Содержание

1. Введение.

1.1. Обозначения:

Через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ обозначим, соответственно, множества натуральных, целых, действительных и комплексных чисел. Буквой p (с или без индексов) обозначим простые числа. Через P_r обозначим любое натуральное число, имеющее не более r простых сомножителей в каноничном разложении (каждый простой сомножитель считается с кратностью). Эти числа называются почти простыми порядка r.

Формулы $U = \mathcal{O}(V)$ и $U \ll V$ обозначают, что $|U| \le cV$ для некоторой постоянной $c > 0$. Если постоянные в выражении $\mathcal{O}(V)$ и в формуле $U \ll V$ зависят, например, от α и β, то чтобы подчеркнуть ету зависимость, запишем $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(V)$ и соответственно $U \ll_{\alpha,\beta} V$.

Если одновременно $U \ll V$ и $V \ll U$, запишем $U \asymp V$. Если постоянные в последней формуле зависят, например, от α, то будем писать $U \asymp_\alpha V$.

Знак $\square$ обозначает конец доказательства или его отсутствие.

Суммы по x, пробегающие полную, соответственно приведенную систему вычетов по модулю q, будем обозначать через $\sum_{x(q)}$ и, соответственно $\sum_{x(q)^*}$. Суммы по натуральным числам x, не превосходящим величину Z, будем обозначать через $\sum_{x \le Z}$. Соответственно, $\sum_{p \le Z}$ означает, что переменная пробегает множества простых чисел, не превосходящих Z. Если $k \in \mathbb{Z}$, то $\sum_{\delta | k}$ означает, что суммирование ведется по всем натуральным числам δ, делящих k.

В диссертации часто встречаются суммы, где переменные пробегают сложные множества. Для етого введены некоторые сокращения. Суммы $\sum_{(\mathcal{D})}$, $\sum_{(\mathcal{R})}$, $\sum^*$, $\sum'$ и $\sum^{\#}$ определены, соответственно, на страницах 23, 49, 117, 140, и 147.

Далее, $\sum_{x,y\,:\,(100)}$, например, означает, что переменные x, y пробегают множество, заданное формулой (100). Отметим, что аналогичный смысл имеет обозначение $\max_{x,y\,:\,(100)}$. Точный смысл формул такого типа становится ясным из контекста.

Обозначим $p^l \parallel n$ если $p^l \mid n$ и $p^{l+1} \nmid n$. Через $(m_1, \dots, m_k)$ и $[m_1, \dots, m_k]$ мы обозначаем, соответственно, наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел $m_1,\dots,m_k$. Однако, если $y, z \in \mathbb{R}$, то через (y, z) обозначаем открытый интервал с концами y и z. Точный смысл выясняется всегда из контекста.

Жирными буквами будем обозначать трехмерные векторы. Например, $\mathbf{d} = \langle d_1, d_2, d_3 \rangle$ обозначает вектор с компонентами d_1, d_2, d_3. Как обычно, $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$.

Для простоты вместо $m \equiv n \pmod k$ часто будем использовать обозначение $m \equiv n\ (k)$. Иногда модуль сравнения k равен наибольшему общему делителю (a, b). Тогда будем писать $m \equiv n\ ((a, b))$.

Если $t \in \mathbb{R}$, то через $[t]$ будем обозначать целую часть числа t, $\{t\} = t - [t]$, $||t|| = \min_{n \in \mathbb{Z}} |t - n|$, $e(t) = \exp(2\pi i t)$, $e_q(t) = e(t/q)$.

Если $(a, q) = 1$, то обозначим через $\overline{(a)}_q$ вычет b по модулю q, удовлетворяющий $a\,b \equiv 1\ (q)$. Если значение модуля ясно из контекста, то для простоты будем писать $\overline{a}$. Например, $e_q(\overline{a})$ всегда означает $e_q(\overline{(a)}_q)$. Для любого $a \in \mathbb{Z}$ будем считать, что $e_1(\overline{a}) = 1$.

Будем пользоваться обычными обозначениями для основных функций в теории чисел:

$\mu(n)$ – функция Мёбиуса:

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{если } n = p_1 p_2 \dots p_r, \quad \text{где } p_1 < p_2 < \dots < p_r, \\ 0 & \text{если } n = p^2 m, \\ 1 & \text{если } n = 1; \end{cases}$$

$\varphi(n)$ – функция Эйлера – количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n;

$\Lambda(n)$ – функция Мангольда:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{если } n = p^k, \\ 0 & \text{если } n \neq p^k; \end{cases}$$

$\nu(n)$ – количество различных простых делителей числа n;

$\tau_k(n)$ – число решений уравнения $m_1 \dots m_k = n$, где $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$;

$\tau(n) = \tau_2(n)$;

$r(n)$ – число решений уравнения $x^2 + y^2 = n$, где $x, y \in \mathbb{Z}$;

$$\theta(x, q, m) = \sum_{p \le x,\, p \equiv m\ (q)} \log p\,, \qquad \theta(x) = \theta(x, 1, 0)\,;$$

$$\pi(x, q, m) = \sum_{p \le x,\, p \equiv m\ (q)} 1\,, \qquad \pi(x) = \pi(x, 1, 0)\,.$$

Пусть $x \in \mathbb{Z}$ и $p > 2$ – простое число. Символ Лежандра определяется следующим образом:

$$\left(\frac{x}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{если } x \text{ квадратичый вычет по модулю } p, \\ -1 & \text{если } x \text{ квадратичый невычет по модулю } p, \\ 0 & \text{если } p \mid x. \end{cases}$$

Пусть $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$ – нечетно и имеет каноническое представление $q = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ и пусть $x \in \mathbb{Z}$. Символ Якоби определяется следующим способом:

$$\left(\frac{x}{q}\right) = \left(\frac{x}{p_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{x}{p_s}\right)^{\alpha_s}.$$

Удобно считать, что $\left(\frac{x}{q}\right) = 1$ при $q = 1$ и $x \neq 0$.

Суммы Гаусса $\gamma(q)$, $S(q,m,n)$, $S(q,m)$ и $T(q,m)$; Клостермана $K(q,m,n)$ и Рамануджана $c_q(n)$, где $q \in \mathbb{N}$ и $m,n \in \mathbb{Z}$, определяются следующим образом:

$$\gamma(q) = \sum_{x(q)} \left(\frac{x}{q}\right) e_q(x) \qquad (\text{ для нечетных } q\ ), \tag{1}$$

$$S(q,m,n) = \sum_{x(q)} e_q(mx^2 + nx)\,, \qquad S(q,m) = S(q,m,0)\,, \tag{2}$$

$$T(q,m) = \sum_{x(q)^*} e_q(mx^2)\,, \tag{3}$$

$$K(q,m,n) = \sum_{x(q)^*} e_q(mx + n\overline{x})\,, \qquad c_q(m) = K(q,m,0)\,. \tag{4}$$

1.2. **Некоторые результаты аддитивной теории чисел.**

1.2.1. *Проблема Варинга.*

Согласно известной теореме Лагранжа, для каждого $N \in \mathbb{N}$ уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = N \tag{5}$$

разрешимо в целых числах x_1, x_2, x_3, x_4. Доказательство етой теоремы было опубликовано в 1770 г., хотя она была известна в древности. В настоящее время известны многие доказательства етой теоремы. Точная формула для числа решений (5) найдена Якоби. Вид етой формулы и ее доказательство можно найти, например, в [54], гл.8.

В 1770 г. Варинг высказал гипотезу о том, что для каждого натурального числа $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ можно найти $k = k(n) \in \mathbb{N}$, такое что для каждого $N \in \mathbb{N}$ уравнение

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_k^n = N \tag{6}$$

разрешимо в неотрицательных целых числах $x_1, \ldots, x_k$. Эта задача получила имя "проблемы Варинга". Она была решена в некоторых частных случаях в 19–ом веке. Полное решение было найдено в 1909 г. Гилбертом [51]. Доказательство Гильбета очень сложно. Более того, в доказательстве Гильберта величина k растет очень быстро с ростом n.

В 20–ых годах 20–ого века Харди и Литлвуд [42], [43] разработали так называемый „круговой метод" и при помощи етого метода нашли простое и естественое доказательство гипотезы Варинга. Обозначим через $G(n)$ наименьшее k, для которого уравнение (6) разрешимо в числах $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ для достаточно больших $N \in \mathbb{N}$. Харди и Литлвуд доказали, что $G(n) \ll n2^n$.

В 30–ых годах 20–ого века И.М. Виноградов (см. [4] – [6]) разработал метод тригонометрических сумм и таким образом значительно усовершенствовал круговой метод. Коротко обьясним основную идею. В обозначениях И.М. Виноградова, число решений уравнения (6) в натуральных числах равно интегралу

$$I_{k,n}(N) = \int_0^1 V(\alpha)^k \, e(-N\alpha)\, d\alpha\,,$$

где

$$V_n(\alpha) = \sum_{x \le N^{1/n}} e(\alpha x^n)\,. \tag{7}$$

Отрезок интегрирования разбивается на две части: множество точек, находящихся близко к рациональным числам с малыми знаменателями (большие дуги); множество остальных точек (малые дуги).

Вклад множества больших дуг дает главный член в асимптотической формуле для $I_{k,n}(N)$.

На множестве малых дуг можно найти нетривиальную оценку для тригонометрической суммы $V(\alpha)$ и если использовать, также, существование хороших оценок для средних величин $\int_0^1 |V(\alpha)|^{2l} d\alpha$, где $l \in \mathbb{N}$, то можно доказать, что вклад малых дуг мал по сравнению с главным членом. Здесь мы не будем впускаться в подробности. Для сравнения отметим, что пользуясь своим методом, И.М. Виноградов установил, что

$$G(n) \ll n \log n\,. \tag{8}$$

Эта оценка для $G(n)$ несравнимо сильнее оценки Харди и Литлвуда. Поскольку имеет место елементарная оценка $G(n) > n$ (см. например [12], гл.11) видно, что оценка И.М. Виноградова для величины $G(n)$ близка к окончательной. Многие математики занимались уточнением постоянной в оценке (8). Информацию можно найти в монографиях [2], [4], [5], [71].

1.2.2. *Обобщения проблемы Варинга.*

Одно из возможных обобщений аддитивной задачи (5) – ето задача о представимости большого числа квадратичной формы с целыми переменными. Следует отметить, что при помощи кругового метода в классическом виде, ету задачу можно решить только для форм не менее чем с 5 неизвестными. Важный вклад в ету теорию сделал Клостерман. В работе [60] он нашел асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = N\,. \tag{9}$$

в числах $x_i \in \mathbb{N}$, где $a_i \in \mathbb{N}$ параметры. Число решений уравнения (9) можно представить в виде $\int_0^1 V(\alpha a_1)\ldots V(\alpha a_4) e(-\alpha N)\, d\alpha$, где сумма $V_2(\alpha)$ определена через (7). Идея Клостермана состоит в том, что единичный промежуток разбивается на части посредством дробей Фарея (см. Лемму 14) и все ети части являются большими дугами (в нашей терминологии). Конечно, надо переодолеть большие трудности, самой серьезной из которых является оценка тригонометрических сумм специального вида (впоследствии названы суммами Клостермана). Детальное изучение задачи о представимости чисел квадратичными формами можно найти в работе Малышева [15].

Гильберт предложил исследовать систему

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = N_1$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 = N_2 \tag{10}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_k^n = N_n$$

для разрешимостти в числах $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$. Здесь $N_1, \ldots, N_n \in \mathbb{N}$ достаточно большие числа, удовлетворявющие некоторым естественным условиям. Эта задача была впервые рассмотрена Камке [59], и поетому названа "проблемой Гильбертом–Камке". Больше информации об етой задаче можно найти в монографии [2].

Известны обобщения проблемы Варинга для нецелых степеней $c > 1$. Например, Сегал [21] исследовал для разрешимости в числах $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ неравенство

$$\left|x_1^c + \cdots + x_k^c - N\right| < \varepsilon. \tag{11}$$

Сегал доказал, что можно выбрать $k = k(c) \in \mathbb{N}$ таким образом, что для любого, сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, неравенство (11) разрешимо для достаточно больших $N \in \mathbb{R}$.

Дезуйе [36] и также Архипов и Житков [1] исследовали уравнение

$$[x_1^c] + \cdots + [x_k^c] = N, \tag{12}$$

являющееся аналогом (6) для нецелых степеней. Было установлено, что при подходящем выборе $k = k(c) \in \mathbb{N}$ уравнвние (12) разрешимо в натуральных числах $x_1, \ldots, x_k$ для всех достаточно больших $N \in \mathbb{N}$.

1.2.3. *Проблемы Гольдбаха.*

В 1742 г. в писмо к Эйлеру, Гольдбах высказал гипотезу, что каждое четное число $N > 2$ можно представить в виде

$$p_1 + p_2 = N, \tag{13}$$

где p_1, p_2 – простые числа (бинарная проблема Гольдбаха).

Голдьбах предположил также, что каждое нечетное число $N > 5$ можно представить в виде

$$p_1 + p_2 + p_3 = N, \tag{14}$$

где p_1, p_2, p_3 – простые числа (тернарная проблема Гольдбаха).

Другая классическая проблема теории чисел – ето гипотеза близнецов, согласно которой существует бесконечно много простых чисел p, таких что $p + 2$ тоже является простым числом.

Тернарная проблема Гольдбаха для достаточно больших нечетных N была решена И.М. Виноградовым [3] в 1937 г. Обозначим через $J(N)$ число решений уравнения (14) в простых числах. Пользуясь своим методом для оценки тригонометрических сумм по простым числам, И.М. Виноградов доказал, что имеет место асимптотическая формула

$$J(N) = \frac{N^2}{2\log^3 N}\sigma(N) + \mathcal{O}\Big(\frac{N^2}{\log^4 N}\Big), \tag{15}$$

где

$$\sigma(N) = \prod_{p|N} \Big(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\Big) \prod_{p\nmid N} \Big(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\Big) .$$

Легко проверить, что

$$\sigma(N) \asymp 1 \qquad \text{если} \qquad N \equiv 1 \pmod 2 . \tag{16}$$

Из (15) и (16) следует, что $J(N) > 0$ для достаточно больших нечетных N.

Бинарная проблема Гольдбаха и гипотеза близнецов пока нерешены. Первой прорыв в их изучении был сделан Бруном [29] в 1919 г. Используя свой „метод решета", Брун доказал, что каждое достаточно большое четное N можно представить в виде

$$\mathrm{P}_9 + {\mathrm{P}_9}' = N.$$

Брун также доказал, что существует бесконечно много пар из почти простых чисел P_9, ${\mathrm{P}_9}'$, таких что

$$\mathrm{P}_9 + 2 = {\mathrm{P}_9}'.$$

После публикации результатов Бруна многие математики работали над усовершенствованием метода решета и его применения в теории чисел. Подробную информацию об етом можно найти в монографии [40].

Один из самых интересных результатов в теории решета был получен Ченом [34]. В 1973 г. он доказал, что каждое достаточно большое четное N можно представить в виде

$$p + \mathrm{P}_2 = N,$$

где p – простое число и P_2 – число имеющее не более двух простых множителей. Чен доказал также, что существует бесконечно много простых числел p, таких что

$$p + 2 = \mathrm{P}_2. \tag{17}$$

Есть и другой подход, связанный с исследованием бинарной проблемы Гольдбаха. Обозначим через $E(x)$ число четных чисел n, не превосходящих x и таких, что уравнение

$$p_1 + p_2 = n \tag{18}$$

не имеет решения в простых числах. В 1938 г. Чудаков [23], пользуясь методом И.М. Виноградова, установил, что

$$E(x) \ll_A x(\log x)^{-A} \tag{19}$$

для сколь угодно большой постоянной $A > 0$. Важный результат получили Монтгомери и Вон [65]. В 1975 г. они установили, что имеет место оценка

$$E(x) \ll x^{1-\delta},$$

для некоторой еффективно вычислимой постоянной $\delta > 0$.

Следует отметить, что ети оценки интересны не только сами по себе, но имеют также важные применения. Рассмотрим, например, уравнения (14) для достаточно больших нечетных N. Рассмотрим множество

$$\mathcal{A} = \{\ N - p \ \ : \ \ 2 < p < N\ \} .$$

и обозначим его мощность через $|\mathcal{A}|$. Из теоремы Чебышева для функции $\pi(x)$ следует, что $|\mathcal{A}| \gg N(\log N)^{-1}$. С другой стороны, пользуясь оценкой (19) получаем, что существуют не более чем $\mathcal{O}(N(\log N)^{-2})$ четных чисел $n \leq N$, непредставимых в виде (18). Следовательно, существует простое число p, такое что $N - p$ можно представить в виде суммы двух простых. Таким образом, разрешимость (14) является следствием (19). Этот принцип часто используется в аддитивной теории чисел. Мы тоже будем пользоваться им в настоящей диссертации.

В качестве следствия оценки (19) можно получить также, что существует бесконечно много троек различных простых чисел p_1, p_2, p_3, таких что

$$p_1 + p_2 = 2p_3 \tag{20}$$

Имеет место гипотеза, утверждающая, что для любого $r \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много арифметических прогрессий, состоящих из r различных простых чисел. Для $r > 3$, однако, ета гипотеза пока недоказана.

1.2.4. *Проблема Гольдбаха – Варинга.*

После решения И.М. Виноградовым тернарной проблемы Гольдбаха, были решены многие аддитивные задачи с простыми числами. В частности, было рассмотрено уравнение

$$p_1^n + p_2^n + \cdots + p_k^n = N \tag{21}$$

и также система

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \cdots + p_k &= N_1 \\ p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_k^2 &= N_2 \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\ p_1^n + p_2^n + \cdots + p_k^n &= N_n\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Подробную информацию можно найти, например, в [5] и [53].

Для примера, представим одну из теорем Хуа–ло–Кена ([53], гл.10). Обозначим через $J(N_1, \dots N_n)$ число решений системы (22) в простых числах и пусть $P = (N_n)^{1/n}$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ можно определить $k_0(n) \in \mathbb{N}$ таким образом, что если $k \geq k_0(n)$, то верна асимптотическая формула

$$J(N_1, \dots N_n) = \frac{P^{k - \frac{1}{2}n(n+1)}}{\log^k P}\Big(\gamma\,\sigma + \mathcal{O}_{k,n}\Big(\frac{\log\log P}{\log P}\Big)\Big)\,,$$

где $\gamma = \gamma(N_1, \dots, N_n)$ – особый интеграл и $\sigma = \sigma(N_1, \dots, N_n)$ – особый ряд. Точные значения величин $k_0(n)$, γ, σ даны в [53], гл.10. В [53], гл.11 показано, что если $N_1, \dots, N_n$ удовлетворяют двум типам условям (условие положительной разрешимости и условие арифметической разрешимости), то $\gamma \geq \gamma_0$ и $\sigma \geq \sigma_0$ для некоторых положительных величин γ_0, σ_0 (зависящих только от k и n). В етом случае, если P достаточно велико, то система (22) разрешима в простых числах.

С уточнением етой теоремы занимались многие математики (см., например, работу Чубарикова [22]).

1.2.5. *Представление чисел в виде суммы квадратов простых чисел.*

Рассмотрим более подробно задачу о представлении большого числа в виде суммы квадратов простых чисел. В статье [52] Хуа–ло–Кен рассмотрел уравнение

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = n. \tag{23}$$

и доказал его разрешимость в простых числах для почти всех $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих $n \equiv 3 \pmod{24}$ и $n \not\equiv 0 \pmod{5}$. Обозначим через $E_1(x)$ количество натуральных чисел $n \le x$, удовлетворяющих етим сравнениям и непредставимых в виде (23). Хуа–ло–Кен [52] доказал существование постоянной $A > 1$, такой, что

$$E_1(x) \ll x(\log x)^{-A}. \tag{24}$$

В 1961 г. Шварц [68] доказал ету оценку с произвольно большим $A > 0$, а в 1993 г. М.Люнг и М.Лиу [64] показали, что $E_1(x) \ll x^{1-\delta}$ для некоторой еффективно вычислимой постоянной $\delta > 0$.

Как следствие оценки (24), Хуа–ло–Кен доказал, что если $N \in \mathbb{N}$ достаточно большое и $N \equiv 5 \pmod{24}$, то уравнение

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = N \tag{25}$$

разрешимо в простых числах. Для етого он оценил снизу число различных елементов множества $\{\ N - p_4^2 - p_5^2 \ \ : \ \ 2 < p_4,\, p_5 < 0,5\sqrt{N}\ \}$ и воспользовался оценкой (24). Отметим, что используя метод И.М. Виноградова, можно получить асимптотическую формулу для числа решений уравнения (25).

Для того, чтобы доказать разрешимость некоторой аддитивной задачи в простых числах, как правило, нужно больше слагаемых, чем для етой же задачи с натуральными неизвестными. Как было отмечено выше, задачу о представимости натуральных чисел в виде суммы квадратов простых чисел, можно решить методом И.М. Виноградова, если число простых неизвестных равно пяти. С другой стороны, теорема Лагранжа утверждает, что для любого натурального N уравнение (5) разрешимо в целых числах. Используя формально метод И.М. Виноградова, можно высказать гипотезу о том, что если $N \in \mathbb{N}$ достаточно большое и $N \equiv 4 \pmod{24}$, то (5) разрешимо в простых числах. Однако, доказать ету гипотезу, повидимому, будет даже труднее, чем бинарную гипотезу Гольдбаха.

Тем не менее, получены некоторые частичные результаты, подтверждающие гипотезу о которой шла речь. Грийвс [39] доказал разрешимость (5) с двумя простыми и двумя натуральными неизвестными при условии, что N достаточно большое и удовлетворяет естественному арифметическому условию. В работе Грийвса получена оценка снизу правильного порядка для числа решений етого уравнения. Позже Плаксин [17] и Шийлдс [69], независимо друг от друга, нашли асимптотическую формулу для числа решений уравнения (5) с двумя простыми и двумя натуральными неизвестными.

Интересный результат получили в 1994 Брудерн и Фуври [30]. Они доказали, что если $N \in \mathbb{N}$, достаточно большое и $N \equiv 4 \pmod{24}$ то уравнение (5) разрешимо в почти простых числах порядка 34.

Недавно Хийт–Браун и автор в работе [88] улучшили результат Брудерна и Фуври и рассмотрели (5) также с одним простым и тремя почти простыми неизвестными.

1.2.6. *Некоторые обобщения проблемы Гольдбаха – Варинга.*

Известны некоторые аналоги уравнения (14). Рассмотрим неравенство

$$|\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \gamma| < \varepsilon \,, \tag{26}$$

где $\gamma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}$ – фиксированны, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ не равные нулю, не все одного знака, и кроме того, α_1/α_2 иррационально. При етих условиях можно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ неравенство (26) имеет решение в простых числах. Например, в статье [24] Бейкера и Хармана, разрешимость установлена даже для ε, зависящего от $\max p_i$ и стремящегося к нулю с ростом $\max p_i$.

