Ако T е локално максимално монотонен оператор и S е субдиференциал на индикаторна функция ψ_C на затворено изпъкнало множество C с непразна вътрешност V, такава че $D(T) \cap V \neq \emptyset$, тогава сумата $S + T$ е максимално монотонна.

Твърдение 3.6 ([1]). Нека предположението е в сила и T е локално максимално монотонен оператор в E. Тогава за всяко изпъкнало отворено множество U, такова че $U \cap D(T) \neq \emptyset$, рестрикцията на T върху U е максимално монотонна в U.

Следствие 3.7 ([1]). Ако T е субдиференциал на собствена изпъкнала полунепрекъсната отдолу функция, то T е максимално монотонен локално.

Определение 3.8. Функцията $f : X \to R$, където X е отворено в E, се нарича lower C^2, ако за всяко $\tilde{x} \in X$ има околност, в която f може да се представи като максимум на C^2 функции:

$$f(x) = \max_{s \in S} g_s(x),$$

където S е компактно топологично пространство, всяка функция $g_s(\cdot)$ е двукратно диференцуема във въпросната околност, стойностите на $g_s(\cdot)$ и нейните първи и втори частни производни са непрекъснати по съвкупността от променливите (x, s).

Лема 3.9. Ще докажем, че функциите $\{\nabla^2 g_s(x),\ s \in S\}$ са равномерно ограничени в околност на произволно $x_0 \in X$.

Доказателство. Фиксираме $x_0 \in X$ и $s_0 \in S$. Нека $\varepsilon > 0$ произволно. От непрекъснатостта на $\nabla^2 g_s(x)$ по съвкупността от променливите (x, s) имаме, че съществуват околност U_{s_0} на s_0 и $\delta(x_0, s_0) > 0$, такива че щом $\|x - x_0\| < \delta$ и $s \in U_{s_0}$, то

$$\|\nabla^2 g_s(x) - \nabla^2 g_{s_0}(x_0)\| < \varepsilon,$$

т. е.

$$\|\nabla^2 g_s(x)\| \leq \|\nabla^2 g_{s_0}(x_0)\| + \varepsilon.$$

Същото може да се направи за всяко $s \in S$, но S е компакт и следователно е възможно от покритието му с U_s околности да се избере крайно подпокритие $U_{s_1}, \ldots, U_{s_k}$.

Нека $\delta := \min\limits_{1 \leq i \leq k} \delta(x_0, s_i)$ и $2\mu := \varepsilon + \max\limits_{1 \leq i \leq k} \|\nabla^2 g_{s_i}(x_0)\|$. Тогава за всяко $s \in S$ и всяко x, такова че $\|x - x_0\| < \delta/2$, имаме $\|\nabla^2 g_s(x)\| \leq 2\mu$.

Нека E е хилбертово пространство. От направените разсъждения следва, че е възможно локално да се намери константа 2μ, такава че когато $2\mu I$ (където I е идентитетът в E) се добави към всичките тези билинейни оператори $\nabla^2 g_s$, да се получат само положително дефинитни оператори. Оттук съответните функции

$$g_s(x) + \mu\|x\|^2$$

са изпъкнали локално (доказателството е аналогично на изложеното в [12, стр. 103]). Същото важи и за функцията $f(x) + \mu\|x\|^2$, т. е. за всяко $x_0 \in X$ съществува $\mu > 0$, такова че функцията $f(x) + \mu\|x\|^2$ е изпъкнала в затворено изпъкнало множество C, такова че $x_0 \in \operatorname{int} C$. Оттук следва, че функцията

$$h(x) = f(x) + \mu\|x\|^2 + \psi_C(x),$$

където ψ_C е индикаторната функция на C, е собствена, изпъкнала, полунепрекъсната отдолу функция, като за всяко $x \in \operatorname{int} C$

$$\partial h(x) = \partial f(x) + 2\mu x,$$

където с ∂f е означен субдиференциалът на Кларк.

Теорема 3.10. Нека E е хилбертово пространство, X е отворено множество в E и $f : X \to \mathbb{R}$ е lower C^2 функция. Нека $x \in X$, $(x, x^*) \notin \operatorname{gph} \partial f$, където ∂f е субдиференциалът на f в смисъл на Кларк. Тогава съществува изпъкнало затворено множество C, такова че $C \subset X$, $x \in \operatorname{int} C$ и съществуват $y \in D(\partial f) \cap \operatorname{int} C = \operatorname{int} C$ и $y^* \in \partial f(y)$, такива че

$$\langle x^* - y^*, x - y\rangle < 0,$$

т. е. ∂f няма монотонно продължение в X.