Известны также аналоги уравнения (21) для нецелых степеней. В 1952 г. Пятецкий–Шапиро [19] рассмотрел неравенство

$$\left|p_1^c + \cdots + p_k^c - N\right| < \varepsilon, \tag{27}$$

где $c > 1$ – нецелое число. Он доказал, что можно выбрать подходящее $k = k(c) \in \mathbb{N}$, такое что для любого, сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ неравенство (27) разрешимо в простых числах, если $N \in \mathbb{R}$ – достаточно велико. Пятецкий–Шапиро доказал, что если $1 < c < 3/2$, то можно взять $k = 5$. Естествено ожидать, что для c близких к 1, неравенство (27) разрешимо даже при $k = 3$. Этой задачей занимался автор, а его результат был впоследствии улучшен другими математиками.

1.2.7. *Редкие множества из простых чисел.*

Множество S из простых чисел называется редким, если

$$\lim_{x\to\infty} \Big(\frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p\le x\\ p\in S}} 1 \Big) = 0,$$

Рассмотрим, например, множество

$$S_\lambda = \{ \, p \quad : \quad \{\sqrt{p}\} < p^{-\lambda} \, \} \,, \tag{28}$$

где $\lambda \in (0, 1)$. Отметим, что с возрастанием λ ограничение на p становится более жестким и, соответственно, доказательство бесконечности S_λ становится труднее.

И.М. Виноградов, пользуясь своим методом для оценки тригонометрических сумм по простым числам (см. [6], гл.4), доказал, что если $0 < \lambda < 1/10$ то

$$\sum_{\substack{p\le x\\ p\in S}} 1 = \frac{x^{1-\lambda}}{(1-\lambda)\log x} \left(1 + \mathcal{O}_\lambda(\, (\log x)^{-1}\,)\right). \tag{29}$$

Ю. В. Линник [14] использовал для решения етой задачи другой подход, основанный на плотностных теоремах в теории дзета–функции Римана. Над етой проблемой работали также Кауфман [13], Гриценко [9], Балог [25], Харман [47]. В последних двух работах формула (29) доказана при $0 < \lambda < 1/4$.

Другим известным примером редкого множества простых чисел является

$$M_c = \{\ p \ \ : \ \ p = [n^c] \ \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}\ \}, \tag{30}$$

где $c > 1$ нецелое число. В 1953 Пятецкий–Шапиро [20] доказал, что M_c бесконечно, если $1 < c < 12/11$. Улучшением верхней границы для постоянной c занимались многие математики. Самый лучший результат в етом направлении принадлежит Кумчеву [61], который доказал безконечность M_c для $1 < c < 45/38$.

Редким множеством специального типа занимался также автор в своей кандидатской диссертации [74] и в работе [77].

1.2.8. *Аддитивные задачи с простыми числами из редких множеств.*

Изучение аддитивных задач с простыми числами из редких множеств является интересной и трудной задачей. Вирзинг [73] доказал существование редкого множества из простых чисел S, такого, что если $N \in \mathbb{N}$ достаточно большое и нечетное, то уравнение (14) разрешимо в простых числах из S. Вирзинг предложил задачу нахождения „естественных" примеров редких множеств с етим свойством. Балог и Фридлендер [26] доказали, что таким свойством обладает множество M_c, если $1 < c < 21/20$.

Интересный результат для более общего уравнения (21) с простыми числами специального вида получил Гриценко [10]. Некоторые результаты такого типа получил также автор.

Рассмотрим множество простых чисел, удовлетворяющих (17). Как мы уже отметили, теорема Чена утверждает, что ето множество бесконечно. С другой стороны, при помощи более простых теорем из теории решета можно установить, что ето множество является редким (доказательство можно найти в [40]).

Было бы интересно доказать разрешимость уравнения типа (21) или системы вида (22) в простых числах, удовлетворяющих (17), или, хотя бы, более слабым ограничениям вида $p + 2 = \mathrm{P}_r$, где $r \geq 2$ фиксированное натуральное число. Задачами такого типа занимался автор. Более подробную информацию можно найти в § 1.3.

1.3. **Результаты автора по теме диссертации.**

Некоторые аддитивные задачи с простыми числами были рассмотрены автором в его кандидатской диссертации [74], другие же были исследованы позже. Остановимся коротко на етих результатах (некоторые из них были впоследствии улучшены другими математиками). Мы не будем останавливаться в данной работе на их доказательствах.

В § 1.4 сформулируем две теоремы, которые будут полностью доказаны в диссертации. Их доказательства являются наиболее сложными в идейном и техническом плане и отражают методы, используемые для доказательства других теорем.

1.3.1. *Диофантово неравенство с простыми числами, близкими к квадратам.*

В четверой главе кандидатской диссертации [74], а также в статье [75] исследовано диофантово неравенство (26) для разрешимости в простых числах p_1, p_2, p_3 близких к квадратам или, что одно и тоже, таких, что величины $||\sqrt{p_i}||$ малы. Как следствие етого установлено, что если $\gamma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ не равны нулю и не все одного знака и если α_1/α_2 иррационално, то для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $\theta \in (12/13, 1)$ неравенство (26) имеет решение в простых числах, принадлежащих об?единению интервалов вида $(k^2 - k^\theta, k^2 + k^\theta)$, где $k \in \mathbb{N}$.

1.3.2. *Диофантово неравенство типа Гольдбаха – Варинга с нецелой степенью, близкой к единице.*

Во второй главе кандидатской диссертации [74] доказана разрешимость в простых числах p_1, p_2, p_3 неравенства

$$|p_1^c + p_2^c + p_3^c - N| < \varepsilon(N), \tag{31}$$

если $c \in (1, 27/26)$ – фиксированное число, $N \in \mathbb{R}$ – достаточно большое, а $\varepsilon(N) > 0$ – подходящая функция, стремящаяся к нулю при $N \to \infty$.

Верхняя граница для c была улучшена автором в [78]. В етой работой доказана разрешимость (31) в простых числах, при условие, что

$$1 < c < 15/14\ , \qquad \varepsilon(N) = N^{1-15/(14c)}\, (\log N)^9$$

и если N достаточно велико.

Улучшением верхней границы для c занимались Кай [32], [33], Кумчев и Недева [63] и Кумчев [62]. В последней статье доказано, что если $c \in (1, 61/55)$, то неравенство (31) разрешимо в простых числах для достаточно больших N и для подходящего $\varepsilon(N)$, стремящегося к нулю с ростом N.

1.3.3. *Диофантово неравенство типа Гольдбаха – Варинга с различными нецелыми степенями.*

В статье [79] автор занимался неравенством

$$|p_1^{c_1} + p_2^{c_2} + p_3^{c_3} - N| < \varepsilon(N), \tag{32}$$

где $c_1, c_2, c_3 \geq 1$ постоянные, такие что, по крайной мере, одна из них не является целым числом, $N \in \mathbb{R}$ – большое и $\varepsilon(N) > 0$ – подходящая функция, стремящаяся к нулю с ростом N. Неравенство (32) является обобщением (31). Можно ожидать разрешимость (32) в простых числах, если c_1, c_2, c_3 близки к единице. Оказывается, что одна из постоянных, например c_1, может быть сколь угодно большой (но тогда c_2 и c_3 должны быть очень близкими к 1). Точнее в работе [79] доказано, что если $c_1 > 100$ – нецелое число, если $c_2, c_3 \geq 1$ и

$$\delta = \frac{1}{10^9 c_1^3} + \frac{1}{2c_2} + \frac{1}{2c_3} > 1\,,$$

то неравенство (32) с $\varepsilon(N) = N^{1-\delta} \log^7 N$ разрешимо в простых числах для достаточно больших N.

1.3.4. *Уравнение типа Гольдбаха – Варинга с нецелой степенью, близкой к единице.*

В статье [76] М.Лапорта и автор рассмотрели уравнение

$$[p_1^c] + [p_2^c] + [p_3^c] = N, \tag{33}$$

где $c > 1$ – нецелое число. Очевидно, (33) тоже является аналогом (14) и можно ожидать, что если c близко к 1, то оно разрешимо в простых числах для достаточно больших $N \in \mathbb{N}$. Обозначим через $J_c(N)$ число решений (33) в простых числах. В работе [76] доказано, что если $c < 17/16$, то верна асимптотическая формула

$$J_c(N) = \frac{\Gamma^3\Big(1+\frac{1}{c}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{3}{c}\Big)}\, N^{\frac{3}{c}-1} + \mathcal{O}_c\Big(N^{\frac{3}{c}-1} \exp\big(-(\log N)^{1/4}\big)\Big),$$

где Γ обозначает гамма–функцию Эйлера. Этот результат был впоследствии улучшен Кумчевым и Недевой в [63], которые доказали, что последняя асимптотическая формула верна для всех $c < 12/11$.

1.3.5. *Система из двух диофантовых неравенств с простыми числами.*

В статье [80] рассмотрена система из двух диофантовых неравенств с простыми неизвестными

$$|p_1^c + \cdots + p_5^c - N_1| < \varepsilon_1(N_1), \qquad |p_1^d + \cdots + p_5^d - N_2| < \varepsilon_2(N_2).$$

Эта система является аналогом системы (22) для нецелых степеней. Можно ожидать, что если c и d близки к единице и если N_1 и N_2 связанны подходящим образом, то система имеет решения в простых числах.

В [80] доказано, что если $c, d, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ удовлетворяют

$$1 < d < c < 35/34, \qquad 1 < \alpha < \beta < 5^{1-d/c},$$

если $N_1, N_2 \in \mathbb{R}$ достаточно большие и $\alpha \le N_2/N_1^{d/c} \le \beta$ и если

$$\varepsilon_1(N_1) = N_1^{1-35/(34c)} \log^{12} N_1, \qquad \varepsilon_2(N_2) = N_2^{1-35/(34d)} \log^{12} N_2,$$

то наша система имеет решения в простых числах.

1.3.6. *Система диофантовых уравнений с простыми числами из редкого множества.*

В статье [86] Кумчев и автор воспользовались методом Гриценко из [10] и рассмотрели общую систему (22) для разрешимости в простых числах близких к квадратам. Обозначим через $J_\lambda(N_1, \dots, N_n)$ число решений системы (22) в простых числах $p_1, \dots, p_k$, таких что

$$||\sqrt{p_1}||, \dots, ||\sqrt{p_k}|| < P^{-\lambda}, \tag{34}$$

где $P = (N_n)^{1/n}$ и $\lambda > 0$ – постоянная. Естественно предположить, что если λ невелико, то $J_\lambda(N_1, \dots N_n)$ близко к $2^k P^{-\lambda k} J(N_1, \dots N_n)$, где $J(N_1, \dots N_n)$ обозначает число решений (22) в простых числах (без никаких ограничений).

Пусть $k_0(n)$, γ, σ – те же что и в § 1.2.4 и пусть

$$\lambda_n = \begin{cases} (10^6\, n^3 \log^2 n)^{-1} & \text{если } n \ge 3, \\ 1/64 & \text{если } n = 2. \end{cases}$$

В работе [86] доказано, что если $k \ge k_0(n)$ и $0 < \lambda < \lambda_n$, то

$$J_\lambda(N_1, \dots N_n) = \frac{P^{k(1-\lambda)-\frac{1}{2}n(n+1)}}{\log^k P}\Big(2^k \gamma\, \sigma + \mathcal{O}_{k,n,\lambda}\Big(\frac{\log\log P}{\log P}\Big)\Big).$$

Таким образом, если $k \geq k_0(n)$, $0 < \lambda < \lambda_n$ и если $N_1, \ldots, N_n$ достаточно велики и удовлетворяют условиям положительной разрешимости и арифметической разрешимости (см. [53], гл.11), то система (22) имеет решения в простых числах, удовлетворяющих (34).

1.3.7. *Распределение простых чисел из редкого множества в арифметических прогрессиях.*

В статье [81] исследовано распределение простых чисел из множества S_λ, определенного через (28), в арифметических прогрессиях. Определим

$$\theta_\lambda(x, q, a) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a\,(q) \\ \{\sqrt{p}\} < p^{-\lambda}}} \log p\,.$$

В работе [81] автор доказал, что если

$$0 < \lambda < 1/4\,, \qquad 0 < \delta < 1/4 - \lambda$$

и если $A > 0$ – сколь угодно большая постоянная, то

$$\sum_{q \leq x^\delta} \max_{y \leq x} \max_{(a,q)=1} \left| \theta_\lambda(y, q, a) - \frac{y^{1-\lambda}}{\varphi(q)(1-\lambda)} \right| \ll_{A,\lambda,\delta} x^{1-\lambda} (\log x)^{-A}\,. \tag{35}$$

Этот результат является аналогом теоремы Бомбиери – А.И.Виноградова (Лемма 18) для простых чисел из множества S_λ.

Из оценки (35) следует, что для каждой постоянной $\lambda \in (0, 1/4)$ можно найти число $r = r(\lambda) \in \mathbb{N}$, такое что каждое достаточно большое четное N представимо в виде

$$p + \mathrm{P}_r = N\,,$$

где $p \in S_\lambda$ и P_r – почти простое порядка r. В работе [81] ето заключение сделано не было, но его можно получить, пользуясь стандартными теоремами из теории решета (см., например, [40], Теорема 10.3).

1.3.8. *Тернарная задача с простыми числами, одно из которых принадлежит арифметической прогрессии.*

В работе [82] рассмотрена величина

$$I_{k,l}(N) = \sum_{\substack{p_1 + p_2 + p_3 = N \\ p_1 \equiv l\,(k)}} \log p_1 \log p_2 \log p_3\,,$$

где $N \in \mathbb{N}$ – нечетное, $k, l \in \mathbb{N}$ и $(k, l) = 1$. Пусть

$$\sigma_{k,l}(N) = \prod_{p \nmid kN} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{\substack{p \nmid k \\ p | N}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{\substack{p | k \\ p \nmid N - l}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{\substack{p | k \\ p | N - l}} \frac{p}{(p-1)}$$

Определим величину $R_{k,l}(N)$ формулой

$$I_{k,l}(N) = \frac{N^2}{2\varphi(N)} \sigma_{k,l}(N) + R_{k,l}(N)\,. \tag{36}$$

Первое слагаемое в правой части (36) получается как главный член после применения метода И.М. Виноградова. Пользуясь етим методом, можно получить нетривиальную оценку для остатка $R_{k,l}(N)$ только при $k \le (\log N)^D$ для некоторой постоянной $D > 0$.

В работе [82] доказано, что для любых постоянных $A > 0$ и $\theta \in (0, 1/3)$ имеет место оценка

$$\sum_{k \le N^\theta} \max_{(l,k)=1} |R_{k,l}(N)| \ll_{\theta,A} N^2 (\log N)^{-A}\,, \tag{37}$$

Таким образом, остаточный член в (36) мал по сравнению с главным членом для почти всех $k \le N^\theta$.

Впоследствии автор установил оценку (37) для любого $\theta \in (0, 1/2)$. Этот результат не был опубликован, потому что автору удалось доказать более общие теоремы.

1.3.9. *Тернарная задача с простыми числами, два из которых принадлежат арифметическим прогрессиям.*

Для любых $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ обозначим через $D_{k_1,k_2}(x)$ число решений уравнения (20) в простых числах $p_1, p_2, p_3 \in (x, 3x]$, таких что $p_i + 2 \equiv 0\ (k_i)$, $i = 1, 2$. Пусть

$$\gamma(x) = \sum_{\substack{x < m_1, m_2, m_3 \le 3x \\ m_1 + m_2 = 2m_3}} (\,\log m_1 \log m_2 \log m_3\,)^{-1}\,, \qquad \sigma_0 = 2 \prod_{p > 2} \Big(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\Big)\,.$$

В работе [87] Пенева и автор доказали, что для любой постоянной $A > 0$, можно найти $B = B(A) > 0$ (подходящим выбором является $B = 16A + 100$), такое, что

$$\sum\sum_{\substack{k_1, k_2 \le \sqrt{x}(\log x)^{-B} \\ (k_1 k_2, 2) = 1}} \Big|\, D_{k_1,k_2}(x) - \frac{\sigma_0 \gamma(x)}{\varphi(k_1)\varphi(k_2)} \prod_{p | (k_1, k_2)} \frac{p-1}{p-2} \,\Big| \ll_A \frac{x^2}{(\log x)^A}\,. \tag{38}$$

Пользуясь тем же методом, можно получить аналогичный результат для числа решений уравнения (14) в простых числах, два из которых принадлежат арифметическим прогрессиям.

Для любого нечетного бесквадратного k обозначим через $H_k(x)$ число решений уравнения (20) в простых числах $p_1, p_2, p_3 \in (x, 3x]$ таких, что $(p_1 + 2)(p_2 + 2) \equiv 0 \,(\operatorname{mod} k)$. В работе [87] доказано, что из оценки (38), следует, что для любой постоянной $A > 0$, можно найти $B = B(A) > 0$, такое что

$$\sum_{\substack{k \le \sqrt{x}(\log x)^{-B} \\ (k,2) = 1}} \mu^2(k) \,\Big|\, H_k(x) - \sigma_0 \gamma(x) \prod_{p | k} \frac{2p - 5}{(p-1)(p-2)} \,\Big| \ll_A \frac{x^2}{(\log x)^A}\,. \tag{39}$$

В работе [87] показано, что из оценки (39) и из общей теоремы теории решета (Теорема 10.3 из [40]) следует существование бесконечно большого числа троек из различных простых чисел p_1, p_2, p_3, удовлетворяющих (20) и таких, что $(p_1 + 2)(p_2 + 2) = \mathrm{P}_9$.

1.3.10. *Тернарная задача с простыми числами p, такими что числа $p+2$ почти простые.*

Вновь рассмотрим уравнение (20). Пусть $x \in \mathbb{R}$ – большое и $\mathbf{k} = \langle k_1, k_2, k_3 \rangle \in \mathbb{N}^3$. Определим

$$I_{\mathbf{k}}(x) = \sum_{\substack{x<p_1,p_2,p_3\le 2x \\ p_i+2\equiv 0\,(k_i),\, i=1,2,3 \\ p_1+p_2=2p_3}} \log p_1 \log p_2 \log p_3 \,.$$

Обозначим через $M_{\mathbf{k}}(x)$ предполагаемый главный член асимптотической формулы для $I_{\mathbf{k}}(x)$, который получается формальным применением кругового метода. Этот главный член задается довольно громоздким выражением. В частном случае, когда числа k_1, k_2, k_3 нечетны и бесквадратны, имеем

$$M_{\mathbf{k}}(x) = \sigma_0\, x^2\, \Omega(\mathbf{k}) \,,$$

где

$$\sigma_0 = \prod_{p>2} \Big(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\Big) \,, \qquad \varphi_2(n) = n \prod_{p|n} \Big(1 - \frac{2}{p}\Big)$$

и

$$\Omega(\mathbf{k}) \;=\; \frac{\varphi_2^2((k_1,k_2,k_3))\,\varphi((k_1,k_2))\,\varphi((k_1,k_3))\,\varphi((k_2,k_3))}{\varphi((k_1,k_2,k_3))\,\varphi_2((k_1,k_2))\,\varphi_2((k_1,k_3))\,\varphi_2((k_2,k_3))\varphi(k_1)\,\varphi(k_2)\,\varphi(k_3)}$$

Пусть $R_{\mathbf{k}}(x)$ определяется формулой

$$I_{\mathbf{k}}(x) = M_{\mathbf{k}}(x) + R_{\mathbf{k}}(x) \,.$$

Было бы интересно доказать, что для любого $A > 0$ можно найти $B = B(A) > 0$, такое что

$$\text{(40)} \qquad \sum\sum\sum_{k_1,k_2,k_3\le\sqrt{x}(\log x)^{-B}} \big|\, R_{\mathbf{k}}(x) \,\big| \ll_A x^2(\log x)^{-A} \,.$$

Пользуясь етой оценкой, мы могли бы доказать существование бесконечно большого числа троек из различных простых чисел p_1, p_2, p_3, удовлетворяющих (20) и таких, что числа $p_i + 2$, $i = 1, 2, 3$ – почти простые порядка 5.

В работе [83] доказана оценка, которая является более слабым аналогом (40), и при помощи которой можно получить удовлетворительное решение поставленной задачи. Предположим, что $\beta_1(k), \beta_2(k), \beta_3(k)$ – любые последовательности комплексных чисел, удовлетворяющих

$$\text{(41)} \qquad |\beta_i(k)| \le \tau(k)\,; \qquad \beta_i(k) = 0 \ \ \text{если } 2 \mid k \ \ \text{или} \ \ \mu^2(k) = 0 \,.$$

В статье [83] доказано, что для любого $A > 0$ можно найти $B = B(A) > 0$, такое что, если

$$\text{(42)} \qquad K_1,\, K_2 \le x^{1/2}(\log x)^{-B} \,, \qquad K_3 \le x^{1/3}(\log x)^{-B} \,,$$

то

$$\text{(43)} \qquad \sum_{k_1\le K_1} \sum_{k_2\le K_2} \sum_{k_3\le K_3} \beta_1(k_1)\beta_2(k_2)\beta_3(k_3)\, R_{\mathbf{k}}(x) \ll_A x^2(\log x)^{-A} \,.$$

Заметим, что верхная граница для K_3 в (42) отлична от верхней границы для K_1 и K_2. Об?ясним коротко причину етой несимметричности. Мы исследуем величину $I_{\mathbf{k}}(x)$ при помощи кругового метода. Для етого нам нужно оценить сумму

$$\sum_{k\le K_3}\beta_3(k)\sum_{\substack{x<p\le 2x\\ p+2\equiv 0\,(k)}}(\log p)\,e(2\alpha p) \tag{44}$$

равномерно по α из множества малых дуг. Автору удалось ето сделать только для K_3, удовлетворяющих (42). Отметим, что весы $\beta_3(k)$, которые встречаются в нашей задаче, кроме свойств (41), имеют и ряд других. После выхода [83] Х. Микава ознакомил автора со своими неопубликованными материалами, из которых следует, что если использовать ети специальные свойства $\beta_3(k)$, то можно получить хорошие оценки для суммы (44) и, соответственно, для выражения в левой части (43) при $K_3\le x^{4/9}(\log x)^{-B}$.

В классической теории решета нет общих теорем, позволяющих из оценок типа (43) прямо вывести существование бесконечно большого количества решений (20) в простых числах указанного вида. По етой причине, для получения результата нужна большая вычислительная работа. В статье [83] было использовано так называемое „векторное решето". Эта техника была предложена в 1977 г. Иванцом [55] и применена в 1994 г. Брудерном и Фуври [30].

Используя оценку (43) и метод векторного решета, автор доказал существование бесконечно большого числа троек из различных простых чисел p_1,p_2,p_3, удовлетворяющих (20) и таких, что

$$p_1+2=\mathrm{P}_5\,,\quad p_2+2=\mathrm{P}_5'\,,\quad p_3+2=\mathrm{P}_8\,. \tag{45}$$

После публикации работы [83] Пенева использовала метод автора и в статье [67] доказала, что для каждого достаточно большого натурального числа $N\equiv 3\pmod 6$ существуют простые числа p_1,p_2,p_3, удовлетворяющие уравнению (14) и такие, что выполняется (45).