Доказателство. Имаме, че $x \in \operatorname{int} C$ и $x^* \notin \partial f(x)$, т. е. $x^* + 2\mu x \notin \partial f(x) + 2\mu x$ или, което е еквивалентно,

$$x^* + 2\mu x \notin \partial h(x).$$

От Следствие 3.7 имаме, че ∂h е максимално монотонен локално и тъй като $x \in \operatorname{int} C$ и $x^* + 2\mu x \notin \partial h(x)$, то съществуват $y \in \operatorname{int} C$ и $y^* \in \partial h(y)$, такива че $y^* \in \partial f(y) + 2\mu y$ (т. е. $y^* = y_1^* + 2\mu y$, $y_1^* \in \partial f(y)$), за които

$$(*) \qquad \langle (x^* + 2\mu x) - y^*, x - y\rangle < 0,$$

$$\left\langle x^* + 2\mu x - y_1^* - 2\mu y, x - y\right\rangle < 0,$$

$$\left\langle x^* - y_1^*, x - y\right\rangle + 2\mu \langle x - y, x - y\rangle < 0$$

и окончателно

$$\left\langle x^* - y_1^*, x - y\right\rangle < 0.$$

Забележка. Предходната теорема може да бъде доказана и като се използва Теорема 3.1. Тъй като $\partial h : X \to X^*$ е максимално монотонно изображение [10, стр. 59], то съществува $y \in \operatorname{int} C$, такова че за всяко $y^* \in \partial h(y)$

$$\langle (x^* + 2\mu x) - y^*, x - y\rangle < 0$$

и доказателството продължава по аналогичен начин след $(*)$.

Глава 4

Субдиференциали от втори ред. Достатъчни условия от втори ред за локално решение на минимизационни задачи с $C^{1,1}$ данни

Нека U е непразно отворено подмножество в $\mathbb{R}^n$. Означаваме с $C^{1,1}(U)$ класът от всички реалнозначни функции f, които са диференцуеми в U и чиито градиент ∇f е локално липшицово изображение в U (т. е. удовлетворява условието на Липшиц в околност на всяка точка $x_0 \in U$). Следователно ∇f е диференцуемо почти навсякъде в U от теоремата на Радемахер, т. е. f е двукратно диференцуема почти навсякъде в U.

Определение 4.1. Нека $f \in C^{1,1}(U)$ и нека $x_0 \in U$. *Субдиференциал от втори ред в смисъл на Кларк* $\partial^2_C f(x_0)$ на f в точката x_0 или *обобщена Хесианова матрица* на f в точката x_0 се нарича множеството матрици, дефинирано като изпъкналата и затворена обвивка на множеството:

$$\left\{ M \mid \exists\, x_i \xrightarrow[i\to\infty]{} x_0 : f \text{ е двукратно диференцуема в } x_i \text{ и } \nabla^2 f(x_i) \to M \right\}.$$

По конструкция $\partial^2_C f(x_0)$ е непразно компактно изпъкнало множество от симетрични матрици, което се свежда до едноелементното множество $\{\nabla^2 f(x_0)\}$, когато f е двукратно непрекъснато диференцуема в x_0.

Пример 4.2. Нека $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е двукратно непрекъснато диференцуема в U функция ($g \in C^2(U)$) и разглеждаме функцията f, дефинирана в U като

$$f(x) = [g^+(x)]^2, \text{ където } g^+(x) = \max\{g(x), 0\}.$$

Ясно е, че $f \in C^{1,1}(U)$ и е лесно да се провери, че за всяко $x_0 \in U$,

$$\partial_C^2 f(x_0) = \begin{cases} 2g(x_0)\nabla^2 g(x_0) + 2\nabla g(x_0)\nabla g(x_0)^T, & \text{ако } g(x_0) > 0, \\ 0, & \text{ако } g(x_0) < 0, \\ \left\{2\alpha\nabla g(x_0)\nabla g(x_0)^T, \alpha \in [0,1]\right\}, & \text{ако } g(x_0) = 0. \end{cases}$$

Свойствата на $\partial_C^2 f$ се извличат от тези на обобщените производни на изображения с векторни стойности [8, 9]. Тук ще цитираме две основни свойства, които ще са ни необходими по-нататък:

Свойство 1. Многозначното изображение $x \to \partial_C^2 f(x)$ е локално ограничено в x_0, т. е. съществува околност V на x_0 и константа K, такива че

$$\sup\{\|M\| \mid M \in \partial_C^2 f(x),\ x \in V\} \leq K.$$

Свойство 2. $\partial_C^2 f$ е полунепрекъснато отгоре (или затворено) многозначно изображение в следния смисъл: ако $x_n \to x_0$ и ако $M_n \to M_0$ като $M_n \in \partial_C^2 f(x_n)$ за всяко n, то тогава $M_0 \in \partial_C^2 f(x_0)$.