1.3.11. *Представление чисел в виде суммы двух простых p, таких что $p+2$ почти простые.*

Пусть N – произвольно большое число. Для каждого $n\in\mathbb{N}\cap(\frac{3}{4}N,N]$, такое что $n\equiv 4\pmod 6$ и для $k_1,k_2\in\mathbb{N}$ определим

$$I_{k_1,k_2}(n)=\sum_{\substack{\frac14 N<p_1\le\frac12 N<p_2\le N\\ p_i+2\equiv 0\ (k_i),\ i=1,2\\ p_1+p_2=n}}\log p_1\,\log p_2\,.$$

Пусть $M_{k_1,k_2}(n)$ – предполагаемый главный член для последней величины, который получается формальным применением кругового метода. Для нечетных и бесквадратных k_1,k_2 он определяется следующим образом. Пусть

$$\sigma'=2\prod_{p>2}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\,,\qquad \theta(k)=\prod_{\substack{p>2\\ p|k}}\frac{p-1}{p-2}\,.$$

Если $(k_1, k_2) \mid n+4$ и $(k_1k_2, n+2) = 1$, то определим

$$\mathcal{S}_{k_1,k_2}(n) = \frac{\theta(k_1)\,\theta(k_2)\,\varphi((k_1,k_2))}{\theta((k_1,n))\,\theta((k_2,n))\,\theta((k_1,k_2))}\,.$$

В противном случае будем считать, что $\mathcal{S}_{k_1,k_2}(n) = 0$. Тогда имеем

$$M_{k_1,k_2}(n) = \sigma'\left(n - \frac{3N}{4}\right)\theta(n)\,\frac{\mathcal{S}_{k_1,k_2}(n)}{\varphi(k_1)\varphi(k_2)}\,.$$

Определим $R_{k_1,k_2}(n)$ формулой

$$I_{k_1,k_2}(n) = M_{k_1,k_2}(n) + R_{k_1,k_2}(n)\,.$$

В работе [84] доказано, что для любого $A > 0$ можно найти $B = B(A)$, такое что, если

$$K_1 \le N^{1/2}(\log N)^{-B}\,, \qquad K_2 \le N^{1/3}(\log N)^{-B}$$

и если $\beta_1(k)$, $\beta_2(k)$ удовлетворяют (41), то

$$\sum_{\substack{n\le N\\ n\equiv 4\,(6)}} \Bigl| \sum_{\substack{k_1\le K_1\\ k_2\le K_2}} \beta_1(k_1)\beta_2(k_2)\,R_{k_1,k_2}(n) \Bigr| \ll_A N^2(\log N)^{-A}\,. \tag{46}$$

Рассмотрим снова уравнение

$$p_1 + p_2 = n\,. \tag{47}$$

В работе [84] использована оценка (46) и методом векторного решета доказано, что для почти всех $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих $n \equiv 4 \pmod 6$, уравнение (47) разрешимо в различных простых числах p_1, p_2, таких что

$$p_1 + 2 = \mathrm{P}_5\,, \qquad p_2 + 2 = \mathrm{P}_7\,. \tag{48}$$

Точнее, обозначим через $\mathcal{K}_0$ множество всех чисел $n \in \mathbb{N}$, для которых уравнение (47) имеет решение в различных простых p_1, p_2, удовлетворяющих (48). Обозначим через $\mathcal{Y}_0(x)$ мощность множества

$$\mathcal{A}(x) = \{\, n \le x \;\;:\;\; n \equiv 4 \pmod 6 \,\} \setminus \mathcal{K}_0\,.$$

В [84] доказано, что для любого $A > 0$ имеем

$$\mathcal{Y}_0(x) \ll_A x(\log x)^{-A}\,. \tag{49}$$

Эта оценка интересна сама по себе, но с ее помощью мы можем также и улучшить результаты, упомянутые в § 1.3.10. Обозначим через $\mathcal{Y}^*(x)$ мощность множества

$$\{\, 2p \in (x/2, x] \;\;:\;\; p \equiv 2 \pmod 3\,,\;\; p + 2 = \mathrm{P}_2 \,\}\,,$$

где $x > 0$ сколь угодно большое. Используя рассуждения Чена [34], можно доказать, что $\mathcal{Y}^*(x) \gg x(\log x)^{-2}$. Теперь, пользуясь оценкой (49), получим, что существует бесконечно много троек из различных простых p_1, p_2, p_3, удовлетворяющих $p_1 + p_2 = 2p_3$ и таких, что

$$p_1 + 2 = \mathrm{P}_5\,, \qquad p_2 + 2 = \mathrm{P}_7\,, \qquad p_3 + 2 = \mathrm{P}_2\,. \tag{50}$$

Этот результат является улучшением результата автора из [83].

Аналогично, если $N \in \mathbb{N}$ – достаточно велико и $N \equiv 3 \pmod 6$, то рассмотрим множество

$$\{\ N - p \ \ : \ \ 2 < p < N\ ,\ \ p \equiv 2 \pmod 3\ ,\ \ p + 2 = \mathrm{P}_2\ \}$$

и получим, что уравнение (14) имеет решения в простых числах, удовлетворяющих (50). Это является улучшением результата Пеневой из работы [67].

1.3.12. *Уравнение Лагранжа с почти простыми неизвестными.*

В статье [88] Хийт–Браун и автор рассмотрели уравнение Лагранжа

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = N \tag{51}$$

с мультипликативными ограничениями на неизвестные x_i. Доказаны две теоремы. Первая из них сформулирована в § 1.4.1 и подробно доказана в § 3 настоящей диссертации.

Сформулируем вторую теорему из [88]. Предположим, что $N \in \mathbb{N}$ достаточно большое, $N \equiv 4 \pmod{24}$ и пусть $P = N^{1/2}$. Определим

$$B_{d_1,d_2,d_3,d_4}(N) = \sum_{\substack{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=N \\ x_i \equiv 0\,(d_i)\,,\ i=1,2,3,4}} \omega_0(x_1/P)\ldots\omega_0(x_4/P)\,, \tag{52}$$

где $\omega_0(t)$ – гладкая функция, положительная для $t \in (9/20, 11/20)$ и равная нулю вне этого интервала (она определена через (56)). Пусть $M_{d_1,d_2,d_3,d_4}(N)$ – предполагаемый главный член для величины $B_{d_1,d_2,d_3,d_4}(N)$, который получается формальным применением кругового метода (здесь мы не приводим точную формулу из–за ее громоздкости).

Определим $R_{d_1,d_2,d_3,d_4}(N)$ формулой

$$B_{d_1,d_2,d_3,d_4}(N) = M_{d_1,d_2,d_3,d_4}(N) + R_{d_1,d_2,d_3,d_4}(N)\,.$$

В §5 работы [88] доказано, что для любого $\varepsilon \in (0, 10^{-6})$, имеет место оценка

$$\sum\sum\sum\sum_{\substack{d_1,d_2,d_3,d_4 \le P^{1/8-10\varepsilon} \\ (d_1d_2,d_3d_4,2)=1}} \mu^2(d_1)\ldots\mu^2(d_4)\,\bigl|\,R_{d_1,d_2,d_3,d_4}(N)\,\bigr| \ll_\varepsilon P^{2-\varepsilon}\,. \tag{53}$$

Это утверждение является аналогом Теоремы 3 из статьи [30] Брудерна и Фуври, которую они доказали при помощи метода Клостермана [60]. Их подход близок к подходу Эстермана из работы [37], и их верхняя граница для d_i равна P^θ, где $\theta \in (0, 1/11)$.

Для доказательства (53) мы тоже используем метод Клостермана. Наше улучшение верхней границы для d_i в (53) получено благодаря введению гладких весов ω_0 в сумме в правой части (52). Это позволяет нам рассматривать взвешенные тригонометрические суммы, что, в нашем случае, гораздо проще и удобнее.

Пользуясь векторным решетом (как и в работе Брудерна и Фуври), мы получаем, что каждое достаточно большое $N \in \mathbb{N}$, такое что $N \equiv 4 \pmod{24}$, можно представить в виде (51) с числами $x_i \in \mathbb{N}$ не имеющими простых делителей меньших $N^{0.01995}$. В частности, каждое x_i является почти простым числом порядка 25.

1.4. **Основные результаты диссертации.**

Сформулируем две теоремы – предмет настоящей диссертации. На их доказательства остановимся подробно в § 3 и, соответственно, § 4.

1.4.1. *Теорема Лагранжа с одним простым и тремя почти простыми неизвестными.*

В диссертации доказана следующая

Теорема 1. *Каждое достаточно большое $N \in \mathbb{N}$, такое что $N \equiv 4 \,(\operatorname{mod} 24)$, можно представить в виде*

$$p^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = N\,, \tag{54}$$

где p простое, а числа $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$ не имеют простых множителей, меньших чем $N^{0.004915}$. Число етих представлений больше, чем $cN(\log N)^{-4}$ для некоторой постоянной $c > 0$. В частности, каждое x_i имеет не более 101 простого множителя.

□

Результаты Плаксина [17], Грийвса [39] и Шийлдса [69] базируются на том факте, что существуют простые p_1, p_2, такие, что $N - p_1^2 - p_2^2$ можно представить в виде суммы двух квадратов. Однако наложить дополнительные мультипликативные условия на ети квадраты трудно. Чтобы доказать Теорему 1, нам надо показать, что существует простое p, такое что $N - p^2$ можно представить в виде суммы трех чисел, не имеющих малых простых делителей. Для етого нам нужна информация о числе решений уравнения

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = n \tag{55}$$

в числах $x_i \in \mathbb{N}$ лежащих в арифметических прогрессиях.

Основную роль в доказательстве Теоремы 1 играют два предложения, сформулированные ниже. Рассмотим первое из них. Оказывается, что удобнее учитывать каждое решение уравнения (55) с некоторым весом, который определяется следующим образом. Рассмотрим функцию

$$\omega_0(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{(20t-10)^2-1}\right) & \text{если} \quad t \in \left(\frac{9}{20}, \frac{11}{20}\right), \\ 0 & \text{в противном случае} \; . \end{cases} \tag{56}$$

Хорошо известно, что данная функция бесконечно много раз дифференцируема на действительной оси. Далее, пусть

$$P = N^{1/2}\,. \tag{57}$$

Для каждого $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in \mathbb{Z}^3$ обозначим

$$\omega(\mathbf{x}) = \omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3)\,, \qquad \text{где} \qquad \omega(x) = \omega_0(xP^{-1})\,. \tag{58}$$

Если $\mathbf{d} = \langle d_1, d_2, d_3 \rangle \in \mathbb{N}^3$, то определим

$$\Omega_{\mathbf{d}}(n) = \sum_{\substack{x_1^2+x_2^2+x_3^2=n \\ x_i \equiv 0\,(d_i)\,,\; i=1,2,3}} \omega(\mathbf{x})\,. \tag{59}$$

Будем исследовать ету величину при помощи кругового метода. Для формулировки результата нам нужны некоторые определения.

Пусть суммы Гаусса $S(q,m,n)$ и $T(q,m)$ определены, соответственно, через (2) и (3). Если $\mathbf{d} = \langle d_1, d_2, d_3\rangle \in \mathbb{N}^3$ и $\mathbf{n} = \langle n_1, n_2, n_3\rangle \in \mathbb{Z}^3$, то обозначим

$$S_{\mathbf{d}}(q,m,\mathbf{n}) = \prod_{i=1}^{3} S(q,\, m\, d_i^2,\, n_i)\,, \qquad S_{\mathbf{d}}(q,m) = S_{\mathbf{d}}(q,m,\mathbf{0})\,. \tag{60}$$

Определим

$$h_{\mathbf{d}}(q,N) = q^{-3}\varphi(q)^{-1} \sum_{a(q)^*} S_{\mathbf{d}}(q,a)\, T(q,a)\, e_q(-aN)\,. \tag{61}$$

и пусть

$$\Sigma_0 = \Sigma_0(\mathbf{d},N) = \sum_{q=1}^{\infty} h_{\mathbf{d}}(q,N)\,. \tag{62}$$

Сходимость етого ряда является одним из утверждений Леммы 37.

Далее, если $\beta,\, u,\, t,\, \in \mathbb{R}$, определим

$$I(\beta,u) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(x)\, e(\beta x^2 + ux)dx\ , \qquad I(\beta) = I(\beta,0). \tag{63}$$

и

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} I^3(\beta)\, e(-t\beta)d\beta\,. \tag{64}$$

Сходимость последнего интеграла и основные свойства функции $H(t)$ рассмотрены в Леммы 39. Определим также

$$\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_0(N) = P\int_2^P H\Big(1 - \frac{x^2}{P^2}\Big)\,\frac{dx}{\log x}\,. \tag{65}$$

Корректность определения етой величины и некоторые ее свойства также приведены в Лемме 39.

Если формально применить круговой метод, то можно предположить, что сумму $\Omega_{\mathbf{d}}(n)$ можно приблизить при помощи выражения

$$\mathcal{M}_{\mathbf{d},Q}(n) = \frac{PH(nN^{-1})}{d_1 d_2 d_3} \sum_{q\le Q} q^{-3} \sum_{a(q)^*} e_q(-an)\; S_{\mathbf{d}}(q,a)\,, \tag{66}$$

где $S_{\mathbf{d}}(q,a)$ и $H(t)$ определены, соответственно, через (60) и (64), а Q выбрано подходящим способом.

Определим $\mathcal{G}_{\mathbf{d},Q}(n)$ формулой

$$\Omega_{\mathbf{d}}(n) = \mathcal{M}_{\mathbf{d},Q}(n)\; + \mathcal{G}_{\mathbf{d},Q}(n)\,. \tag{67}$$

Предложение 1, которое сформулировано ниже, показывает, что величина $\mathcal{G}_{\mathbf{d},Q}(n)$ мала „в среднем" по отношению к $\mathbf{d} = \langle d_1, d_2, d_3\rangle$, когда координаты етого вектора не слишком велики, и по $n = N - k^2$, когда k пробегает множество натуральных чисел, не превосходящих P.

Определение: С етого места $\sum_{(\mathcal{D})}$ обозначает, что суммирование ведется по нечетным бесквадратным числам $d_1, d_2, d_3 \le D$.

Расммотрим сумму

$$\mathcal{E}(D,Q) = \sum_{(\mathcal{D})} \tau(d_1)\tau(d_2)\tau(d_3) \sum_{k \le P} \left| \mathcal{G}_{\mathbf{d},Q}(N-k^2) \right| . \tag{68}$$

Легко показать, что $\mathcal{E}(D,Q) \ll_\varepsilon P^{2+\varepsilon}$ для большой области изменения величин D и Q и для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$. Однако, для наших целей ета простая оценка бесполезна. Чтобы доказать нетривиальный результат, нам нужна оценка вида (70) для подходящего Q и для возможно наибольшего D.

Выполнено следующее

Предложение 1. *Предположим, что $\varepsilon \in (0, 10^{-9})$ и пусть*

$$Q = P^{20/23}, \qquad D = P^{2/69 - 10\varepsilon} . \tag{69}$$

Тогда имеем

$$\mathcal{E}(D,Q) \ll_\varepsilon P^{2-\varepsilon}. \tag{70}$$

□

Для доказательства Предложения 1 мы исследуем величину $\Omega_{\mathbf{d}}(n)$ методом Клостермана, но сначала пользуемся тем фактом, что рассматриваем числа $n = N-k^2$, где k^2 является квадратом. Это делается при помощи „квадратного решета”, которое было использовано впервые Хийт–Брауном в работе [48].

Основную роль в доказательстве Предложения 1 играет теорема А. Вейля для оценки суммы Клостермана (см. Лемму 22). Нужны еще ряд результатов для сумм Гаусса и Рамануджана. Следует отметить, что в § 3.4.6 (когда мы рассматриваем вторую оценку для $E(G_1, G_2)$), нам нужно оценивать очень точно. Если разложение Фарея включает интервалы вокруг дробей a/q (см. Лемму 14), то мы оцениваем нетривиально не только по числителям a, но и по знаменателям q. До сих пор ета техника была использована только для получения условных результатов (см., например, Хийт–Браун [50]).

Доказательство Предложения 1 – ето самая трудная часть доказательства Теоремы 1. Оно проведено в § § 3.2 – 3.5.

Однако, доказательство теоремы вывести напрямую из Предложения 1 нельзя, так как выражение $\mathcal{M}_{\mathbf{d},Q}(n)$ является довольно сложным. Вот почему, нам нужно другое предложение, более удобное для применения метода решета.

Определим

$$\mathcal{L}_{\mathbf{d}}(N) = \sum_{\substack{p^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=N \\ x_i \equiv 0\ (d_i),\ i=1,2,3}} \omega(\mathbf{x}) . \tag{71}$$

Предположим, что величины $\beta_i(d) \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3$, удовлетворяют условия

$$\beta_i(d) = 0 \ \text{ если } \ \mu(d) = 0 \ \text{ или } \ 2 \mid d \tag{72}$$

и

$$|\beta_i(d)| \le \tau(d)\,. \tag{73}$$

Пусть

$$\mathcal{H}(D) = \sum_{(\mathcal{D})} \beta_1(d_1)\beta_2(d_2)\beta_3(d_3) \left(\mathcal{L}_{\mathbf{d}}(N) - \frac{\mathcal{N}_0(N)\,\Sigma_0(\mathbf{d},N)}{d_1d_2d_3} \right), \tag{74}$$

где $\Sigma_0(\mathbf{d},N)$, $\mathcal{N}_0(N)$ и $\mathcal{L}_{\mathbf{d}}(N)$ определены, соответственно, через (62), (65) и (71).

Предложение 2. *Предположим, что* $\varepsilon \in (0, 10^{-9})$ *и* $M > 0$ *– сколь угодно большая постоянная. Тогда если* $D = P^{2/69-10\varepsilon}$*, то имеем*

$$\mathcal{H}(D) \ll_{\varepsilon,M} P^2(\log P)^{-M}\,. \tag{75}$$

□

Доказательство Предложения 2 проведено в § 3.6. Там уже учитывается факт, что в уравнении (54) число p простое. Основную роль в доказательстве играет теорема Барбана – Девенпорта – Хальберстама (см. Лемму 17) о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях с большими разностями.

Доказательство Теоремы 1 выводится из Предложения 2 методом векторного решета. Вычисления приведены в § 3.7.

Отметим, что везде в доказательстве число ε одно и то же. Наоборот, постоянная M в разных формулах принимает, как правило, разные значения. Если в формулировке некоторого утверждения участвуют ε или M, то будем считать, что в доказательстве утверждения постоянные в знаках $\ll$ и $\mathcal{O}$ зависят от ε, соответственно, M.

1.4.2. *Представление чисел в виде суммы квадратов простых чисел* p*, таких что* $p+2$ *почти простые.*

Рассмотрим уравнение

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = n\,. \tag{76}$$

Как мы уже упомянули в § 1.2.5, Хуа–ло–Кен доказал, что ето уравнение разрешимо в простых числах для почти всех $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих

$$n \equiv 3 \pmod{24}\,, \qquad n \not\equiv 0 \pmod 5\,. \tag{77}$$

Наша цель – исследовать разрешимость (76) в простых числах p, таких что числа $p+2$ почти простые. В диссертации доказана следующая

Теорема 2. *Обозначим через* $\mathcal{K}$ *множество состоящее из чисел* $n \in \mathbb{N}$*, таких что уравнение* (76) *разрешимо в простых числах* p_1, p_2, p_3*, удовлетворяющих*

$$p_1 + 2 = \mathrm{P}_5\,, \qquad p_2 + 2 = \mathrm{P}'_5\,, \qquad p_3 + 2 = \mathrm{P}_8\,.$$

Пусть $Y \in \mathbb{R}$, $Y > 10$. *Рассмотрим множество*

$$\mathcal{F} = \{\, n \in \mathbb{N} \;:\; n \le Y\,,\ n \equiv 3 \pmod{24}\,,\ n \not\equiv 0 \pmod 5 \,\} \setminus \mathcal{K} \tag{78}$$

и обозначим его мощность через $\mathcal{Y}(Y)$. *Тогда для сколь угодно большой постоянной* $B>0$ *имеем*

$$\mathcal{Y}(Y) \ll_B Y(\log Y)^{-B}\,. \tag{79}$$

□

Из етой теоремы получаем

Следствие 1. *Для каждого достаточно большого числа* $N\in\mathbb{N}$, *удовлетворяющего* $N\equiv 5 \pmod{24}$, *уравнение*

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2=N$$

имеет решения в простых числах $p_1,\ldots,p_5$, *таких что*

$$p_1+2=\mathrm{P}_2\,,\qquad p_2+2=\mathrm{P}'_2\,,\qquad p_3+2=\mathrm{P}_5\,,\qquad p_4+2=\mathrm{P}'_5\,,\qquad p_5+2=\mathrm{P}_8\,.$$

□

Для доказательства Теоремы 2 основную роль играет Предложение 3, которое сформулировано ниже.

Пусть $X=Y^{1/2}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\le Y$ и пусть $\mathbf{k}=\langle k_1,k_2,k_3\rangle\in\mathbb{N}^3$ – вектор с нечетными бесквадратными компонентами. Определим

$$I_{\mathbf{k}}(n) \;=\; \sum_{\substack{p_1^2+p_2^2+p_3^2=n\\ p_i+2\equiv 0\,(k_i)\\ i=1,2,3}} \log p_1\log p_2\log p_3\,, \tag{80}$$

Далее, обозначим

$$s_k(a,q)=\frac{\varphi((k,q))}{\varphi(q)}\sum_{\substack{m(q)^*\\ m+2\equiv 0\ ((k,q))}} e_q(am^2)\,, \tag{81}$$

$$t_{\mathbf{k}}(q,n)=t_{k_1,k_2,k_3}(q,n)=\sum_{a(q)^*} s_{k_1}(a,q)\,s_{k_2}(a,q)\,s_{k_3}(a,q)\,e_q(-na)\,. \tag{82}$$

Пусть

$$Q=(\log X)^{1000A} \tag{83}$$

для некоторой постоянной $A>10^6$. Обозначим

$$\mathfrak{S}_{\mathbf{k}}(n,Q)=8\prod_{2<p<Q}\bigl(1+t_{\mathbf{k}}(p,n)\bigr)\,. \tag{84}$$

Определим величину $\mathfrak{R}_{\mathbf{k}}(n,Q)$ формулой

$$I_{\mathbf{k}}(n)=\frac{\pi}{4}\sqrt{n}\,\frac{\mathfrak{S}_{\mathbf{k}}(n,Q)}{\varphi(k_1)\varphi(k_2)\varphi(k_3)}\;+\;\mathfrak{R}_{\mathbf{k}}(n,Q)\,. \tag{85}$$

Первое слагаемое в правой части (85) является главным членом в предполагаемой асимптотической формуле, которую получаем после формального применения кругового метода. Отметим, что величина $\mathfrak{S}$ определена конечным произведением. Благодаря етому, вычисления при применении метода решета будут гораздо проще.