Функцията на две променливи, дефинирана като

$$(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \max\{\langle Mu, v\rangle \mid M \in \partial_C^2 f(x_0)\},$$

Ириà-Урутѝ [9] нарича опорна бифункция на $\partial_C^2 f(x_0)$. Означаваме я с $f^{\circ\circ}(x_0, u, v)$. Това е симетрична по u и v функция, която играе ролята на обобщена производна по посока от втори ред на функцията f в точката x_0.

В [2, 6] е дадена без доказателство аналитичната формулировка на $f^{\circ\circ}(x_0, u, v)$ в термините на градиентното изображение ∇f, а именно

$$\max_{M \in \partial_C^2 f(x_0)} \langle Mu, v\rangle = f^{\circ\circ}(x_0, u, v) = \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{\langle \nabla f(x + \lambda u), v\rangle - \langle \nabla f(x), v\rangle}{\lambda},$$

която тук ще бъде доказана.

Доказателството ѝ непосредствено следва от следните леми:

Лема 4.3. При фиксирано $v \neq 0$ функцията $\langle \nabla f(\cdot), v\rangle$ е локално липшицова.

Доказателство. Нека $x_0 \in U$. Тъй като ∇f е локално липшицово, то съществува околност $W \ni x_0$ и константа $L \geq 0$, такива че за всички $x, y \in W$ имаме

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Оттук следва

$$|\langle \nabla f(x), v\rangle - \langle \nabla f(y), v\rangle| \leq \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|\|v\| \leq L\|v\|\|x - y\|$$

и следователно в W функцията $\langle \nabla f(\cdot), v\rangle$ е локално липшицова с константа $L\|v\|$.

Следствие 4.4. За всяко v функцията $\langle \nabla f(\cdot), v\rangle$ е диференцуема по всяка посока u и тъй като е диференцуема почти навсякъде в U, то в точките ѝ на диференцуемост производната ѝ по посока u има вида $\left\langle \nabla^2 f(\cdot)u, v\right\rangle$.

Лема 4.5. Нека $v \neq 0$, $u \neq 0$, $u, v \in \mathbb{R}^n$. Тогава

$$f^{\circ\circ}(x, u, v) \leq \limsup \left\{\left\langle \nabla^2 f(y)u, v\right\rangle : y \to x,\ y \notin N\right\},$$

където с N е означено множеството от точки в U, в които ∇f не е диференцуемо.

Доказателство. Означаваме

$$\alpha := \limsup \left\{\left\langle \nabla^2 f(y)u, v\right\rangle : y \to x,\ y \notin N\right\}.$$

За всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че условията $y \in x + \delta B$, където B е единичното кълбо в $\mathbb{R}^n$ и $y \notin N$ водят до

$$\left\langle \nabla^2 f(y)u, v\right\rangle \leq \alpha + \varepsilon.$$

Избираме δ толкова малко, че множеството N да има нулева мярка в $x + \delta B$, и разглеждаме интервала

$$L_y = \left\{y + tu : 0 < t < \frac{\delta}{2\|u\|}\right\}.$$

Тъй като N има мярка нула в $x + \delta B$, от теоремата на Фубини следва, че за почти всяко $y \in x + \frac{\delta}{2}B$ интервалът L_y пресича множеството N в множество с нулева мярка.

Нека y е произволна точка в $x + \frac{\delta}{2}B$ с това свойство и нека $t \in \left(0, \frac{\delta}{2\|u\|}\right)$. Тогава

$$\langle \nabla f(y + tu), v\rangle - \langle \nabla f(y), v\rangle = \int_0^t \left\langle \nabla^2 f(y + su)u, v\right\rangle ds,$$

тъй като производната на $\langle \nabla f(\cdot)u, v\rangle$ съществува почти навсякъде в L_y.

Понеже $\|y + su - x\| < \delta$ за $0 < s < t$, следва че

$$\left\langle \nabla^2 f(y + su)u, v\right\rangle \leq \alpha + \varepsilon$$

и

$$\langle \nabla f(y + tu), v\rangle - \langle \nabla f(y), v\rangle \leq t(\alpha + \varepsilon)$$

за всяко $y \in x + \frac{\delta}{2}B$ с изключение на някакво множество с мярка нула и за всяко $t \in \left(0, \frac{\delta}{2\|u\|}\right)$. От непрекъснатостта на $\langle \nabla f(\cdot), v\rangle$ получаваме, че неравенството е изпълнено за всяко y в $x + \frac{\delta}{2}B$ и всяко $t \in \left(0, \frac{\delta}{2\|u\|}\right)$ и затова

$$f^{\circ\circ}(x, u, v) \leq \alpha + \varepsilon,$$

което трябваше да се докаже.

Следствие 4.6.

$$f^{\circ\circ}(x,u,v) = \limsup\left\{\left\langle \nabla^2 f(y)u, v\right\rangle,\ y \to x,\ y \notin N\right\}.$$

Следствие 4.7.

$$\limsup\left\{\left\langle \nabla^2 f(y)u, v\right\rangle,\ y \to x,\ y \notin N\right\} = \max_{M\in\partial^2_C f(x)} \langle Mu, v\rangle .$$

Доказателство. Ако $y \to x$, $y \notin N$ и $\nabla^2 f(y) \to M$, то $M \in \partial^2_C f(x)$, откъдето $\left\langle \nabla^2 f(y)u, v\right\rangle \to \langle Mu, v\rangle$ и получаваме непосредствено верността на твърдението.

Ако разгледаме например функцията f от Пример 4.2, то

$$f^{\circ\circ}(x_0,u,v) = 2\left[\langle \nabla g(x_0), u\rangle \langle \nabla g(x_0), v\rangle\right]^+ ,$$

когато $g(x_0) = 0$.

Като следствие от току-що доказаната връзка в [6] е доказана

Теорема 4.8 ([6])**.** Нека $f \in C^{1,1}(U)$ и нека $[a,b] \subset U$. Тогава съществуват $c \in (a,b)$ и $M_c \in \partial^2_C f(c)$, такива че

$$f(b) = f(a) + \langle \nabla f(a), b-a\rangle + \tfrac{1}{2}\langle M_c(b-a), b-a\rangle .$$

Пристъпваме към намиране на достатъчно условие от втори ред за това точката x_0 да е локално решение на минимизационна задача с $C^{1,1}$ данни (съответните необходими условия са доказани в [6]).

Разглеждаме следната задача:

$$\text{(P)} \qquad \min f(x), \qquad x \in U,$$

където U е отворено подмножество на $\mathbb{R}^n$ и f е $C^{1,1}$ функция в U.

Достатъчно условие от втори ред точката x_0 да бъде локално решение на тази задача дава

Теорема 4.9. Нека $x_0 \in U$ е такава, че $\nabla f(x_0) = 0$ и всички матрици от $\partial^2_C f(x_0)$ са положително дефинитни. Тогава x_0 е точка на локален минимум за задачата (P).

Доказателство. Допускаме, че x_0 не е точка на локален минимум. Тогава съществува редица $\{x_k\} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$, без ограничение на общността $x_k \in U$ за всяко $k \geq 1$, и такава че

$$f(x_k) < f(x_0), \qquad \text{за всяко } k \geq 1.$$

Полагаме $d_k := \dfrac{x_k - x_0}{\|x_k - x_0\|}$. От Теорема 4.8 следва, че

$$f(x_k) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x_k - x_0\rangle + \tfrac{1}{2}\langle A_k(x_k - x_0), x_k - x_0\rangle ,$$

където $k \geq 1$, $A_k \in \partial^2_C f(\overline{x}_k)$ и $\overline{x}_k \in (x_0, x_k)$.

Оттук

$$0 > f(x_k) - f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), x_k - x_0 \rangle + \tfrac{1}{2} \langle A_k(x_k - x_0), x_k - x_0 \rangle ,$$

$$0 > \tfrac{1}{2} \langle A_k(x_k - x_0), x_k - x_0 \rangle ,$$

$$0 > \langle A_k d_k, d_k \rangle \quad \text{за всички } k \geq 1. \tag{4.1}$$

Тъй като $\|d_k\| = 1$ за всяко $k \geq 1$, то съществува множество индекси K, такова че $\{d_k\}_K$ клони към някакво d и $\|d\| = 1$.