Мы не можем найти нетривиальную оценку для остатка $\mathfrak{R}$ при фиксированных n и $\mathbf{k}$, но мы докажем, что он мал в среднем. Имеет место следующее

Предложение 3. *Пусть* $Y \in \mathbb{R}$, $Y > 10$, $X = Y^{1/2}$ *и пусть* Q *определено через* (83)*, где* $A > 10^6$ *– постоянная. Предположим, что*

$$K_1\,,\,K_2\;\le X^{1/2}(\log X)^{-20000A}\,,\qquad K_3\;\le X^{1/3}(\log X)^{-20000A}\,. \tag{86}$$

Пусть заданы $\beta_i(k_i) \in \mathbb{C}$ *для всех* $k_i \in \mathbb{N}$, $k_i \le K_i$, $i = 1, 2, 3$ *и пусть*

$$\beta_i(k) = 0 \quad \textit{если} \quad 2\,|\,k \quad \textit{или} \quad \mu(k) = 0 \;\;; \qquad |\beta_i(k)| \le \tau_3(k)\,. \tag{87}$$

Тогда если $\mathbf{k} = \langle k_1, k_2, k_3\rangle$*, то имеем*

$$\mathcal{U} = \sum_{\substack{n\le Y\\ n\equiv 3\;(24)\\ n\not\equiv 0\;(5)}} \Big|\sum_{\substack{k_i\le K_i\\ i=1,2,3}} \beta_1(k_1)\,\beta_2(k_2)\,\beta_3(k_3)\,\mathfrak{R}_{\mathbf{k}}(n,Q)\Big| \ll_A \frac{X^3}{(\log X)^A}\,. \tag{88}$$

$\square$

Сначала в § 4.1 мы докажем Предложение 3 при помощи кругового метода. План доказательства етого предложения дан в § 4.1.1. Величина $I_{\mathbf{k}}(n)$ представена в виде интеграла по единичному отрезку. Как обычно, имеем

$$I_{\mathbf{k}}(n) = I_1 + I_2\,,$$

где I_1 – интеграл по множеству „больших дуг”, а I_2 – интеграл по множеству „малых дуг”. Отсюда следует, что

$$\mathcal{U} \ll \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2\,,$$

где $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ – вклады, соответственно, интегралов I_1 и I_2 (определения даны в § 4.1.1). Следовательно, чтобы оценить сверху $\mathcal{U}$, достаточно показать, что величины $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ невелики.

Исследование интеграла I_2 проведено в § 4.1.2. Основную роль здесь играет нахождение нетривиальной оценки двойной тригонометрической суммы равномерно по множеству малых дуг. Переменная внутренней суммы пробегает простые числа из арифметических прогрессий, а переменная внешней суммы – разности етих прогрессий. Для оценки мы пользуемся методом И.М. Виноградова. Вычисления довольно длинные, но идейно они ясны. В § 4.1.2 найдена также оценка четвертого момента етой тригонометрической суммы. Пользуясь етими оценками, устанавливаем, что величина $\mathcal{U}_2$ невелика.

Исследование интеграла I_1 проведено в § 4.1.3. Найдена асимптотическая формула для тригонометрической суммы по простым числам. Использована Теорема Бомбиери – А.И.Виноградова (см. Лемму 18) и доказано, что остаточным членом в асимптотической формуле можно пренебречь. Доказано, что вклад главного члена к I_1 достаточно близок к главному члену в правой части формулы (85). Таким образом устанавливаем, что величина $\mathcal{U}_1$ тоже невелика.

Доказательство Теоремы 2 выведено из Предложения 3 в § 4.2. Мы рассмативаем сумму Γ, определенную через (545), и оцениваем ее снизу методом векторного решета. Устанавливаем, что если $\mathcal{Y}(N)$ не удовлетворяет (79), то нижняя оценка для Γ была бы гораздо больше, чем сама сумма Γ, а ето невозможно. Из етого соображения следует доказательство Теоремы 2.

Доказательство Следствия легко выводится из Теоремы 2 в § 4.3.

Благодарность: При проведении своих исследований автор пользовался финансовой помощью Королевского Общества Великобритании, Министерства Науки и Образования Республики Болгарии (грант ММ-430) и Пловдивского Университета (гранты ПУ-2-ММ и 01-М-09).

Автор высказывает свою благодарность всем вышеупомянутым организациям.

2. Известные результаты и некоторые следствия из них.

2.1. **Элементарные леммы.**

Наша первая лемма – ето неравенство Коши.

Лемма 1. *Для любых* $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, $1 \le n \le N$ *имеем*

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\Big| \le \Big(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2\Big)^{1/2}.$$

Доказательство: Смотри [12], гл.6, §1.

$\square$

Следует основное тождество для функции Мебиуса.

Лемма 2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда имеем*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{если } n = 1\,, \\ 0 & \text{если } n > 1\,. \end{cases}$$

Доказательство: Смотри [7], гл.2, §4.

$\square$

Следуют некоторые елементарные свойства систем вычетов.

Лемма 3. *Предположим, что* $q, q' \in \mathbb{N}$ *и* $(q, q') = 1$. *Если* a *и* a' *пробегают полные (приведенные) системы вычетов по модулям, соответственно,* q *и* q', *то числа* $aq' + a'q$ *пробегают полную (приведенную) систему вычетов по модулю* qq'.

Доказательство: Можно найти в [7] на стр. 138.

$\square$

Следующая лемма содержит два простые тождества.

Лемма 4. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}$ *и* $q \in \mathbb{N}$. *Тогда имеем*

$$(i) \qquad q^{-1}\sum_{a(q)} e_q(an) = \begin{cases} 1 & \text{если } n \equiv 0\ (q)\,, \\ 0 & \text{если } n \not\equiv 0\ (q)\,. \end{cases}$$

$$(ii) \qquad \int_0^1 e(\alpha n)\, d\alpha = \begin{cases} 1 & \text{если } n = 0\,, \\ 0 & \text{если } n \ne 0\,. \end{cases}$$

Доказательство: Доказательства етих утверждений тривиальны.

$\square$

Следует лемма, известная под именем Китайской Теоремы об Остатках.

Лемма 5. *Пусть* $q_1,\, q_2 \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$. *Условием разрешимости системы*

$$x \equiv a_1\ (q_1)\,, \qquad\qquad x \equiv a_2\ (q_2)$$

является $a_1 \equiv a_2 \ ((q_1, q_2))$ *. Если ето условие выполнено, то решение системы единственно по модулю* $[q_1, q_2]$ *. Далее, если система разрешима и* $(a_1, q_1) = (a_2, q_2) = 1$ *, то решение системы взаимно просто с* $[q_1, q_2]$ *.*

Доказательство: Можно найти в [54], гл.2, §7.

$\square$

Следует результат о числе решений сравнения второй степени.

Лемма 6. *Для любых* $q, N \in \mathbb{N}$ *обозначим через* $H_N(q)$ *количество решений сравнения* $m^2 \equiv N \ (q)$ *, таких что* $(m, q) = 1$ *. Тогда для любого* $l \in \mathbb{N}$ *и для любого простого числа* $p > 2$ *имеем*

$$(i) \qquad H_N(p^l) = 0 \quad \text{если} \quad p \mid N\,, \qquad\qquad (ii) \qquad H_N(p^l) \le 2 \quad \text{если} \quad p \nmid N\,.$$

Доказательство: Равенство (i) очевидно. Доказательство (ii) можно найти в [7], гл.5, §4.

$\square$

В следующей лемме собраны некоторые неравенства для функций $\tau_k(n)$, $\varphi(n)$, $r(n)$ и $\nu(n)$.

Лемма 7. *Пусть* $k, l, n \in \mathbb{N}$*;* $X, \varepsilon \in \mathbb{R}$*;* $X \ge 2$*,* $k \ge 2$ *и* $\varepsilon > 0$*. Имеем*

$$(i) \qquad \sum_{n \le X} \big(\tau_k(n)\big)^l \ll_{k,l} X(\log X)^{k^l - 1}\,, \qquad\qquad (v) \qquad \tau(kl) \le \tau(k)\,\tau(l)\,,$$

$$(ii) \qquad \sum_{n \le X} \frac{\tau^l(n)}{n} \ll_l (\log X)^{2^l}\,, \qquad\qquad (vi) \qquad \tau_k(n) \ll_{k,\varepsilon} n^{\varepsilon}\,,$$

$$(iii) \qquad \sum_{n \le X} r^2(n) \ll X \log X\,, \qquad\qquad (vii) \qquad r(n) \ll_{\varepsilon} n^{\varepsilon}\,,$$

$$(iv) \qquad 2^{\nu(n)} \le \tau(n)\,, \qquad\qquad (viii) \qquad \frac{n}{\varphi(n)} \ll \log\log(10n)\,.$$

Доказательство: Для доказательства (i) смотри [16]. Доказательство (ii) можно найти в [7] на стр. 137. Доказательство (iii) можно найти, например, в [52]. Доказательства (iv) и (v) елементарны. Доказательство (vi) можно найти в [7] на стр. 125. Для (vii) смотри [54], гл.6, §7. Наконец, доказательство $(viii)$ можно найти в [7] на стр. 124.

$\square$

В следующей лемме собраны некоторые оценки, которыми мы будем часто пользоваться.

Лемма 8. *Пусть* $q \in \mathbb{N}$; $l \in \mathbb{Z}$; $D, \alpha, \kappa \in \mathbb{R}$; $l \geq 0$, $D \geq 2$, $\alpha > 0$, $\kappa > 1$. *Выполнены следующие оценки:*

$$(i) \quad \sum_{n \leq D} \frac{(q,n)\,\tau^l(n)}{n} \ll_l \tau(q)^{l+1} (\log D)^{2^l}, \qquad (iii) \quad \sum_{n>\alpha} \frac{1}{n^\kappa} \leq \frac{\kappa}{\kappa-1} \min(1, \alpha^{1-\kappa}),$$

$$(ii) \quad \sum_{n \leq D} \frac{(q,n^2)}{n} \leq \tau(q)\, D, \qquad (iv) \quad \sum_{n>\alpha} \frac{(n,q)}{n^\kappa} \leq \frac{2\kappa}{\kappa-1} \tau(q) \min(1, \alpha^{1-\kappa}).$$

Доказательство. Докажем (i). Используя Лемму 7 (ii), (v), получим

$$\sum_{d \leq D} \frac{(q,d)\,\tau^l(d)}{d} \leq \sum_{\delta | q} \delta \sum_{\substack{d \leq D \\ d \equiv 0\,(\delta)}} \frac{\tau^l(d)}{d} \leq \sum_{\delta|q} \tau^l(\delta) \sum_{h \leq D\delta^{-1}} \frac{\tau^l(h)}{h} \ll \tau^{l+1}(q) (\log D)^{2^l}.$$

Докажем (ii). Имеем

$$\sum_{d \leq D} \frac{(q,d^2)}{d} \leq \sum_{d \leq D} \frac{(q,d)^2}{d} \leq \sum_{d \leq D} (q,d) \leq \sum_{\delta|q} \delta \sum_{\substack{d \leq D \\ d \equiv 0\,(\delta)}} \leq \tau(q)\, D.$$

Доказательство (iii) можно найти, например, в [8], гл.1, §1.

Для рассмотрения (iv) воспользуемся (iii). Если $\alpha \in (0,1)$, то наш ряд равен

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n,q)\, n^{-\kappa} \leq \sum_{\delta|q} \delta^{1-\kappa} \sum_{h=1}^{\infty} h^{-\kappa} \leq \frac{\kappa}{\kappa-1} \tau(q),$$

а если $\alpha \geq 1$, то имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n>\alpha} \frac{(n,q)}{n^\kappa} &\leq \sum_{\delta|q} \delta \sum_{\substack{n>\alpha \\ n \equiv 0\,(\delta)}} n^{-\kappa} \leq \sum_{\delta|q} \delta^{1-\kappa} \sum_{h > \alpha\delta^{-1}} h^{-\kappa} \\ &\leq \sum_{\substack{\delta|q \\ \delta \leq \alpha}} \delta^{1-\kappa} \sum_{h>\alpha\delta^{-1}} h^{-\kappa} + \sum_{\substack{\delta|q \\ \delta>\alpha}} \delta^{1-\kappa} \sum_{h=1}^{\infty} h^{-\kappa} \\ &\leq \frac{\kappa}{\kappa-1} \sum_{\substack{\delta|q \\ \delta \leq \alpha}} \delta^{1-\kappa} (\alpha\delta^{-1})^{1-\kappa} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \sum_{\substack{\delta|q \\ \delta>\alpha}} \delta^{1-\kappa} \leq \frac{2\kappa}{\kappa-1} \tau(q)\, \alpha^{1-\kappa}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

□

Следующие две леммы содержат известные тождества для мультипликативных функций.

Лемма 9. *Предположим, что число* $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ *имеет каноническое представление* $m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$ *и что арифметическая функция* $f(n)$ *мультипликативна. Тогда* *имеем*

$$\sum_{d|m} f(d) = \prod_{i=1}^{s} \Big(1 + f(p_i) + f(p_i^2) + \cdots + f(p_i^{\alpha_i}) \Big) .$$

Доказательство: Можно найти в [7], гл.2, §2.

$\square$

Лемма 10. *Если арифметическая функция $f(n)$ мультипликативна, то*

$$f([k,l])\, f((k,l)) \;=\; f(k)\, f(l) \qquad \text{для любых} \qquad k, l \in \mathbb{N} .$$

Доказательство: Можно найти в [54], гл.6, §2.

$\square$

Следует тождество Эйлера.

Лемма 11. *Предположим, что арифметическая функция $f(n)$ мультипликативна и что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ абсолютно сходится. Тогда имеет место тождество*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p} \Big(1 + f(p) + f(p^2) + \ldots \Big) ,$$

где произведение взято по всем простым числам.

Доказательство: Можно найти, например, в [46], гл.17, §4.

$\square$

В следующей лемме даны основные свойства символа Якоби.

Лемма 12. *Пусть $q \in \mathbb{N}$ нечетно и пусть n, $m \in \mathbb{Z}$. Тогда имеем*

$$(i) \quad \left(\frac{nm}{q}\right) = \left(\frac{n}{q}\right)\left(\frac{m}{q}\right) , \qquad\qquad (ii) \quad \left(\frac{n}{q}\right) = \left(\frac{m}{q}\right) \quad \text{если} \quad n \equiv m\,(q) .$$

Доказательство: Можно найти в [7], гл.5, §3.

$\square$

Следует Квадратичный Закон Взаимности с его дополнениями.

Лемма 13. *Пусть числа q, $q_1 \in \mathbb{N}$ нечетны. Тогда имеем*

$$(i) \qquad \left(\frac{q}{q_1}\right)\left(\frac{q_1}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}\cdot\frac{q_1-1}{2}} \qquad \text{если} \qquad (q, q_1) = 1 ,$$

$$(ii) \qquad \left(\frac{2}{q}\right) = (-1)^{\frac{q^2-1}{8}} ,$$

$$(iii) \qquad \left(\frac{-1}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}} .$$

Доказательство: Можно найти в [7], гл.5, §3.

$\square$

Следует разбитие Фарея для единичного отрезка.

Лемма 14. *Пусть $P \in \mathbb{R}$ и $P \geq 1$. Для каждой пары чисел $a, q \in \mathbb{Z}$, такой что $1 \leq a \leq q \leq P$, $(a,q) = 1$, определим q', $q'' \in \mathbb{Z}$ через условия*

$$P < q + q',\, q + q'' \leq q + P\,, \qquad aq' \equiv 1\,(q)\,, \qquad aq'' \equiv -1\,(q)\,.$$

Тогда отрезок $\left(\frac{1}{1+[P]}\,,\, 1+\frac{1}{1+[P]}\right]$ можно представить в виде объединения непересекающихся отрезков следующим образом:

$$\left(\frac{1}{1+[P]}\,,\, 1+\frac{1}{1+[P]}\right] = \bigcup_{1\leq q\leq P}\ \bigcup_{\substack{1\leq a\leq q\\ (a,q)=1}} \left(\frac{a}{q} - \frac{1}{q(q+q')}\,,\, \frac{a}{q} + \frac{1}{q(q+q'')}\right].$$

Доказательство: Утверждение следует непосредственно из свойств дробей Фарея (смотри [7], стр.116 или [46], гл.3, §8).

$\square$

Следует теорема Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами.

Лемма 15. *Пусть $\alpha, \tau \in \mathbb{R}$; $\tau \geq 1$. Существуют $a \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, такие что*

$$1 \leq q \leq \tau\,, \qquad (a,q) = 1\,, \qquad \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q\tau}\,.$$

Доказательство: Смотри [12], гл.10, §1.

$\square$

2.2. **Результаты о распределении простых чисел.**

Следующая лемма содержит некоторые елементарные результаты о распределении простых чисел, а именно, теорему Чебышева, формулу Мертенса и ее следствие.

Лемма 16. *Выполнены оценки*

$$(i) \qquad \sum_{p\leq x} \log p \asymp x \qquad \text{для всех } x \geq 2\,,$$

$$(ii) \qquad \sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + c_0 + \mathcal{O}\big((\log x)^{-1}\big)$$

для некоторой постоянной $c_0 \in \mathbb{R}$ и для всех $x \geq 2$,

$$(iii) \qquad \prod_{-a<p\leq x} \left(1 + \frac{a}{p}\right) \asymp_a (\log x)^a\,.$$

для произвольной постоянной $a \in \mathbb{R}$ и для всех $x \geq \max(2, -a)$.

Доказательство: Доказательства (i) и (ii) можно найти в [7] на стр. 122 и 123. Чтобы доказать (iii), берем логарифм произведения и используем затем формулу Тейлора и асимоптотическую формулу (ii).

□

Теперь сформулируем два результата о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях с большими разностями. Определим

$$\Delta(x,q,m) = \theta(x,q,m) - \frac{x}{\varphi(q)}, \tag{89}$$

$$\Delta^*(x,q) = \max_{y\le x} \max_{(m,q)=1} |\,\Delta(y,q,m)\,|\,. \tag{90}$$

Следующая лемма представляет собой вариант теоремы Барбана – Девенпорта – Хальберстама.

Лемма 17. *Для любой постоянной $A>0$ можно найти $B=B(A)>0$ такое, что*

$$\sum_{q\le x(\log x)^{-B}} \sum_{m(q)^*} \Delta(x,q,m)^2 \ll_A x^2(\log x)^{-A}\,.$$

Доказательство: Смотри, например, [35], гл.29.

□

Следует теорема Бомбиери – А.И.Виноградова.

Лемма 18. *Для любой постоянной $A>0$ выполнена оценка*

$$\sum_{q\le x^{1/2}(\log x)^{-A}} \Delta^*(x,q) \ll_A x(\log x)^{5-A}\,.$$

Доказательство: Можно найти в [35] гл.28.

□

2.3. Свойства сумм Гаусса, Клостермана и Рамануджана.

В следующей лемме приведены некоторые свойства суммы Гаусса $\gamma(q)$, определенной через (1).

Лемма 19. *Имеем*

- (i) *Для нечетного числа $q\in\mathbb{N}$ имеет место оценка $|\gamma(q)|\le q^{1/2}$.*
- (ii) *Если $p>2$ простое число, то $\gamma(p)=S(p,1)$.*
- (iii) *Для $n\in\mathbb{Z}$ и для нечетного и бесквадратного числа $q\in\mathbb{N}$ имеем*

$$\sum_{l(q)} \left(\frac{l}{q}\right) e_q(nl) = \left(\frac{n}{q}\right)\gamma(q)\,.$$

Доказательство: Можно найти в [12], гл.8, §1 и в [54], гл.7.

□

В следующей лемме даны основные свойства суммы Гаусса $S(q,m,n)$, определенной через (2).

Лемма 20. *Имеем*

(*i*) *Если* $(q_1,q_2)=1$, *то*

$$S(q_1q_2,\, a_1q_2+a_2q_1,\, n) = S(q_1,\, a_1q_2^2,\, n)\, S(q_2,\, a_2q_1^2,\, n)\,.$$

(*ii*) *Предположим, что* $(q,m)=d$. *Имеем*

$$S(q,m,n)=\begin{cases} d\,S(q/d,m/d,n/d) & \textit{если} \;\; d \mid n\,,\\ 0 & \textit{если} \;\; d\nmid n\,.\end{cases}$$

(*iii*) *Если* $(q,m)=1$, *то* $|S(q,m,n)|\le 2q^{1/2}$.

(*iv*) *Если* $(q,2m)=1$, *то*

$$S(q,m,n)=e_q\big(-\overline{(4m)}\,n^2\big)\left(\frac{m}{q}\right)S(q,1)\,.$$

(*v*) *Если* $(q,2)=1$, *то*

$$S(q,1)=\begin{cases} q^{1/2} & \textit{если} \;\; q\equiv 1\ (4)\,,\\ iq^{1/2} & \textit{если} \;\; q\equiv -1\ (4)\,.\end{cases}$$

(*vi*) *Если* $(a,2)=1$, *то*

$$S(2^l,a)=\begin{cases} 0 & \textit{если} \;\; l=1\,,\\ 2^{l/2}(1+i^a) & \textit{если} \;\; l \textit{ четное}\,,\\ 2^{(l+1)/2}e(a/8) & \textit{если} \;\; l>1 \textit{ нечетное}\,.\end{cases}$$

Доказательство: Доказательство (*i*) следует из (2) и Леммы 3. Доказательства (*ii*) – (*vi*) можно найти в [37], § 6 и в [54], гл. 7.

□

В следующей лемме приведены основные свойства суммы Гаусса $T(q,m)$, определенной через (3).

Лемма 21. *Имеем*

(*i*) *Если* $(q_1,q_2)=1$, *то*

$$T(q_1q_2,\, a_1q_2+a_2q_1) = T(q_1,\, a_1)\, T(q_2,\, a_2)\,.$$

(*ii*) *Если* $p>2$ *простое число и* $(a,p)=1$, *то*

$$T(p^l,a)=\begin{cases} S(p,a)-1 & \textit{если} \;\; l=1\,,\\ 0 & \textit{если} \;\; l>1\,.\end{cases}$$

(*iii*) *Если* $(a,2)=1$ *, то*

$$T(2^l,a)=\begin{cases}-1 & \text{если} \quad l=1\,,\\ 2e(a/4) & \text{если} \quad l=2\,,\\ 4e(a/8) & \text{если} \quad l=3\,,\\ 0 & \text{если} \quad l>3\,.\end{cases}$$

Доказательство: Доказательство (i) следует из (3) и Леммы 3. Тождества (ii) и (iii) можно легко проверить, используя (3) и Лемму 20.

□

Следует оценка А. Вейля для суммы Клостермана $K(q,m,n)$, определенной через (4).

Лемма 22. *Имеем*

$$|K(q,m,n)|\le \tau(q)\, q^{1/2}\,(m,n,q)^{1/2}\,.$$

Доказательство: Неравенство доказано А. Вейлем [72] в случае, когда q – простое число. Для остальных числах q оценка получается не так сложно (см., например, [38]).

□

Ниже приведены тождество и оценка для суммы Рамануджана $c_q(n)$, определенной через (4).

Лемма 23. *Имеем*

$$c_q(n)=\frac{\varphi(q)}{\varphi\left(\frac{q}{(q,n)}\right)}\,\mu\left(\frac{q}{(q,n)}\right)\,.$$

Отсюда, в часности, следует, что

$$|c_q(n)|\le (q,n)\,.$$

Доказательство: Можно найти в [46], гл.16.

□

2.4. **Некоторые результаты математического анализа.**

Следует преобразование Абеля.

Лемма 24. *Пусть* $f(x)$ *– непрерывно дифференцируемая на отрезке* $[a,b]$ *функция, принимающая комплексные значения, и пусть для* $n\in(a,b]\cap\mathbb{N}$ *заданы числа* $c_n\in\mathbb{C}$ *. Тогда имеем*

$$\sum_{a<n\le b} c_n f(n) = -\int_a^b \Big(\sum_{a<n\le x} c_n\Big)\, f'(x)\,dx + \Big(\sum_{a<n\le b} c_n\Big)\, f(b)\,.$$

Доказательство: Смотри [12], гл.1, §4.

$\square$

В следующей лемме приведено неравенство Бесселя.

Лемма 25. *Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[0,1]$, принимает комплексные значения и, кроме того, $|f(x)|^2$ интегрируема на $[0,1]$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$\sum_{k=0}^{N} \Big| \int_0^1 f(x)\, e(kx)\, dx \Big|^2 \le \int_0^1 |f(x)|^2\, dx\,.$$

Доказательство: Смотри [11], гл.1, §7.

$\square$

Следующая лемма представляет специальный случай формулы суммирования Пуассона.

Лемма 26. *Предположим, что $f(x)$ – функция действительной переменной с компактным носителем, принимает комплексные значения и дифференцируема бесконечно много раз. Тогда имеет место тождество*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e(-kx)\, dx\,.$$

Доказательство: Смотри [11], гл.2, §13.

$\square$

2.5. **Леммы из теории решета.**

Следующая лемма содержит простую оценку сверху для количества чисел, не превосходящих некоторый параметр и имеющих только малые простые делители. Определим функцию

$$\Psi(k,y) = \begin{cases} 0 & \text{если } k \text{ имеет простой делитель } \ge y\,, \\ 1 & \text{в противном случае}\,. \end{cases} \tag{91}$$

Имеет место следующая

Лемма 27. *Если $y = y(x) \to \infty$ при $x \to \infty$ и $\log y \le \frac{\log x}{\log\log x}$, то*

$$\sum_{k\le x} \Psi(k,y) \ll x \exp\Big(-\frac{\log x}{\log y}\Big)\,.$$

Доказательство: Настоящая лемма является слабым вариантом Леммы 5.2 из [18], гл.5.

$\square$

Следующая лемма содержит оценку сверху для количества чисел, не превосходящих некоторый параметр и имеющих большое число разных простых делителей.

Лемма 28. *Предположим, что* $x \geq 10$ *и* $A \geq 1$. *Тогда имеем*

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \nu(n) \geq A \log\log x}} 1 \ll_A x(\log x)^{-A\log A + A - 1}.$$

Доказательство: Смотри [41], гл 0.

$\square$

В следующей лемме приведено одно из неравенств большого решета.

Лемма 29. *Пусть* $M \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$, $Z \in \mathbb{R}$, $Z > 0$ *и пусть для всех* $a, q \in \mathbb{N}$, *таких что* $1 \leq a \leq q \leq Z$, $(a,q) = 1$ *определены числа* $\lambda_{q,a} \in \mathbb{C}$. *Имеет место неравенство*

$$\sum_{n=M+1}^{M+N} \Big| \sum_{q \leq Z} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a,q)=1}} \lambda_{q,a}\, e_q(na) \Big|^2 \leq \big(N + Z^2\big) \sum_{q \leq Z} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a,q)=1}} |\, \lambda_{q,a} \,|^2 .$$

Доказательство: Можно найти в [66], §8.

$\square$

Следует неравенство, на котором основано (шестимерное) векторное решето.

Лемма 30. *Предположим, что числа* Λ_i, $\Lambda_i^{\pm} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 6$ *удовлетворяют*

$$\Lambda_i = 0 \quad \textit{или} \quad 1 \ , \ \ \Lambda_i^- \leq \Lambda_i \leq \Lambda_i^+ \ \ , \ \ 1 \leq i \leq 6 .$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4\Lambda_5\Lambda_6 \geq \quad & \Lambda_1^-\Lambda_2^+\Lambda_3^+\Lambda_4^+\Lambda_5^+\Lambda_6^+ + \Lambda_1^+\Lambda_2^-\Lambda_3^+\Lambda_4^+\Lambda_5^+\Lambda_6^+ + \\ & + \Lambda_1^+\Lambda_2^+\Lambda_3^-\Lambda_4^+\Lambda_5^+\Lambda_6^+ + \Lambda_1^+\Lambda_2^+\Lambda_3^+\Lambda_4^-\Lambda_5^+\Lambda_6^+ + \\ & + \Lambda_1^+\Lambda_2^+\Lambda_3^+\Lambda_4^+\Lambda_5^-\Lambda_6^+ + \Lambda_1^+\Lambda_2^+\Lambda_3^+\Lambda_4^+\Lambda_5^+\Lambda_6^- - \\ & - 5\Lambda_1^+\Lambda_2^+\Lambda_3^+\Lambda_4^+\Lambda_5^+\Lambda_6^+ \ . \end{aligned}$$

Доказательство: Проводится тем же способом как и доказательство Леммы 13 из [30].

$\square$

Следующие леммы являются основными результатами теории линейного решета. Более подробную информацию можно найти в [56] и [57]. Определим сначала функции Россера $\lambda^{\pm}(d)$ порядка D, где $D \in \mathbb{R}$, $D > 1$. Пусть

$$\lambda^{\pm}(1) = 1 \ \text{ и } \ \lambda^{\pm}(d) = 0 \text{ если } \mu^2(d) = 0 .$$

Если $d = p_1 p_2 \dots p_r$, где $p_1 > p_2 > \dots > p_r$, определим

$$\lambda^+(d) = \begin{cases} (-1)^r & \text{если} \quad p_1 \dots p_{2l} p_{2l+1}^3 < D \quad \text{для всех} \quad l \in [\,0,\, (r-1)/2\,], \\ 0 & \text{в противном случае} \ ; \end{cases}$$

$$\lambda^-(d) = \begin{cases} (-1)^r & \text{если} \quad p_1 \dots p_{2l-1} p_{2l}^3 < D \quad \text{для всех} \quad l \in [\,1,\, r/2\,], \\ 0 & \text{в противном случае} \ . \end{cases}$$

Очевидно

$$(92)\qquad |\lambda^{\pm}(d)| \le \mu^2(d)\,, \qquad\qquad \lambda^{\pm}(d) = 0 \quad \text{если} \quad d \ge D\,.$$

Пусть $f(s)$ и $F(s)$ обозначают функции линейного решета. По определению они непрерывны и удовлетворяют

$$\begin{array}{llll} sF(s) &= 2e^{\gamma} & \text{если} & 0 < s \le 3\,, \\ sf(s) &= 0 & \text{если} & 0 < s \le 2\,, \\ (sF(s))' &= f(s-1) & \text{если} & s > 3\,, \\ (sf(s))' &= F(s-1) & \text{если} & s > 2\,, \end{array}$$

где $\gamma = 0.577\ldots$ – постоянная Эйлера. В частности, имеем

$$(93)\qquad F(s) = 2e^{\gamma}s^{-1}\,, \qquad f(s) = 2e^{\gamma}s^{-1}\log(s-1) \qquad \text{если} \qquad 2 \le s \le 3\,.$$

Выполнена следующая

Лемма 31. *Пусть* ω *– мультипликативная функция, удовлетворяющая*

$$(94)\qquad 0 < \omega(p) < p \quad \textit{если} \quad p \in \mathcal{P}\,, \qquad\qquad \omega(p) = 0 \quad \textit{если} \quad p \notin \mathcal{P}\,,$$

где $\mathcal{P}$ *– некоторое множество из простых чисел. Далее, предположим, что*

$$(95)\qquad \prod_{w_1 \le p < w_2} \Big(1 - \frac{\omega(p)}{p}\Big)^{-1} \le \frac{\log w_2}{\log w_1}\Big(1 + \frac{K}{\log w_1}\Big)$$

для некоторой постоянной $K > 0$ *и для всех* w_1, w_2*, таких что* $2 \le w_1 \le w_2$*. Пусть* $D, w \ge 2$*. Обозначим*

$$P(w) = \prod_{\substack{p<w \\ p \in \mathcal{P}}} p\,, \qquad\qquad s = \frac{\log D}{\log w}$$

и пусть $\lambda^{\pm}(d)$ *– функции Россера порядка* D*.*

Для любого $n \in \mathbb{N}$ *имеем*

$$\sum_{d|(n,P(w))} \lambda^-(d) \le \sum_{d|(n,P(w))} \mu(d) \le \sum_{d|(n,P(w))} \lambda^+(d)\,.$$

Далее, если $2 \le w \le D$*, то*

$$\prod_{p<w}\Big(1 - \frac{\omega(p)}{p}\Big) \le \sum_{d|P(w)} \lambda^+(d)\frac{\omega(d)}{d} \le \prod_{p<w}\Big(1 - \frac{\omega(p)}{p}\Big)\Big(F(s) + \mathcal{O}\big(e^{\sqrt{K}-s}(\log D)^{-1/3}\big)\Big)\,.$$

Если $2 \le w \le D^{1/2}$*, то*

$$\prod_{p<w}\Big(1 - \frac{\omega(p)}{p}\Big) \ge \sum_{d|P(w)} \lambda^-(d)\frac{\omega(d)}{d} \ge \prod_{p<w}\Big(1 - \frac{\omega(p)}{p}\Big)\Big(f(s) + \mathcal{O}\big(e^{\sqrt{K}-s}(\log D)^{-1/3}\big)\Big)\,.$$

Доказательство: Настоящая лемма совпадает с Леммой 10 из [30].

□

Наконец, верна следующая

Лемма 32. *Пусть выполнены предположения Леммы 31 и, кроме того,* $\delta \mid P(w)$ *и* $s \geq 2$. *Имеем*

$$\sum_{\substack{d|P(w)\\ d\equiv 0(\delta)}} \lambda^{\pm}(d)\frac{\omega(d)}{d} = \sum_{\substack{d|P(w)\\ d\equiv 0(\delta)}} \mu(d)\frac{\omega(d)}{d} + \mathcal{O}\Big(\tau(\delta)\big(s^{-s} + e^{\sqrt{K}-s}(\log D)^{-1/3}\big)\Big)\ .$$

Доказательство: Смотри [30], Лемма 11.

□

2.6. **Леммы нужны для оценки тригометрических сумм по простым числам.**

Следует оценка линейной тригонометрической суммы.

Лемма 33. *Если* $X \geq 1$, *то*

$$\Big|\sum_{n\leq X} e(\alpha n)\Big| \leq \min\left(X, \frac{1}{2||\alpha||}\right)\ .$$

Доказательство: Смотри [12], гл.6, §2.

□

В следующей лемме представлены некоторые оценки, которые используются при применении метода И.М. Виноградова.

Лемма 34. *Предположим, что* $X, Y, \alpha \in \mathbb{R}\,;\ a \in \mathbb{Z}\,;\ k, q \in \mathbb{N}\,;\ X, Y \geq 1\,;\ k\ \geq\ 2$ *и что*

$$(a, q)\ =\ 1\,, \qquad \Big|\,\alpha - \frac{a}{q}\,\Big| \leq \frac{1}{q^2}\,.$$

Тогда имеем

$$(i) \qquad \sum_{n\leq X} \min\Big(Y, \frac{1}{||\alpha n||}\Big)\ \leq\ 6\Big(\frac{X}{q}+1\Big)\Big(Y + q\log q\Big)\ ,$$

$$(ii) \qquad \sum_{n\leq X} \tau_k(n)\ \min\Big(Y, \frac{1}{||\alpha n||}\Big)\ \ll\ XY\ \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{X} + \frac{q}{XY}\right)^{1/2}\big(\ \log(2Xq)\,\big)^{k^2/2}\ .$$

Доказательство: Неравенство (i) доказано в [12], гл.6, §2. Рассмотрим (ii). Обозначим сумму в левой части неравенства через S. В силу Леммы 1 имеем

$$S^2 \leq \Big(\ \sum_{n\leq X} \tau_k^2(n)\ \min\Big(Y, \frac{1}{||\alpha n||}\Big)\ \Big)\Big(\ \sum_{n\leq X} \min\Big(Y, \frac{1}{||\alpha n||}\Big)\ \Big)\ .$$

В первом сомножителе оценим минимум величиной Y и воспользуемся Леммой 7 (i). Второй сомножитель оцениваем при помощи (i).

$\square$

Метод И.М. Виноградова основан на разложении суммы вида

$$\sum_{P<n\le P_1} \Lambda(n)\, G(n) \tag{96}$$

на небольшое количество сумм двух типов.

Суммы первого типа – ето

$$\sum_{\substack{M<m\le M_1\\ L<l\le L_1\\ P<ml\le P_1}}\sum a_m\, G(ml) \qquad \text{и} \qquad \sum_{\substack{M<m\le M_1\\ L<l\le L_1\\ P<ml\le P_1}}\sum a_m\, (\log l)\, G(ml)\,.$$

Суммы второго типа – ето

$$\sum_{\substack{M<m\le M_1\\ L<l\le L_1\\ P<ml\le P_1}}\sum a_m\, b_l\, G(ml)\,.$$

Следующая лемма представляет вариант для разбития суммы (96), предложенный Хийт–Брауном.

Лемма 35. *Пусть $G(n)$ – комплекснозначая функция и числа P, P_1, u, v, $z \in \mathbb{R}$ удовлетворяют*

$$2 \le u \le v \le z \le P < P_1 \le 2P\,, \qquad u^2 \le z\,, \qquad 128uz^2 \le P_1\,, \qquad 2^{18}P_1 \le v^3\,.$$

Тогда сумму (96) *можно разложить на $\mathcal{O}(\log^6 P)$ подсумм, каждая из которых является либо суммой первого типа, для которой*

$$L \ge z\,, \quad M_1 \le 2M\,, \quad L_1 \le 2L\,, \quad |a_m| \ll \tau_5(m)\log P\,.$$

либо суммой второго типа, для которой

$$u \le L \le v\,, \quad M_1 \le 2M\,, \quad L_1 \le 2L\,, \quad |a_m| \ll \tau_5(m)\log P\,, \quad |b_l| \ll \tau_5(l)\log P\,.$$

Доказательство: Смотри [49].

$\square$

Наконец, для оценки одной тригонометрической суммы, нам нужна следующая вспомогательная

Лемма 36. *Пусть $M \le N < N_1 \le M_1$ и пусть $a_n \in \mathbb{C}$. Имеем*

$$\Big|\sum_{N<n\le N_1} a_n\Big| \le \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta)\Big|\sum_{M<n\le M_1} a_n e(n\theta)\Big|\, d\theta\,,$$

где

$$K(\theta) = \min\big(\, M_1 - M + 1,\, (\pi|\theta|)^{-1},\, (\pi\theta)^{-2}\,\big)\,.$$

Кроме того

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\theta)\, d\theta \;\le\; 3\log(2 + M_1 - M)\,.$$

Доказательство: Смотри [28].

$\square$

3. Доказательство Теоремы 1.

3.1. **Корректность определений некоторых величин.**

В самом начале доказательства установим корректность определений (62), (64) и (65), соответственно для величин $\Sigma_0(\mathbf{d},N)$, $H(t)$ и $\mathcal{N}_0(N)$.

Сначала оценим функцию $h_{\mathbf{d}}(q,N)$, определенную через (61), и таким образом докажем сходимость ряда $\Sigma_0(\mathbf{d},N)$.

Для каждого простого $p>2$ определим

$$H_0(p,N)=\begin{cases}\frac{1}{p} & \text{если } p\mid N\,,\\ \frac{-1}{p(p-1)}\Big(1+\Big(\frac{-N}{p}\Big)\Big) & \text{если } p\nmid N\,;\end{cases}\tag{97}$$

$$H_1(p,N)=\begin{cases}\frac{-1}{p}\Big(\frac{-1}{p}\Big) & \text{если } p\mid N\,,\\ \frac{1}{p-1}\Big(\Big(\frac{-N}{p}\Big)+\frac{1}{p}\Big(\frac{-1}{p}\Big)\Big) & \text{если } p\nmid N\,;\end{cases}\tag{98}$$

$$H_2(p,N)=\begin{cases}\Big(\frac{-1}{p}\Big) & \text{если } p\mid N\,,\\ \frac{-1}{p-1}\Big(\Big(\frac{-1}{p}\Big)+\Big(\frac{N}{p}\Big)\Big) & \text{если } p\nmid N\,;\end{cases}\tag{99}$$

$$H_3(p,N)=\begin{cases}-1 & \text{если } p\mid N\,,\\ \frac{1}{p-1}\Big(p\Big(\frac{N}{p}\Big)+1\Big) & \text{если } p\nmid N\,.\end{cases}\tag{100}$$

Имеет место следующая

Лемма 37. *Предположим, что $N\equiv 4\ (24)$ и что $\mathbf{d}=\langle d_1,d_2,d_3\rangle\in\mathbb{N}^3$, где координаты d_1,d_2,d_3 являются нечетными и бесквадратными числами. Тогда функция $h_{\mathbf{d}}(q,N)$ мультипликативна по отношению к q. Далее, имеем*

$$h_{\mathbf{d}}(2^l,N)=\begin{cases}0 & \textit{если } l=1\,,\\ -1/2 & \textit{если } l=2\,,\\ 1/2 & \textit{если } l=3\,,\\ 0 & \textit{если } l>3\,.\end{cases}\tag{101}$$

Если $p>2$ – простое число, то

$$h_{\mathbf{d}}(p^l,N)=\begin{cases}H_j(p,N) & \textit{если } p^j\parallel d_1d_2d_3 \ \textit{ и } \ l=1\,,\\ 0 & \textit{если } l>1\,.\end{cases}\tag{102}$$

Для каждого $q\in\mathbb{N}$ имеем

$$h_{\mathbf{d}}(q,N)\ll\mu^2\Big(\frac{q}{(q,4)}\Big)\,\tau^3(q)\,q^{-2}\,(q,N)\,(d_1d_2d_3)^2\,.\tag{103}$$

Ряд $\Sigma_0(\mathbf{d}, N)$, *определенный через* (62), *абсолютно сходится и имеет место тождество*

$$\Sigma_0(\mathbf{d}, N) = \prod_{p>2} (1 + h_{\mathbf{d}}(p, N)) \,. \tag{104}$$

Доказательство: Мультипликативность $h_{\mathbf{d}}(q, N)$ по отношению к q является простым следствием Леммы 3, Леммы 20 (i) и Леммы 21 (i). Формула (101) следует из Леммы 20 (vi) и Леммы 21 (iii). Формула (102) в случае $l > 1$ является следствием Леммы 21 (ii). Осталось доказать (102) в случае $l = 1$.

Пусть $p > 2$ – простое число. Рассмотрим выражения

$$\Gamma_\nu(p, N) = \sum_{a(p)^*} S(p, a)^\nu \, e_p(-aN) \,.$$

В силу Леммы 23 имеем

$$\Gamma_0(p, N) = \sum_{a(p)^*} e_p(-aN) = \begin{cases} p - 1 & \text{если} \quad p \mid N \,, \\ -1 & \text{если} \quad p \nmid N \,. \end{cases}$$

Далее, в силу Леммы 19 (ii), (iii) имеем

$$\sum_{a(p)^*} \left(\frac{a}{p}\right) e_p(-aN) = \left(\frac{-N}{p}\right) S(p, 1) \,.$$

Используя ети формулы, мы в состоянии вычислить $\Gamma_\nu(p, N)$ для $\nu = 1, 2, 3, 4$. Для етого нам нужны Лемма 13 (iii); Лемма 19 (ii), (iii); Лемма 20 (iv), (v) и Лемма 23. Получим

$$\Gamma_1(p, N) = p \left(\frac{N}{p}\right) ; \qquad \Gamma_2(p, N) = \begin{cases} p(p-1)\left(\frac{-1}{p}\right) & \text{если} \quad p \mid N \,, \\ -p\left(\frac{-1}{p}\right) & \text{если} \quad p \nmid N \,; \end{cases}$$

$$\Gamma_3(p, N) = p^2 \left(\frac{-N}{p}\right) ; \qquad \Gamma_4(p, N) = \begin{cases} p^2(p-1) & \text{если} \quad p \mid N \,, \\ -p^2 & \text{если} \quad p \nmid N \,. \end{cases}$$

Пусть $p^j \parallel d_1 d_2 d_3$, где $j = 0, 1, 2,$ или 3. Так как числа d_i бесквадратны, то p делит ровно j из чисел d_i. Тогда, в силу (2) и (60), имеем $S_{\mathbf{d}}(p, a) = p^j \, S(p, a)^{3-j}$. Следовательно, используя (61) и Лемму 21 (ii), получим

$$h_{\mathbf{d}}(p, N) = p^{j-3} \, (p-1)^{-1} \left(\Gamma_{4-j}(p, N) \; - \; \Gamma_{3-j}(p, N) \right) .$$

Теперь воспользуемся выражениями для Γ_ν и получим формулу (102) в случае $l = 1$.

Докажем оценку (103). Пусть $q = 2^l m$, где $2 \nmid m$. Можно предположить, что $l \le 3$ и что $\mu^2(m) = 1$, потому что в противном случае $h_{\mathbf{d}}(q, N) = 0$ и оценка верна. В етом случае мы имеем $|h_{\mathbf{d}}(q, N)| \ll |h_{\mathbf{d}}(m, N)|$ и также $q \asymp m$.

Из (97) – (100) следует

$$|H_0(p, N)| \le \begin{cases} p^{-1} & \text{если} \quad p \mid N \,, \\ 6p^{-2} & \text{если} \quad p \nmid N \,; \end{cases} \qquad |H_j(p, N)| \le 6 \quad \text{если} \quad j = 1, 2, 3 \,.$$

Тогда, в силу етих неравенств, (102) и Леммы 7 (iv), имеем

$$|h_{\mathbf{d}}(m,N)| = \prod_{j=0}^{3} \prod_{\substack{p|m \\ p^j \| d_1d_2d_3}} |H_j(p,N)| \le 6^{\nu(m)} \Big(\prod_{\substack{p|m\,,\, p|N \\ p\nmid d_1d_2d_3}} p^{-1} \Big) \Big(\prod_{\substack{p|m\,,\, p\nmid N \\ p\nmid d_1d_2d_3}} p^{-2} \Big)$$

$$= 6^{\nu(m)} \Big(\prod_{\substack{p|(m,N) \\ p\nmid d_1d_2d_3}} p^{-1} \Big) \Big(\prod_{\substack{p|m \\ p\nmid d_1d_2d_3}} p^{-2} \Big) \Big(\prod_{\substack{p|(m,N) \\ p\nmid d_1d_2d_3}} p^{2} \Big)$$

$$\le \tau^3(m) \Big(\prod_{\substack{p|(m,N) \\ p\nmid d_1d_2d_3}} p \Big) \Big(\prod_{p|m} p^{-2} \Big) \Big(\prod_{\substack{p|m \\ p|d_1d_2d_3}} p^{2} \Big)$$

$$\le \tau^3(m)\,(m,N)\,m^{-2}\,(d_1d_2d_3)^2 \ll \tau^3(q)\,(q,N)\,q^{-2}\,(d_1d_2d_3)^2\,.$$

Отсюда следует оценка (103).