От друга страна $\partial^2_C f$ е локално ограничено (Свойство 1), а значи и редицата $\{A_k\}_K$ е ограничена и следователно има сходяща подредица.

Нека A е границата на тази подредица. От полунепрекъснатостта на $\partial^2_C f$ (Свойство 2) матрицата $A \in \partial^2_C f(x_0)$. Като извършим граничен преход в (4.1), получаваме, че

$$\langle Ad, d \rangle \leq 0,$$

а това е в противоречие с положителната определеност на A. Следователно x_0 е точка на локален минимум за задачата (P).

Разглеждаме задачата

$$\text{(Q)} \qquad \begin{aligned} &\min f(x) \\ &g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ &h_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, l, \end{aligned}$$

където f, g_i, $i = 1, \ldots, m$, h_j, $j = 1, \ldots, l$, са $C^{1,1}$ функции в $\mathbb{R}^n$.

Образуваме лагранжиана

$$L(x, \lambda, \mu) := f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j h_j(x),$$

където λ_i, $i = 1, \ldots, m$, μ_j, $j = 1, \ldots, l$ са произволни реални числа. Ясно е, че като функция на x лагранжианът е $C^{1,1}$ в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4.10. Нека x_0 е допустима точка за задачата (Q), такава че съществуват реални числа $\lambda_i \geq 0$ за $i \in I = \{i : g_i(x_0) = 0\}$, $\lambda_i = 0$ за $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus I$ и μ_j за $j = 1, \ldots, l$, за които $\nabla L(\cdot, \lambda, \mu)(x_0) = 0$ и всички матрици в $\partial^2_C L(\cdot, \lambda, \mu)(x_0)$ са положително дефинитни. Тогава x_0 е локално решение на задачата (Q).

Доказателство. От доказателството на Теорема 4.9 се вижда, че точката x_0 е точка на локален минимум на функцията $L(\cdot, \lambda, \mu)$, където λ и μ удовлетворяват условието на теоремата. Следователно съществува околност на точката x_0, за всяко x от която е изпълнено

$$f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j h_j(x) \geq f(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_0) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j h_j(x_0).$$

Като отчетем факта, че x_0 е допустима точка, от горното неравенство получаваме, че за всяка допустима точка в упоменатата околност е изпълнено

$$f(x) \geq f(x_0),$$

което означава, че x_0 е локално решение на задачата (Q) при така направените предположения.

Библиография

[1] S. P. Fitzpatrick, R. R. Phelps. Are locally maximal monotone operators “maximal monotone locally”? Съобщение, направено на научна конференция, 29 юни 1992 год., Нюкясъл, Австралия.

[2] J.-B. Hiriart-Urruty. A new set valued second order derivative for convex functions. In: Fermat days’85, *Mathematics for Optimization* (Toulouse, 1985), North-Holland Math. Stud., **129**, North-Holland, Amsterdam, New York, 1986, 157–182.

[3] Ф. Кларк. *Оптимизация и негладкий анализ*. Москва, Наука, 1988.

[4] Ж.-П. Обен, И. Экланд. *Прикладной нелинейный анализ*. Москва, Мир, 1988.

[5] R. T. Rockafellar. Maximal monotone relations and the second derivatives of nonsmooth functions, *Ann. Inst. Henri Poincare*, **2** (1985) No 3, 167–184.

[6] J.-B. Hiriart-Urruty, J.-J. Strodiot, V. H. Nguyen. Generalized hessian matrix and second-order optimality conditions for problems with $C^{1,1}$ data, *Appl. Math. Optim.*, **11** (1984), 45–56.

[7] J. M. Borwein, S. P. Fitzpatrick. Local boundedness of monotone operators under minimal hypotheses, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **39** (1989), No 3, 439–441.

[8] F. H. Clarke. On the inverse function theorem, *Pacif. J. Math.*, **64** (1976), 97–102.

[9] J.-B. Hiriart-Urruty. Characterizations of the plenary hull of the generalized Jacobian matrix, *Math. Proggraming Study*, **17** (1982), 1–12.

[10] R. R. Phelps. *Convex functions, monotone operators and differentiability*, Lecture Notes in Mathematics, **1364**, Springer, 1993.

[11] S. Trojanski. On locally uniformly convex and differentiable norms in certain separable Banach spaces, *Studia Math.*, **37** (1971), 173–180.

[12] П. Кендеров, Г. Христов, А. Дончев, *Математическо оптимиране*, Университетско издателство, 1989.