В силу (103) и Леммы 7 (vi), ряд Σ_0, определенный через (62), абсолютно сходится. Это означает, что мы можем применить Лемму 11 и, имея ввиду (101) и (102), получим тождество (104).

□

Теперь рассмотрим интеграл $I(\beta,u)$, определенный через (63). Имеет место

Лемма 38. *Выполнены оценки*

$$\begin{array}{lll} (i) & I(\beta,u) \ll_k (1+|\beta|^k)\,|u|^{-k} & \textit{если } u\neq 0 \textit{ и для каждого } k\in\mathbb{N}\,, \\ (ii) & I(\beta) \quad \ll_k \min(1,|\beta|^{-k}) & \textit{для каждого } k\in\mathbb{N}\,, \\ (iii) & I(\beta,u) \ll \min(1,|\beta|^{-1/2})\,. & \end{array}$$

Доказательство: Докажем (i). Пусть $k\in\mathbb{N}$. Интегрируя по частям и используя формулу для k–той производной произведения, получим

(105)

$$I(\beta,u) = \int_0^1 \omega_0(x)\,e(\beta x^2)\,e(ux)\,dx = (-2\pi i u)^{-k} \int_0^1 e(ux)\,\frac{d^k}{dx^k}\Big(\omega_0(x)\,e(\beta x^2)\Big)\,dx$$

$$\ll |u|^{-k} \max_{x\in[0,1]} \Big| \frac{d^k}{dx^k}\Big(\omega_0(x)\,e(\beta x^2)\Big) \Big| \ll |u|^{-k} \max_{\substack{x\in[0,1] \\ 0\le l\le k}} \Big| \frac{d^l}{dx^l}\,e(\beta x^2) \Big|$$

Далее, работая по индукции, получим, что

$$\frac{d^l}{dx^l}\,e(\beta x^2) = e(\beta x^2)\,H_l(\beta,x)\,,$$

где $H_l(\beta, x)$ – многочлен переменных β и x с комплексными коэффициентами, степень которого по отношению к β не превосходит l. Тогда, используя (105), получим

$$I(\beta,u) \ll |u|^{-k}\left(1+|\beta|+|\beta|^2+\cdots+|\beta|^k\right) \ll |u|^{-k}\left(1+|\beta|^k\right).$$

Докажем (ii). Оценка $I(\beta) \ll 1$ тривиальна. Пусть $\beta \neq 0$. Делая замену переменной, получим

$$I(\beta) = \int_{9/20}^{11/20} \omega_0(x)\, e(\beta x^2)\, dx = \int_{(9/20)^2}^{(11/20)^2} \omega_1(y)\, e(\beta y)\, dy\,,$$

где $\omega_1(y) = 2^{-1}\, y^{-1/2}\, \omega_0(\, y^{1/2}\,)$. Теперь интегрируем по частям k раз и получаем (ii).

Рассмотрим (iii). Оценка $I(\beta,u) \ll 1$ тривиальна, а оценка $I(\beta,u) \ll |\beta|^{-1/2}$ является следствием общей теоремой об оценках тригонометрических интегралов (см., например, [8], гл.3, §1).

□

В силу Леммы 38 интеграл в правой части равенства (64) абсолютно сходится. Следовательно функция $H(t)$ корректно определена.

Рассмотрим более подробно функцию $H(t)$ и величину $\mathcal{N}_0(N)$, определенные через (64) и, соответственно, (65). Имеет место

Лемма 39. *Функция $H(t)$ дифференцируема бесконечно много раз. Она положительна, если $t \in (243/400, 363/400)$, и равна нулю, если t находится вне етого интервала. Далее, имеем*

$$I^3(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t)\, e(\beta t) dt \tag{106}$$

и

$$\kappa_0 \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} |I(\beta)|^6\, d\beta = \int_{-\infty}^{\infty} H^2(t)\, dt\,. \tag{107}$$

Если $\beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0$, то для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнена оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty} H^2(t)\, e(\beta t) dt \ll_k \min(1, |\beta|^{-k})\,. \tag{108}$$

Наконец, для величины $\mathcal{N}_0(N)$, определенной через (65), имеем

$$\mathcal{N}_0(N) = P\int_{P/4}^{P} H\Big(1-\frac{x^2}{P^2}\Big)\frac{dx}{\log x} \asymp \frac{P^2}{\log P}\,. \tag{109}$$

Доказательство: Из (63) следует, что $\overline{I(\beta)} = I(-\beta)$. Тогда, в силу (64), имеем $\overline{H(t)} = H(t)$, а ето означает, что $H(t)$ принимает действительные значения.

Далее, функция $H(t)$ является преобразованием Фурие функции $I^3(\beta)$. Тогда гладкость $H(t)$ и тождества (106) и (107) являются следствиями известных теорем гармонического анализа (см., например, [11], гл. 14, §2).

Для дальнейшего изучения $H(t)$ воспользуемся классическими рассуждениями кругового метода. Для удобства приведем коротко вычисления, которые почти совпадают с соответствующими вычислениями в [12], гл.11, §1.

Рассмотрим функцию $F(c)=\int_0^c H(t)\,dt$. Имеем

$$F(c)=\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_0^1\omega_0(x)\,e(\beta x^2)\,dx\Big)^3\,\frac{1-e(-\beta c)}{2\pi i\beta}\,d\beta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^1\int_0^1\omega_0(x_1)\,\omega_0(x_2)\,\omega_0(x_3)$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{\sin\big(2\pi\beta(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\big)\;-\;\sin\big(2\pi\beta(x_1^2+x_2^2+x_3^2-c)\big)}{\beta}\,d\beta\;\;dx_1\,dx_2\,dx_3\,.$$

В силу того, что

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}\,\alpha\,,$$

имеем

$$F(c)=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\int_0^1\omega_0(x_1)\,\omega_0(x_2)\,\omega_0(x_3)$$

$$\times\Big(\mathrm{sign}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\;-\;\mathrm{sign}(x_1^2+x_2^2+x_3^2-c)\Big)\,dx_1\,dx_2\,dx_3$$

$$=\iiint\limits_{x_1^2+x_2^2+x_3^2\le c}\omega_0(x_1)\,\omega_0(x_2)\,\omega_0(x_3)\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,.$$

Используя последнюю формулу и (56), получим, что функция $F(c)$ строго возрастает в интервале $(243/400,\,363/400)$, а в $(-\infty,\,243/400]$ и в $[363/400,\,\infty)$ – постоянна. Осталось воспользоваться фактом, что $H(t)=F'(t)$.

Наконец, оценка (108) получается многократным интегрированием по частям. Все свойства функции $H(t)$ доказаны.

Теперь формула (109) для $\mathcal{N}_0(N)$ очевидна. Лемма доказана.

$\square$

3.2. **Начало доказательства Предложения 1.**

Для того чтобы $\mathcal{M}_{\mathbf{d},Q}(n)$ было хорошим приближением для $\Omega_{\mathbf{d}}(n)$, нам надо взять Q достаточно большим. С другой стороны, становится труднее работать с $\mathcal{M}_{\mathbf{d},Q}(n)$ если Q слишком большое. Теперь мы предположим только, что

(110) $$Q\le P^{1-\varepsilon}\,.$$

Мы накладываем ето ограничение, потому что теперь мы в состоянии использовать Лемму 17. Другой причиной настаивать на таком ограничении является то, что сумма $\mathcal{W}_{\mathbf{d},Q}(\alpha)$, определенная через (124), в етом случае ведет себя сравнительно просто. Это становится ясным из Леммы 44.

Для D мы предположим, что

(111) $$D=P^{\alpha_0}\,,\qquad\text{где}\qquad\alpha_0\in(0,1)\,.$$

Отметим, что из оценки вида (70) и (75) с любым, сколь угодно малым фиксированным α_0, следует нетривиальный результат для нашей задачи. Результат становится лучше с ростом α_0, так что наша цель установить (70) и (75) с возможно наибольшим α_0.

В начале доказательства Предложения 1 мы наложим только некоторые простые ограничения на величины Q и D. В процессе работы мы будем накладывать новые и новые ограничения и об?ясним наш выбор (69) в конце доказательства.

Рассмотрим сумму $\mathcal{E}(D,Q)$, определенную через (68). Используя Лемму 1 и Лемму 7 (i), получим

$$\mathcal{E}^2(D,Q) \ll (\log P)^{12}\, P\, \mathcal{E}_0, \tag{112}$$

где

$$\mathcal{E}_0 = \sum_{(\mathcal{D})} d_1 d_2 d_3 \sum_{k\le P} \big|\, \mathcal{G}_{\mathbf{d},Q}(N-k^2) \,\big|^2 .$$

Чтобы оценить ету сумму, воспользуемся „квадратным решетом", (Хийт–Браун [48]). Пусть

$$R = P^{\alpha_1}\,, \qquad \text{где} \qquad \alpha_1 \in (0,1)\,. \tag{113}$$

Мы определим значение постоянной α_1 позже. Рассморим выражение

$$\kappa(n,R) = \left(\frac{\log R}{R} \sum_{\substack{R<p\le 2R \\ p\nmid N}} \left(\frac{N-n}{p} \right) \right)^2 . \tag{114}$$

Если $n = N - k^2$ для некоторого целого числа $k \in (0,P]\,$, то используя (112) – (114), Лемму 16 (i) и очевидное неравенство $\nu(m) \ll \log m$, получим $\kappa(n,R) \gg 1$. Далее, для всех $n \in \mathbb{Z}$ имеем $\kappa(n,R) \ge 0$. Следовательно

$$\mathcal{E}_0 \ll \sum_{(\mathcal{D})} d_1 d_2 d_3 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \kappa(n,R) \,\big|\, \mathcal{G}_{\mathbf{d},Q}(n) \,\big|^2 .$$

Определение: С етого места $\sum_{(\mathcal{R})}$ обозначает, что суммирование ведется по простым числам p, p', таких что $R < p, p' \le 2R$, $(pp', N) = 1$ и $p \ne p'$.

Пользуясь (114), Леммой 12 (i) и Леммой 16 (i), получим

$$\mathcal{E}_0 \ll \left(\frac{\log R}{R} \right)^2 \big|\mathcal{E}_1\big| + \frac{\log R}{R}\, \mathcal{E}_2, \tag{115}$$

где

$$\mathcal{E}_1 = \sum_{(\mathcal{D})} d_1 d_2 d_3 \sum_{(\mathcal{R})} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{N-n}{pp'} \right) \big|\, \mathcal{G}_{\mathbf{d},Q}(n) \,\big|^2 , \tag{116}$$

$$\mathcal{E}_2 = \sum_{(\mathcal{D})} d_1 d_2 d_3 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|\, \mathcal{G}_{\mathbf{d},Q}(n) \,\big|^2 . \tag{117}$$

3.3. Оценка для суммы $\mathcal{E}_2$.

3.3.1. *Подготовка.*

Отметим, что величина $\mathcal{M}_{\mathbf{d},Q}(n)$, определенная через (66), принимает действительные значения. Пользуясь (67) и (117) выражаем $\mathcal{E}_2$ в виде

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_2^{(1)} - 2\mathcal{E}_2^{(2)} + \mathcal{E}_2^{(3)}\,, \tag{118}$$

где $\mathcal{E}_2^{(i)},\ i = 1,2,3$, являются вкладами соответственных членов в развитии

$$|\mathcal{G}|^2 = \Omega^2 - 2\,\Omega\,\mathcal{M} + \mathcal{M}^2\,.$$

Сначала докажем, что

$$\mathcal{E}_2^{(i)} = \sum_{(\mathcal{D})} d_1 d_2 d_3\ J_2^{(i)}, \qquad i = 1,2,3, \tag{119}$$

где

$$J_2^{(1)} = \int_0^1 |f_{\mathbf{d}}(\alpha)|^2\,d\alpha\,, \tag{120}$$

$$J_2^{(2)} = \int_0^1 f_{\mathbf{d}}(\alpha)\,\mathcal{W}_{\mathbf{d},Q}(-\alpha)\,d\alpha\,, \tag{121}$$

$$J_2^{(3)} = \int_0^1 |\mathcal{W}_{\mathbf{d},Q}(\alpha)|^2\,d\alpha \tag{122}$$

и где

$$f_{\mathbf{d}}(\alpha) = \prod_{i=1}^{3} f_{d_i}(\alpha), \qquad f_d(\alpha) = \sum_{\substack{x\in\mathbb{Z}\\ x\equiv 0\ (d)}} \omega(x)\,e(\alpha x^2), \tag{123}$$

$$\mathcal{W}_{\mathbf{d},Q}(\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}_{\mathbf{d},Q}(n)\,e(\alpha n). \tag{124}$$

Рассмотрим $\mathcal{E}_2^{(1)}$. Пользуясь (58), (59), (123) и Леммой 4 (ii), получим

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Omega_{\mathbf{d}}^2(n) &= \sum_{\substack{x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2\\ x_i,y_i\equiv 0\ (d_i)}} \omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{y})\\ &= \sum_{\substack{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{Z}^3\\ x_i,y_i\equiv 0\ (d_i)}} \omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{y}) \int_0^1 e\big(\alpha(x_1^2+x_2^2+x_3^2-y_1^2-y_2^2-y_3^2)\big)d\alpha = J_2^{(1)}\,.\end{aligned}$$

Отсюда следует тождество (119) для $\mathcal{E}_2^{(1)}$.

Рассмотрим $\mathcal{E}_2^{(2)}$. В силу (58), (59), (123) и Леммы 4 (ii), имеем

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Omega_{\mathbf{d}}(n)\mathcal{M}_{\mathbf{d},Q}(n) \;=\; \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z},\ \mathbf{x}\in\mathbb{Z}^3\\ x_i\equiv 0\ (d_i)}} \omega(\mathbf{x})\mathcal{M}_{\mathbf{d},Q}(n) \int_0^1 e(\alpha(x_1^2+x_2^2+x_3^2-n))d\alpha \;=\; J_2^{(2)}.$$

Следовательно, тождество (119) для $\mathcal{E}_2^{(2)}$ выполнено.

Рассмотрим, наконец, $\mathcal{E}_2^{(3)}$. Из (124) и Леммы 4 (ii) следует

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}^2_{\mathbf{d},Q}(n) = \int_0^1 |\mathcal{W}_{\mathbf{d},Q}(\alpha)|^2 d\alpha\,.$$

Тогда тождество (119) для $\mathcal{E}_2^{(3)}$ тоже выполнено.

3.3.2. *Асимптотическая формула для* $\mathcal{E}_2^{(1)}$.

Для изучения интеграла $J_2^{(1)}$, определенного через (120), будем пользоваться методом Клостермана [60]. Очевидно, подинтегральная функция в правой части (120) периодическая с периодом единица. Следовательно, мы можем интегрировать по множеству

$$\big(\,(1+[P])^{-1},\, 1+(1+[P])^{-1}\,\big]\,.$$

Воспользуемся Леммой 14 и представим $J_2^{(1)}$ в виде суммы интегралов. В каждом из них сделаем замену переменной и получим

$$J_2^{(1)} = \sum_{q\le P}\sum_{a(q)^*}\int_{\mathcal{B}(q,a)} \Big| f_{\mathbf{d}}\Big(\frac{a}{q}+\beta\Big)\Big|^2 d\beta, \tag{125}$$

где

$$\mathcal{B}(q,a) = \big[\,-(q(q+q'))^{-1},\,(q(q+q''))^{-1}\,\big] \tag{126}$$

и где q' и q'' определены через условия

$$P < q+q', q+q'' \le q+P, \qquad q' \equiv \overline{a}\ (q), \qquad q'' \equiv -\overline{a}\ (q). \tag{127}$$

Для изучения подинтегральной функции в (125) нам нужна следующая лемма, доказательство которой приведено в конце параграфа.

Лемма 40. *Предположим, что* $q,\ d,\ b\in\mathbb{N}\,,\ h\in\mathbb{Z}\,,\ \beta\in\mathbb{R}\,,\ q\le P\,,\ |\beta|\le (qP)^{-1}$ *и* $d,\ b\le P^C$ *для некоторой постоянной* $C>0$. *Тогда для любые постоянные* $M>0$ *и* $\gamma\ge 1$ *имеем*

$$f_d\Big(\frac{h}{b}+\beta\Big) = \frac{P}{bd}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|\le\gamma\, b\, d\, q^{-1}\, P^{\varepsilon}}} S(b,hd^2,n)\, I\Big(\beta N, -\frac{Pn}{bd}\Big) \,+\, \mathcal{O}_{M,C,\varepsilon}(P^{-M})\,.$$

$\square$

Введем еще одно обозначение. Если $\mathbf{d}=\langle d_1,d_2,d_3\rangle\in\mathbb{N}^3$ и $\mathbf{u}=\langle u_1,u_2,u_3\rangle\in\mathbb{R}^3$, то определим

$$I_{\mathbf{d}}(\beta,\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^{3} I(\beta, u_i d_i^{-1})\,. \tag{128}$$

Далее, определим множества

$$\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}(H) = \{\ \mathbf{n}\in\mathbb{Z}^3\ :\ |n_i|\le 4d_iHP^{\varepsilon},\ n_i\equiv 0\ ((q,d_i^2)),\ i=1,2,3\ \}, \tag{129}$$

$$\mathcal{N}_{\mathbf{d},q} = \mathcal{N}_{\mathbf{d},q}(1)\,. \tag{130}$$

Из (60), (123), (128), Леммы 20 (*ii*) и Леммы 40 следует, что подинтегральное выражение в правой части (125) равно

$$\frac{P^6}{q^6(d_1d_2d_3)^2}\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}}\sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}} S_{\mathbf{d}}(q,a,\mathbf{n})\,S_{\mathbf{d}}(q,-a,-\mathbf{l}) \tag{131}$$

$$\times\, I_{\mathbf{d}}(\beta N,-Pq^{-1}\mathbf{n})\,I_{\mathbf{d}}(-\beta N,Pq^{-1}\mathbf{l})\,+\,\mathcal{O}(P^{-M})\,,$$

где $M>0$ – сколь угодно большая постоянная. Пользуясь (119), (125) и (131), получаем выражение для $\mathcal{E}_2^{(1)}$. После етого сделаем замену переменной $\beta N=\beta'$ и обозначим

$$\mathcal{B}'(q,a)=\big[\,-N(q(q+q'))^{-1},\;N(q(q+q''))^{-1}\,\big]\,. \tag{132}$$

Получим

$$\mathcal{E}_2^{(1)}=P^4\sum_{(\mathcal{D})}(d_1d_2d_3)^{-1}\sum_{q\le P}q^{-6}\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}}\sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}} \tag{133}$$

$$\times\sum_{a(q)^*}S_{\mathbf{d}}(q,a,\mathbf{n})S_{\mathbf{d}}(q,-a,-\mathbf{l})\mathcal{T}_{\mathbf{d}}(\mathbf{n},\mathbf{l},q,a)+\mathcal{O}(1),$$

где

$$\mathcal{T}_{\mathbf{d}}(\mathbf{n},\mathbf{l},q,a)=\int_{\mathcal{B}'(q,a)}I_{\mathbf{d}}(\beta,-Pq^{-1}\mathbf{n})I_{\mathbf{d}}(-\beta,Pq^{-1}\mathbf{l})d\beta. \tag{134}$$

Для исследования последного интеграла нам нужна лемма, доказательство которой приведено в конце параграфа.

Лемма 41. *Пусть* $u_1,\dots,u_6\in\mathbb{R}\,,\ u=\max(|u_1|,\dots,|u_6|)>0\,.$ *Тогда имеем*

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}|\,I(\beta,u_1)\dots I(\beta,u_6)\,|\,d\beta\ll_{\varepsilon}u^{-2+\varepsilon}\,.$$

□

Определим

$$\lambda(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},H)=\begin{cases}\sum_{i=1}^3 d_i^{-2}\left(n_i^2\,H^{-2}\,+\,l_i^2\right) & \text{если}\quad(\mathbf{n},\mathbf{l})\ne(\mathbf{0},\mathbf{0})\,,\\[2ex] 1 & \text{в противном случае}\ .\end{cases} \tag{135}$$

Пусть

$$\lambda(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l})=\lambda(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},1)\,. \tag{136}$$

Пользуясь (107), (127), (132), Леммой 38 (*iii*) и Леммой 41, получим

$$\mathcal{T}_{\mathbf{d}}(\mathbf{n},\mathbf{l},q,a)=\begin{cases}\mathcal{O}(q^2P^{-2+2\varepsilon}\lambda(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l})^{-1}) & \text{если}\quad(\mathbf{n},\mathbf{l})\ne(\mathbf{0},\mathbf{0})\,,\\[2ex] \kappa_0+\mathcal{O}(q^2P^{-2}) & \text{в противном случае}\ .\end{cases} \tag{137}$$

Далее, из (60) и Леммы 20 (ii), (iii) следует

$$\sum_{a(q)^*} |S_{\mathbf{d}}(q,a,\mathbf{n})S_{\mathbf{d}}(q,-a,-\mathbf{l})| \ll q^4\xi(q,\mathbf{d})\,, \tag{138}$$

где

$$\xi(q,\mathbf{d}) = \prod_{i=1}^{3}(q,d_i^2)\,. \tag{139}$$

Воспользуемся (133), (137) – (139) и получим

$$\mathcal{E}_2^{(1)} = \mathcal{U}_2 + \mathcal{O}\big(\, P^{2+2\varepsilon}\mathcal{Y}(P)\,\big) + \mathcal{O}(1)\,, \tag{140}$$

где

$$\mathcal{U}_2 = \kappa_0 P^4 \sum_{(\mathcal{D})}(d_1d_2d_3)^{-1}\sum_{q\le P} q^{-6}\sum_{a(q)^*}|S_{\mathbf{d}}(q,a)|^2 \tag{141}$$

и

$$\mathcal{Y}(K) = \sum_{q\le K}\sum_{(\mathcal{D})}\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}}\sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}} \frac{\xi(q,\mathbf{d})}{d_1d_2d_3\lambda(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l})}. \tag{142}$$

Осталось оценить величину $\mathcal{Y}$. Для етого нам нужна следующая лемма, доказательство которой дано в конце параграфа.

Лемма 42. *Предположим, что* $d_1,d_2,d_3 \le D$ *. Тогда имеем*

$$\sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},1}} \lambda(\mathbf{d},\mathbf{0},\mathbf{l})^{-1} \ll D^3P^{\varepsilon}\,.$$

□

Теперь мы в состоянии оценить величину $\mathcal{Y}$. Выполнена следующая

Лемма 43. *Предположим, что* $K \le P$. *Для суммы* $\mathcal{Y}(K)$, *определенной через* (142), *имеем*

$$\mathcal{Y}(K) \ll KD^6P^{7\varepsilon}.$$

□

Из (140) и Леммы 43 следует

$$\mathcal{E}_2^{(1)} = \mathcal{U}_2 + \mathcal{O}(P^{3+9\varepsilon}D^6). \tag{143}$$

Теперь приведем доказательства наших лемм.

Доказательство Леммы 40. Используя (123), получаем

$$f_d\Big(\frac{h}{b}+\beta\Big) = \sum_{y\in\mathbb{Z}} \omega(dy)\, e_b(h\,d^2\,y^2)\; e(\beta\,d^2\,y^2) = \sum_{m\ (b)} e_b(h\,d^2\,m^2)\;\mathcal{Z}_m \tag{144}$$

где

$$\mathcal{Z}_m = \sum_{\substack{y\in\mathbb{Z}\\ y\equiv m\ (b)}} \omega(dy)\; e(\beta\,d^2\,y^2)\,.$$

Рассмотрим $\mathcal{Z}_m$. Применяя Лемму 26 и используя (57), (58) и (63), получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_m &= \sum_{x\in\mathbb{Z}} \omega\big(\,d\,(m+bx)\,\big)\; e\big(\,\beta\,d^2\,(m+bx)^2\,\big) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega\big(\,d\,(m+bx)\,\big)\; e\big(\,\beta\,d^2\,(m+bx)^2\,\big)\; e(-nx)\,dx \\ &= \frac{P}{bd}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e_b(nm)\, I\Big(\beta\,N,\,-\frac{nP}{bd}\,\Big)\,.\end{aligned} \tag{145}$$

Абсолютная сходимость последнего ряда является простым следствием Леммы 38 (i). Действительно, если $n\neq 0$, то для произвольно большого $k\in\mathbb{N}$ имеем

$$I\Big(\beta\,N,\,-\frac{nP}{bd}\,\Big) \ll \big(\,1+|\beta|^k\,N^k\,\big)\,\Big(\frac{|n|\,P}{bd}\Big)^{-k} \ll \Big(\frac{bd}{|n|q}\Big)^{k}. \tag{146}$$

Используя (2), (144) и (145), получаем

$$f_d\Big(\frac{h}{b}+\beta\Big) = \frac{P}{bd}\,\sum_{n\in\mathbb{Z}} S\big(b,\,h\,d^2,\,n\big)\; I\Big(\beta\,N,\,-\frac{nP}{bd}\,\Big)\,.$$

Выберем $k=[\varepsilon^{-1}(2C+M+3)]$ и обозначим вклад членов, для которых $|n|>\gamma\,b\,d\,q^{-1}P^{\varepsilon}$, через $\mathcal{X}$. Оценим тривиально сумму Гаусса и воспользуемся (146) и Леммой 8 (iii). Получим

$$\mathcal{X} \ll \frac{P}{d}\sum_{|n|>bdq^{-1}P^{\varepsilon}} \Big|\,I\Big(\beta\,N,\,-\frac{nP}{bd}\,\Big)\,\Big| \ll_{M,C,\varepsilon} P^{-M}\,,$$

так что лемма доказана.

$\square$

Доказательство Леммы 41. Если $u\le 1$, то утверждение является следствием из оценки $J\ll 1$, которую мы получаем, оценивая каждый сомножитель $I(\beta,u_i)$ при помощи Леммы 38 (iii).

Теперь предположим, что $u>1$. Имеем $J=J_1+J_2$, где в J_1 интегрируем по β, таких что $|\beta|\le u^{1-\varepsilon/2}$, а в J_2 интегрируем по множеству других β. Из Леммы 38 (iii) следует, что $J_2\ll\int_{u^{1-\varepsilon/2}}^{\infty}\beta^{-3}\,d\beta\ll u^{-2+\varepsilon}$.

Рассмотрим теперь J_1. Пусть, например, $u = |u_1|$. Если $|\beta| \le |u_1|^{1-\varepsilon/2}$, то применяя Лемму 38 (i) с параметром $k = [6\varepsilon^{-1}]$, получим

$$I(\beta, u_1) \ll (1 + |\beta|^k)\, |u_1|^{-k} \ll |u_1|^{(1-\varepsilon/2)k-k}\,.$$

Для других сомножителей воспользуемся тривиальной оценкой $I(\beta, u_i) \ll 1$. Следовательно $J_1 \ll |u_1|^{(1-\varepsilon/2)(k+1)-k} \ll |u_1|^{-2}$ и утверждение верно.

□

Доказательство Леммы 42. Сумма, которую оцениваем $\ll 1 + T_1 + T_2 + T_3$, где T_ν являются вкладами из $\mathbf{l}$, такими что $|l_\nu|\, d_\nu^{-1} = \max_{i=1,2,3} \big(|l_i|\, d_i^{-1}\big) > 0$. Рассмотрим, например, T_1. Имеем

$$T_1 \ll \sum_{l_1 \le 4 d_1 P^\varepsilon} \frac{d_1^2}{l_1^2} \left(1 + \frac{d_2 l_1}{d_1}\right)\left(1 + \frac{d_3 l_1}{d_1}\right) \ll D^3 P^\varepsilon\,.$$

Лемма доказана.

□

Доказательство Леммы 43. Очевидно $\mathcal{Y}(K) \ll \mathcal{Y}' + \mathcal{Y}''$, где $\mathcal{Y}'$ – вклад членов, для которых $\mathbf{l} = \mathbf{0}$ и $\mathcal{Y}''$ – вклад остальных членов.

Рассмотрим $\mathcal{Y}''$. Используя Лемму 42, получим

$$\sum_{\substack{\mathbf{l} \in \mathcal{N}_{\mathbf{d},q} \\ \mathbf{l} \ne \mathbf{0}}} \lambda(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{l})^{-1} \ll \sum_{\mathbf{l} \in \mathcal{N}_{\mathbf{d},q}} \lambda(\mathbf{d}, \mathbf{0}, \mathbf{l})^{-1} \ll D^3 P^\varepsilon$$

и, очевидно,

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{d},q}} 1 \ll P^{3\varepsilon} \prod_{i=1}^{3} \left(1 + \frac{d_i}{(q, d_i^2)}\right).$$

Теперь воспользуемся (139) и получим

$$\mathcal{Y}'' \ll D^3 P^{4\varepsilon} \sum_{q \le K} \Big(\sum_{d \le D} \frac{(q, d^2)}{d} \Big(1 + \frac{d}{(q, d^2)}\Big) \Big)^3.$$

Чтобы оценить сумму по d, применим Лемму 8 (ii). Потом воспользуемся Леммой 7 (vi) и получим $\mathcal{Y}'' \ll K D^6 P^{7\varepsilon}$.

Теперь рассмотрим $\mathcal{Y}'$. Из Леммы 42 следует

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{d},q}} \lambda(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{0})^{-1} \ll D^3 P^\varepsilon\,.$$

Следовательно, в силу (139), имеем

$$\mathcal{Y}' \ll D^3 P^\varepsilon \sum_{q \le K} \Big(\sum_{d \le D} \frac{(q, d^2)}{d} \Big)^3.$$

Воспользуемся снова Леммой 7 (vi) и Леммой 8 (ii). Получим $\mathcal{Y}' \ll K D^6 P^{4\varepsilon}$. Лемма доказана.

□

3.3.3. *Асимптотическая формула для $\mathcal{E}_2^{(2)}$.*

Рассмотрим интеграл $J_2^{(2)}$, определенный через (121). Используя Лемму 14, получим

$$J_2^{(2)} = \sum_{q\le P}\sum_{a(q)^*}\int_{\mathcal{B}(q,a)} f_{\mathbf{d}}\Big(\frac{a}{q}+\beta\Big)\,\mathcal{W}_{\mathbf{d},Q}\Big(-\frac{a}{q}-\beta\Big)d\beta\,, \tag{147}$$

где множество интегрирования $\mathcal{B}(q,a)$ определено через (126). Найдем выражение для подинтегральной функции в правой части (147). Для величины $f_{\mathbf{d}}$ воспользуемся Леммой 40, а для $\mathcal{W}_{\mathbf{d},Q}$ нам нужна следующая

Лемма 44. *Предположим, что $Q \le P^{1-\varepsilon}$, $|\beta| \le (qP)^{-1}$ и $(a,q)=1$. Тогда для любой, сколь угодно большой постоянной $M>0$, имеем*

$$\mathcal{W}_{\mathbf{d},Q}\Big(\frac{a}{q}+\beta\Big) = \begin{cases} \dfrac{P^3}{q^3\,d_1d_2d_3}\;S_{\mathbf{d}}(q,a)\;I^3(\beta N)\;+\;\mathcal{O}_{M,\varepsilon}(P^{-M}) & \text{если } q\le Q\,,\\[2ex] \mathcal{O}_{M,\varepsilon}(P^{-M}) & \text{если } Q<q\le P\,.\end{cases}$$

□

Используя (110), Лемму 40 и Лемму 44, получим, что если $q\le Q$, то подинтегральное выражение в правой части (147) равно

$$\frac{P^6}{q^6(d_1d_2d_3)^2}\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}} S_{\mathbf{d}}(q,a,\mathbf{n})S_{\mathbf{d}}(q,-a)I_{\mathbf{d}}(\beta N,-Pq^{-1}\mathbf{n})I^3(-\beta N)+\mathcal{O}(P^{-M})\,.$$

Если $Q<q\le P$, то подинтегральное выражение равно $\mathcal{O}(P^{-M})$. Следовательно, в силу (119), (134) и (147), имеем

$$\mathcal{E}_2^{(2)} \;=\; P^4\sum_{(\mathcal{D})}(d_1d_2d_3)^{-1}\sum_{q\le Q}q^{-6}\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}}\sum_{a(q)^*}S_{\mathbf{d}}(q,a,\mathbf{n})\,S_{\mathbf{d}}(q,-a)\,\mathcal{T}_{\mathbf{d}}(\mathbf{n},\mathbf{0},q,a)+\mathcal{O}(1)\,.$$

Теперь воспользуемся (137) – (139) и Леммой 43 и получим

$$\mathcal{E}_2^{(2)} = \mathcal{U}_2^* + \mathcal{O}(P^{3+9\varepsilon}D^6), \tag{148}$$

где

$$\mathcal{U}_2^* = \kappa_0 P^4\sum_{(\mathcal{D})}(d_1d_2d_3)^{-1}\sum_{q\le Q}q^{-6}\sum_{a(q)^*}|S_{\mathbf{d}}(q,a)|^2. \tag{149}$$

Сравним выражение $\mathcal{U}_2^*$ с $\mathcal{U}_2$, которое определено через (141). Используя (138), (139), (141), (149) и Лемму 8 (ii), (iii), получим

$$(150)\quad \mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_2^* \ll P^4 \sum_{(\mathcal{D})} (d_1d_2d_3)^{-1} \sum_{Q<q\le P} q^{-6} \sum_{a(q)^*} |S_{\mathbf{d}}(q,a)|^2$$

$$\ll P^4 \sum_{(\mathcal{D})} (d_1d_2d_3)^{-1} \sum_{Q<q\le P} q^{-2}\,\xi(q,\mathbf{d}) \ll P^4 \sum_{Q<q\le P} q^{-2} \Big(\sum_{d\le D} \frac{(q,d^2)}{d} \Big)^3$$

$$\ll P^{4+3\varepsilon} D^3 \sum_{Q<q} q^{-2} \ll P^{4+3\varepsilon} D^3 Q^{-1}\,.$$

Из (148) и (150) следует

$$(151)\qquad \mathcal{E}_2^{(2)} = \mathcal{U}_2 + \mathcal{O}\big((P^3D^6 + P^4D^3Q^{-1})P^{9\varepsilon}\big)\,.$$

Доказательство Леммы 44. Используя определения (66) и (124) для $\mathcal{M}_{\mathbf{d},Q}$ и, соответственно, $\mathcal{W}_{\mathbf{d},Q}$, получим

$$\mathcal{W}_{\mathbf{d},Q}\Big(\frac{a}{q}+\beta\Big) = \frac{P}{d_1d_2d_3} \sum_{q_1\le Q} q_1^{-3} \sum_{a_1(q_1)^*} S_{\mathbf{d}}(q_1,a_1)\,\Phi\,,$$

где

$$\Phi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} H\Big(\frac{n}{N}\Big)\, e\Big(\Big(\frac{a}{q} - \frac{a_1}{q_1} + \beta\Big) n \Big)\,.$$

Рассмотрим величину Φ. Воспользуемся Леммой 26, после етого сделаем замену переменных в интегралах и, наконец, применим тождество (106). Получим

$$\Phi = N \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\, e\Big(\Big(\frac{a}{q} - \frac{a_1}{q_1} + \beta - m\Big) N x \Big)\, dx = N \sum_{m\in\mathbb{Z}} I^3 \Big(\Big(\frac{a}{q} - \frac{a_1}{q_1} + \beta - m\Big) N \Big)\,.$$

Без ограничения общности можем считать, что $0\le a\le q-1$ и $0\le a_1\le q_1-1$. Тогда при $q_1\le Q$ и $q\le P$ имеем

$$\Big|\frac{a}{q} - \frac{a_1}{q_1} + \beta\Big| \le 1 - \frac{1}{2P}\,.$$

Применим Лемму 38 (ii) и получим, что вклад к Φ из слагаемых, для которых $m\ne 0$, равен $\mathcal{O}(P^{-M})$, где $M>0$ – любая постоянная.

Рассмотрим слагаемого, для которого $m=0$. Предположим, что $a/q\ne a_1/q_1$. Имеем

$$\Big|\Big(\frac{a}{q} - \frac{a_1}{q_1} + \beta\Big)N\Big| \ge \frac{|aq_1 - a_1q|}{qq_1} N - |\beta|\, N \ge \frac{N}{qq_1} - \frac{N}{qP} \ge \frac{1}{2}P^{\varepsilon}\,.$$

Воспользуемся снова Леммой 38 (ii) и получим, что в етом случае

$$I^3\Big(\Big(\frac{a}{q} - \frac{a_1}{q_1} + \beta\Big)N \Big) \ll P^{-M}$$

для любой постоянной $M>0$.

Если $Q < q \le P$, то при $q_1 \le Q$ и $(a_1, q_1) = 1$ равенство $a/q = a_1/q_1$ невозможно. Если $q \le Q$, то равенство $a/q = a_1/q_1$ возможно только в случае $a_1 = a,\ q_1 = q$. Лемма доказана.

□

3.3.4. *Асимптотическая формула для* $\mathcal{E}_2^{(3)}$.

Рассмотрим интеграл $J_2^{(3)}$, определенный через (122). В силу Леммы 14 имеем

$$J_2^{(3)} = \sum_{q \le P} \sum_{a(q)^*} \int_{\mathcal{B}(q,a)} \Big| \mathcal{W}_{\mathbf{d},Q}\Big(\frac{a}{q} + \beta\Big)\Big|^2 d\beta\,, \tag{152}$$

где $\mathcal{B}(q,a)$ определено через (126). Используя (110), (119), (152) и Лемму 44, получим

$$\mathcal{E}_2^{(3)} = P^6 \sum_{(\mathcal{D})} (d_1 d_2 d_3)^{-1} \sum_{q \le Q} q^{-6} \sum_{a(q)^*} |S_{\mathbf{d}}(q,a)|^2 \int_{\mathcal{B}(q,a)} |I(\beta N)|^6 d\beta \,+\, \mathcal{O}(1)\,, \tag{153}$$

В интеграле сделаем замену переменной $\beta N = \beta'$. Воспользуемся (134) и (137) и, процедируя как в предыдущем параграфе, получим

$$\mathcal{E}_2^{(3)} = \mathcal{U}_2^* + \mathcal{O}(P^{3+9\varepsilon} D^6) = \mathcal{U}_2 + \mathcal{O}\big((P^3 D^6 + P^4 D^3 Q^{-1}) P^{9\varepsilon}\big)\,. \tag{154}$$

3.3.5. *Оценка для* $\mathcal{E}_2$.

Из (118), (143), (151) и (154) следует

$$\mathcal{E}_2 \ll (P^3 D^6 + P^4 D^3 Q^{-1}) P^{9\varepsilon}\,. \tag{155}$$

Рассмотрим неравенства (112), (115) и (155). Чтобы получить (70), надо наложить дополнительные ограничения на D, Q и R. С етого место будем считать, что

$$D \le R^{1/6} P^{-10\varepsilon}\,, \qquad P^{1+20\varepsilon} D^3 R^{-1} \le Q\,. \tag{156}$$

3.4. **Оценка для суммы** $\mathcal{E}_1$.

3.4.1. *Подготовка.*

Рассмотрим сумму $\mathcal{E}_1$, определенной через (116). Представим ее в виде

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1^{(1)} - 2\mathcal{E}_1^{(2)} + \mathcal{E}_1^{(3)}, \tag{157}$$

где $\mathcal{E}_1^{(i)}$ являются вкладами соответственных членов разложения

$$|\mathcal{G}|^2 = \Omega^2 - 2\Omega\mathcal{M} + \mathcal{M}^2\,.$$

Сначала докажем, что для сумм $\mathcal{E}_1^{(i)}$ имеем

$$\mathcal{E}_1^{(i)} = \sum_{(\mathcal{R})} \frac{\gamma(pp')}{pp'} \sum_{(\mathcal{D})} d_1 d_2 d_3 \sum_{s(pp')^*} \Big(\frac{s}{pp'}\Big) e_{pp'}(-sN)\ J_1^{(i)}, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{158}$$

где $\gamma(pp')$ – сумма Гаусса, определенная через (1), и

$$J_1^{(1)} = \int_0^1 f_{\mathbf{d}}\Big(\alpha + \frac{s}{pp'}\Big)\, f_{\mathbf{d}}(-\alpha)\, d\alpha\,, \tag{159}$$

$$J_1^{(2)} = \int_0^1 f_{\mathbf{d}}\Big(\alpha + \frac{s}{pp'}\Big)\, \mathcal{W}_{\mathbf{d},Q}(-\alpha)\, d\alpha\,, \tag{160}$$

$$J_1^{(3)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}^2_{\mathbf{d},Q}(n)\, e_{pp'}(sn)\,. \tag{161}$$

Рассмотрим $\mathcal{E}_1^{(1)}$ .. Имеем

$$\mathcal{E}_1^{(1)} = \sum_{(\mathcal{R})}\sum_{(\mathcal{D})} d_1 d_2 d_3\, \Gamma_1^{(1)}\,, \qquad \text{где} \qquad \Gamma_1^{(1)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(\frac{N-n}{pp'}\Big)\, \Omega^2_{\mathbf{d}}(n)\,. \tag{162}$$

Очевидно, из (59) следует

$$\Gamma_1^{(1)} = \sum_{\substack{x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2\\ x_i,y_i\equiv 0\ (d_i)}} \omega(\mathbf{x})\,\omega(\mathbf{y})\,\Big(\frac{N-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{pp'}\Big)\,.$$

Используя (123), Лемму 4 (i), (ii), Лемму 12 (ii) и Лемму 19 (iii), получим

$$\Gamma_1^{(1)} = \sum_{l(pp')}\Big(\frac{l}{pp'}\Big) \sum_{\substack{x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2\\ x_1^2+x_2^2+x_3^2\equiv N-l\ (pp')\\ x_i,y_i\equiv 0\ (d_i)}} \omega(\mathbf{x})\,\omega(\mathbf{y}) \tag{163}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l(pp')}\Big(\frac{l}{pp'}\Big) \sum_{\substack{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{Z}^3\\ x_i,y_i\equiv 0\ (d_i)}} \omega(\mathbf{x})\,\omega(\mathbf{y}) \\ &\qquad \times \int_0^1 e\big(\alpha(x_1^2+x_2^2+x_3^2-y_1^2-y_2^2-y_3^2)\big)\, d\alpha \\ &\qquad \times \frac{1}{pp'}\sum_{s(pp')} e_{pp'}\big(s(x_1^2+x_2^2+x_3^2-N+l)\big) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{pp'}\sum_{l(pp')}\Big(\frac{l}{pp'}\Big)\sum_{s(pp')} e_{pp'}\big(s(l-N)\big)\ J_1^{(1)}$$

$$= \frac{\gamma(pp')}{pp'}\sum_{s(pp')^*}\Big(\frac{s}{pp'}\Big)\, e_{pp'}(-sN)\ J_1^{(1)}\,,$$

где $J_1^{(1)}$ определено через (159). Из (162) и (163) следует формула (158) для $\mathcal{E}_1^{(1)}$.
Рассмотрим $\mathcal{E}_1^{(2)}$. Имеем

$$(164)\quad \mathcal{E}_1^{(2)} = \sum_{(\mathcal{R})} \sum_{(\mathcal{D})} d_1 d_2 d_3\, \Gamma_1^{(2)}, \qquad \text{где} \qquad \Gamma_1^{(2)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{N-n}{pp'}\right) \Omega_{\mathbf{d}}(n)\, \mathcal{M}_{\mathbf{d},Q}(n)\,.$$

В свою очередь

$$(165)\qquad \Gamma_1^{(2)} = \sum_{l(pp')} \left(\frac{l}{pp'}\right) \Phi^*, \qquad \text{где} \qquad \Phi^* = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\equiv N-l\ (pp')}} \Omega_{\mathbf{d}}(n)\, \mathcal{M}_{\mathbf{d},Q}(n)\,.$$

Очевидно

$$\Phi^* = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z},\ \mathbf{x}\in\mathbb{Z}^3\\ x_1^2+x_2^2+x_3^2 = n \equiv N-l\ (pp')\\ x_i\equiv 0\ (d_i)}} \omega(\mathbf{x})\, \mathcal{M}_{\mathbf{d},Q}(n)\,.$$

Из етих формул, (123), (124) и Леммы 4 (i), (ii) следует

$$\Phi^* = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z},\ \mathbf{x}\in\mathbb{Z}^3\\ x_i\equiv 0\ (d_i)}} \omega(\mathbf{x})\, \mathcal{M}_{\mathbf{d},Q}(n) \int_0^1 e\big(\alpha(x_1^2+x_2^2+x_3^2-n)\big)\, d\alpha$$
$$\times \frac{1}{pp'} \sum_{s(pp')} e_{pp'}\big(s(x_1^2+x_2^2+x_3^2-N+l)\big)$$

$$= \frac{1}{pp'} \sum_{s(pp')} e_{pp'}\big(s(l-N)\big)\ J_1^{(2)}\,,$$

где $J_1^{(2)}$ определено через (160). Осталось заместить ето выражение для Φ^* в (165) и поменять порядок суммирования по l и s. Используя Лемму 19 (iii) и (164), получаем формулу (158) для $\mathcal{E}_1^{(2)}$.
Рассмотрим $\mathcal{E}_1^{(3)}$. Имеем

$$(166)\qquad \mathcal{E}_1^{(3)} = \sum_{(\mathcal{R})} \sum_{(\mathcal{D})} d_1 d_2 d_3\, \Gamma_1^{(3)}, \qquad \text{где} \qquad \Gamma_1^{(3)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{N-n}{pp'}\right) \mathcal{M}_{\mathbf{d},Q}^2(n)\,.$$

Очевидно, в силу Леммы 4 (i) и Леммы 19 (iii), имеем

$$
\Gamma_1^{(3)} = \sum_{l(pp')} \left(\frac{l}{pp'}\right) \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\equiv N-l\ (pp')}} \mathcal{M}^2_{\mathbf{d},Q}(n) \tag{167}
$$

$$
= \sum_{l(pp')} \left(\frac{l}{pp'}\right) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}^2_{\mathbf{d},Q}(n)\, \frac{1}{pp'} \sum_{s(pp')} e_{pp'}\big(s(n-N+l)\big)
$$

$$
= \frac{\gamma(pp')}{pp'} \sum_{s(pp')^*} \left(\frac{s}{pp'}\right) e_{pp'}(-sN)\ J_1^{(3)}\,,
$$

где $J_1^{(3)}$ определено через (161). Из (166) и (167) следует формула (158) для $\mathcal{E}_1^{(3)}$.

3.4.2. *Асимптотическая формула для* $\mathcal{E}_1^{(1)}$..

В етом параграфе установим асимптотическую формулу (184). Ее остаточный член, однако, является сложным выражением, и мы оценим его позже.

Рассмотрим интеграл $J_1^{(1)}$, определенный через (159). Подинтегральная функция в правой части (159) является периодической с периодом единица и, следовательно, мы можем интегрировать по множеству $\big((1+[P])^{-1},\, 1+(1+[P])^{-1}\big]$. Разоб?ем ето множество на части в соответствии с Леммой 14. После етого разоб?ем его на еще более мелкие части в соответствии со значением наибольшего общего делителя $(app'+sq, qpp')$. Отметим, что $(app'+sq, qpp') \mid (pp')^2$. Тогда интеграл $J_1^{(1)}$ равен сумме нескольких интегралов. Сделаем замену переменной в каждом из них и получим

$$
J_1^{(1)} = \sum_{\delta|(pp')^2} \sum_{q\le P} \sum_{\substack{a(q)^*\\ (app'+sq,qpp')=\delta}} \int_{\mathcal{B}(q,a)} f_{\mathbf{d}}\Big(\frac{a}{q}+\frac{s}{pp'}+\beta\Big)\, f_{\mathbf{d}}\Big(-\frac{a}{q}-\beta\Big)\, d\beta\,, \tag{168}
$$

где $\mathcal{B}(q,a)$ определено через (126).

Используя Лемму 20 (ii) и Лемму 40, мы устанавливаем, что подинтегральная функция в последней формуле равна

$$
\frac{P^6\delta^3}{q^6(pp')^3(d_1d_2d_3)^2} \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}(R^2\delta^{-1})} \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}} S_{\mathbf{d}}\Big(\frac{qpp'}{\delta}, \frac{app'+sq}{\delta}, \mathbf{n}\Big)\, S_{\mathbf{d}}\big(q,-a,-\mathbf{l}\big) \tag{169}
$$

$$
\times\ I_{\mathbf{d}}\Big(\beta N, -\frac{P\delta}{qpp'}\,\mathbf{n}\Big)\, I_{\mathbf{d}}\Big(-\beta N, \frac{P}{q}\,\mathbf{l}\Big) \ +\ \mathcal{O}(P^{-M})\,,
$$

где множества $\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}(H)$ и $\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}$ определены через (129) и (130), величины $S_{\mathbf{d}}(q,m,\mathbf{n})$ и $I_{\mathbf{d}}(\beta,\mathbf{u})$ – соответственно через (60) и (128), а $M>0$ – сколь угодно большая постоянная.

Отметим, что в силу (156) имеем $d_i \le D < R^{1/6} < p, p'$. Далее, так как $\delta \mid (pp')^2$, то

$$(qpp'\delta^{-1}, (app' + sq)\delta^{-1}d_i^2) = (qpp'\delta^{-1}, d_i^2) = (q, d_i^2)\,.$$

Следовательно модуль сравнения, которое появляется в определении $\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}(H)$, может быть записан в виде (q, d_i^2) вместо $(qpp'\delta^{-1}, d_i^2)$, как можно было бы ожидать, имея ввиду Лемму 20 (ii).

Используя (158), (168) и выражение (169) для подинтегральной функции, получим формулу для $\mathcal{E}_1^{(1)}$. Потом в интегралах сделаем замену переменной $\beta N = \beta'$ и воспользуемся (132). Получим

$$\mathcal{E}_1^{(1)} = \widetilde{\mathcal{E}_1^{(1)}} + \mathcal{O}(1)\,, \tag{170}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{E}_1^{(1)}} = P^4 \sum_{(\mathcal{R})} \frac{\gamma(pp')}{(pp')^4} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{\delta|(pp')^2} \sum_{q\le P} \frac{\delta^3}{d_1\, d_2\, d_3\, q^6}$$

$$\times \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}(R^2\delta^{-1})} \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}} \sum_{s(pp')^*} \Big(\frac{s}{pp'}\Big) e_{pp'}(-sN) \sum_{\substack{a(q)^* \\ (app'+sq,\, qpp')=\delta}}$$

$$\times \int_{\mathcal{B}'(q,a)} S_{\mathbf{d}}\Big(\frac{qpp'}{\delta}, \frac{app'+sq}{\delta}, \mathbf{n}\Big)\, S_{\mathbf{d}}\Big(q, -a, -\mathbf{l}\Big)\, I_{\mathbf{d}}\Big(\beta, -\frac{P\delta}{qpp'}\mathbf{n}\Big)\, I_{\mathbf{d}}\Big(-\beta, \frac{P}{q}\mathbf{l}\Big)\, d\beta\,.$$

Представим $\widetilde{\mathcal{E}_1^{(1)}}$ в виде

$$\widetilde{\mathcal{E}_1^{(1)}} = \mathcal{U} + \mathcal{V}\,, \tag{171}$$

где $\mathcal{U}$ – вклад слагаемых, для которых $\mathbf{n} = \mathbf{l} = \mathbf{0}$ и $\mathcal{V}$ – вклад остальных слагаемых.

Рассмотрим $\mathcal{V}$. Меняем порядок суммирования по a и интегрирования по β. Используя (132), делаем вывод, что в новом выражении для $\mathcal{V}$ область интегрирования – ето отрезок $[-Pq^{-1}, Pq^{-1}]$, а суммирование ведется по числам a, удовлетворяющим предыдущим условиям и таким, что $\beta \in \mathcal{B}'(q,a)$. Имеет место следующая лемма, которую, хоть и в другой форме, можно найти в работе Клостермана [60]. Для удобства, доказательство леммы приведено в конце параграфа.

Лемма 45. *На множестве из чисел $v \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$, таких что*

$$q \le P\,, \qquad |\beta| \le Pq^{-1}\,, \qquad -q/2 < v \le q/2$$

можно определить комплекснозначную функцию $\sigma(v,q,\beta)$ со следующими свойствами:

(i) Для фиксированных v и q функция $\sigma(v,q,\beta)$ ограничена и частично непрерывна по отношению к β.

(*ii*) *Для всех* v, q, β *имеем*

$$|\sigma(v,q,\beta)| \le (1+|v|)^{-1}\,.$$

(*iii*) *Для каждого* $a \in \mathbb{Z}$, $(a,q)=1$ *имеем*

$$\sum_{-q/2<v\le q/2} e_q(\overline{a}v)\,\sigma(v,q,\beta) = \begin{cases} 1 & \text{если } \beta \in \mathcal{B}'(q,a)\,, \\ 0 & \text{в противном случае }\,. \end{cases} \tag{172}$$

□

Используя Лемму 45, получим

$$\mathcal{V} = P^4 \sum_{(\mathcal{R})} \frac{\gamma(pp')}{(pp')^4} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{\delta|(pp')^2} \sum_{q\le P} \frac{\delta^3}{d_1\,d_2\,d_3\,q^6} \tag{173}$$

$$\times \sum_{\substack{\mathbf{n}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}(R^2\delta^{-1}) \\ (\mathbf{n},\mathbf{l})\ne(\mathbf{0},\mathbf{0})}} \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}} \int_{-Pq^{-1}}^{Pq^{-1}} I_{\mathbf{d}}\Big(\beta, -\frac{P\delta}{qpp'}\mathbf{n}\Big)\, I_{\mathbf{d}}\Big(-\beta, \frac{P}{q}\mathbf{l}\Big)$$

$$\times \sum_{-q/2<v\le q/2} \sigma(v,q,\beta)\, W(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},p,p',q,v,\delta)\;\; d\beta\,,$$

где

$$W(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},p,p',q,v,\delta) = \sum_{s(pp')^*} \Big(\frac{s}{pp'}\Big)\, e_{pp'}(-sN) \tag{174}$$

$$\times \sum_{\substack{a(q)^* \\ (app'+sq,qpp')=\delta}} e_q(\overline{a}v)\, S_{\mathbf{d}}\Big(\frac{qpp'}{\delta}, \frac{app'+sq}{\delta}, \mathbf{n}\Big)\, S_{\mathbf{d}}\Big(q,-a,-\mathbf{l}\Big)\,.$$

Из Леммы 41 и определения (135) следует, что если $(\mathbf{n},\mathbf{l}) \ne (\mathbf{0},\mathbf{0})$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big| I_{\mathbf{d}}\Big(\beta, -\frac{P\delta}{qpp'}\,\mathbf{n}\Big)\, I_{\mathbf{d}}\Big(-\beta, \frac{P}{q}\,\mathbf{l}\Big)\,\Big|\, d\beta \ll \frac{q^2\,P^{2\varepsilon-2}}{\lambda(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},R^2\delta^{-1})}\,. \tag{175}$$

Тогда, в силу (173), (175), Леммы 19 (*i*) и Леммы 45 (*ii*), имеем

$$\mathcal{V} \,=\, \mathcal{O}(\mathcal{V}^*)\,, \tag{176}$$

где

$$\mathcal{V}^* = P^{2+2\varepsilon} R^{-7} \sum_{(\mathcal{R})} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{\delta|(pp')^2} \sum_{q\le P} \frac{\delta^3}{d_1\,d_2\,d_3\,q^4} \tag{177}$$

$$\times \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}(R^2\delta^{-1})} \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}} \sum_{|v|\le P} \frac{|W(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},p,p',q,v,\delta)|}{(1+|v|)\,\lambda(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},R^2\delta^{-1})}$$

Рассмотрим $\mathcal{U}$. Используя (60) и (128), получим

$$\mathcal{U} = P^4 \sum_{(\mathcal{R})} \frac{\gamma(pp')}{(pp')^4} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{\delta|(pp')^2} \sum_{q\le P} \frac{\delta^3}{d_1\, d_2\, d_3\, q^6} \sum_{s(pp')^*} \Big(\frac{s}{pp'}\Big)\, e_{pp'}(-sN) \tag{178}$$

$$\times \sum_{\substack{a(q)^* \\ (app'+sq,\, qpp')=\delta}} S_{\mathbf{d}}\Big(\frac{qpp'}{\delta}, \frac{app'+sq}{\delta}\Big)\, S_{\mathbf{d}}\big(q,-a\big) \int_{\mathcal{B}'(q,a)} |\, I(\beta)\,|^6\, d\beta\,.$$

В силу (127) и (132) имеем $[\,-P(2q)^{-1}, P(2q)^{-1}\,] \subset \mathcal{B}'(q,a)$. Разоб?ем $\mathcal{U}$ на две части:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}' + \mathcal{U}''\,. \tag{179}$$

В $\mathcal{U}'$ интегрируем по отрезку $[\,-P(2q)^{-1}, P(2q)^{-1}\,]$ и, соответственно, в $\mathcal{U}''$ – по множеству $\mathcal{B}'(q,a) \setminus [\,-P(2q)^{-1}, P(2q)^{-1}\,]$.

Сначала рассмотрим $\mathcal{U}''$. Сделаем замену порядка суммирования по a и интегрирования и применим Лемму 45. Пользуясь Леммой 38 (iii), получим

$$\int_{|\beta|>P(2q)^{-1}} |\, I(\beta)\,|^6\, d\beta \ll \int_{P(2q)^{-1}}^{\infty} \beta^{-3}\, d\beta \ll q^2 P^{-2}\,. \tag{180}$$

Тогда, в силу (135) и (177), имеем

$$\mathcal{U}'' = \mathcal{O}(\mathcal{V}^*)\,. \tag{181}$$

Теперь рассмотрим $\mathcal{U}'$. В етом выражении множество интегрирования не зависит от a. Из (107) и (180) следует

$$\int_{-P(2q)^{-1}}^{P(2q)^{-1}} |\, I(\beta)\,|^6\, d\beta = \kappa_0 + \mathcal{O}\big(q^2 P^{-2}\big)\,.$$

Тогда, имея ввиду (135), (177) и (178), получим

$$\mathcal{U}' = \mathcal{U}_1 + \mathcal{O}(\mathcal{V}^*)\,, \tag{182}$$

где

$$\mathcal{U}_1 = \kappa_0\, P^4 \sum_{(\mathcal{R})} \frac{\gamma(pp')}{(pp')^4} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{\delta|(pp')^2} \sum_{q\le P} \frac{\delta^3\, W(\mathbf{d},\mathbf{0},\mathbf{0},p,p',q,0,\delta)}{d_1\, d_2\, d_3\, q^6}\,. \tag{183}$$

Из (170), (171), (176), (179), (181) и (182) следует

$$\mathcal{E}_1^{(1)} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{O}(\mathcal{V}^*) + \mathcal{O}(1)\,. \tag{184}$$

Доказательство Леммы 45. Определим $\sigma(v,q,\beta)$ в зависимости от местоположения β в отрезке $\left[-\dfrac{P}{q}, \dfrac{P}{q},\right]$.

Первый случай: $\beta \in \left[-\dfrac{N}{q(q+P)}, \dfrac{N}{q(q+P)}\right]$. Определим

$$\sigma(v,q,\beta) = \begin{cases} 1 & \text{если } v = 0\,, \\ 0 & \text{если } v \neq 0\,. \end{cases}$$

Второй случай: $\beta \in \left(\dfrac{N}{q(q+P)}, \dfrac{P}{q}\right]$. Определим

$$\sigma(v,q,\beta) = q^{-1} \sum_{P<m\le\frac{N}{q\beta}} e_q(mv)\,.$$

Третий случай: $\beta \in \left[-\dfrac{P}{q}, -\dfrac{N}{q(q+P)}\right)$. Определим

$$\sigma(v,q,\beta) = q^{-1} \sum_{P<m\le\frac{N}{q(-\beta)}} e_q(-mv)\,.$$

Очевидно, что условие (i) выполнено.

Проверим условие (ii). В первом случае оно очевидно. Рассмотрим второй случай. Если $v=0$, то имеем

$$\sigma(v,q,\beta) = q^{-1} \sum_{P<m\le\frac{N}{q\beta}} 1 \le q^{-1} \sum_{P<m\le P+q} 1 = 1\,.$$

Если $v \in (-q/2,\, q/2\,]$, $v \neq 0$, то в силу Леммы 33, имеем

$$|\,\sigma(v,q,\beta)\,| \le \Big(\,2\,q\ \|\,v/q\,\|\ \Big)^{-1} = |\,2\,v\,|^{-1}\,.$$

Следовательно во втором случае условие (ii) выполнено. В третьем случае ето условие проверяется аналогично.

Займемся, наконец, условием (iii).

В первом случае имеем $\beta \in \left[-\dfrac{N}{q(q+P)}, \dfrac{N}{q(q+P)}\right] \subset \mathcal{B}'(q,a)$, с другой стороны, выражение в левой части равенства (172) равно единице. Следовательно (iii) выполнено.

Во втором случае имеем $\beta \in \left(\dfrac{N}{q(q+P)},\ \dfrac{P}{q}\right]$. Воспользуемся (127), (132) и Леммой 4 (i) и получим

$$\sum_{-q/2<v\le q/2} e_q(\overline{a}v)\,\sigma(v,q,\beta)$$

$$= \sum_{-q/2<v\le q/2} e_q(\overline{a}v)\; q^{-1} \sum_{P<m\le \frac{N}{q\beta}} e_q(mv) \;=\; \sum_{P<m\le \frac{N}{q\beta}} q^{-1} \sum_{-q/2<v\le q/2} e_q\big(\,(\overline{a}+m)v\,\big)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{если } \overline{a}+m\equiv 0\,(q) \text{ для некоторого } m\in \big(\,P, N(q\beta)^{-1}\,\big]\cap\mathbb{Z}\,,\\ 0 & \text{в противном случае }\ . \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{если } q+q''\in \big(\,P,\ N(q\beta)^{-1}\,\big]\,,\\ 0 & \text{в противном случае }\ . \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{если } \beta\in\mathcal{B}'(q,a)\,,\\ 0 & \text{в противном случае }\ . \end{cases}$$

Следовательно во втором случае (iii) выполнено.

В третьем случае условие (iii) проверяется аналогично. Лемма доказана.

$\square$

3.4.3. *Асимптотическая формула для* $\mathcal{E}_1^{(2)}$ ..

В етом параграфе установим асимптотическую формулу (192). Ее главный член совпадает с главным членом в (184). Остаточные члены являются сложными выражениями, и мы будем оценивать их позже.

Рассмотрим интеграл $J_1^{(2)}$, определенный через (160). Мы опять пользуемся Леммой 14 и, работая как в предыдущем параграфе, получаем

$$(185)\qquad J_1^{(2)} = \sum_{\delta|(pp')^2}\ \sum_{q\le P}\ \sum_{\substack{a(q)^*\\ (app'+sq,qpp')=\delta}} \int_{\mathcal{B}(q,a)} f_{\mathbf{d}}\Big(\frac{a}{q}+\frac{s}{pp'}+\beta\Big)\,\mathcal{W}_{\mathbf{d},Q}\Big(-\frac{a}{q}-\beta\Big)\,d\alpha\,.$$

Для $f_{\mathbf{d}}$ и $\mathcal{W}_{\mathbf{d},Q}$ мы используем Лемму 40 и, соответственно, Лемму 44. Если $q\le Q$, то подинтегральное выражение в правой части (185) равно

$$\frac{P^6\delta^3}{q^6(pp')^3(d_1d_2d_3)^2} \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}(R^2\delta^{-1})} S_{\mathbf{d}}\Big(\frac{qpp'}{\delta},\frac{app'+sq}{\delta},\mathbf{n}\Big)\,S_{\mathbf{d}}\big(q,-a\big)$$

$$\times\ I_{\mathbf{d}}\Big(\beta N,\, -\frac{P\delta}{qpp'}\,\mathbf{n}\Big)\ I^3\big(-\beta N\big)\ +\ \mathcal{O}(P^{-M})\,,$$

где $M > 0$ – сколь угодно большая постоянная. Если $Q < q \le P$, то подинтегральное выражение равно $\mathcal{O}(P^{-M})$. Имея ввиду (158) и (185), получаем выражение для $\mathcal{E}_1^{(2)}$. Сделаем замену переменной в интеграле и получим

$$\mathcal{E}_1^{(2)} = \widetilde{\mathcal{E}_1^{(2)}} + \mathcal{O}(1)\,, \tag{186}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{E}_1^{(2)}} = P^4 \sum_{(\mathcal{R})} \frac{\gamma(pp')}{(pp')^4} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{\delta|(pp')^2} \sum_{q\le Q} \frac{\delta^3}{d_1\,d_2\,d_3\,q^6}$$

$$\times \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}(R^2\delta^{-1})} \sum_{s(pp')^*} \left(\frac{s}{pp'}\right) e_{pp'}(-sN) \sum_{\substack{a(q)^* \\ (app'+sq,\,qpp')=\delta}}$$

$$\times \int_{\mathcal{B}'(q,a)} S_{\mathbf{d}}\Big(\frac{qpp'}{\delta}, \frac{app'+sq}{\delta}, \mathbf{n}\Big)\, S_{\mathbf{d}}\big(q,-a\big)\, I_{\mathbf{d}}\Big(\beta, -\frac{P\delta}{qpp'}\mathbf{n}\Big)\, I^3\big(-\beta\big)\, d\beta\,.$$

Представим $\widetilde{\mathcal{E}_1^{(2)}}$ в виде

$$\widetilde{\mathcal{E}_1^{(2)}} = \widetilde{\mathcal{U}} + \widetilde{\mathcal{V}}\,, \tag{187}$$

где $\widetilde{\mathcal{U}}$ – вклад членов, для которых $\mathbf{n}=\mathbf{0}$, а $\widetilde{\mathcal{V}}$ – вклад остальных членов.

Рассмотрим $\widetilde{\mathcal{V}}$. Работая как при оценки величины $\mathcal{V}$ в § 3.4.2, получаем

$$\widetilde{\mathcal{V}} = \mathcal{O}(\mathcal{V}^*)\,, \tag{188}$$

где $\mathcal{V}^*$ определено через (177).

Рассмотрим $\widetilde{\mathcal{U}}$. Эта величина похожа на величину $\mathcal{U}$, определенную через (178). Единственая разница состоит в том, что в формуле для $\widetilde{\mathcal{U}}$ суммирование ведется по $q \le Q$, а в $\mathcal{U}$ – по $q \le P$. Следовательно, проводя рассуждения аналогичные с соответствующими рассуждениями из § 3.4.2, получим

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \widetilde{\mathcal{U}_1} + \mathcal{O}(\mathcal{V}^*)\,, \tag{189}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{U}_1} = \kappa_0\, P^4 \sum_{(\mathcal{R})} \frac{\gamma(pp')}{(pp')^4} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{\delta|(pp')^2} \sum_{q\le Q} \frac{\delta^3\, W(\mathbf{d},\mathbf{0},\mathbf{0},p,p',q,0,\delta)}{d_1\,d_2\,d_3\,q^6}\,.$$

Воспользуясь Леммой 19 (i), получим

$$\widetilde{\mathcal{U}_1} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{O}(D^*)\,, \tag{190}$$

где $\mathcal{U}_1$ определено через (183),

$$D^* = P^4\, R^{-7} \sum_{(\mathcal{R})} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{\delta|(pp')^2} \sum_{\min\left(Q\,,\,Q\delta(pp')^{-1}\right)<q\le P} \frac{\delta^3\, |W(\mathbf{d},\mathbf{0},\mathbf{0},p,p',q,0,\delta)|}{d_1\,d_2\,d_3\,q^6}\,, \tag{191}$$

а W определено через (174).

В силу (186) – (190) имеем

$$\mathcal{E}_1^{(2)} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{O}(\mathcal{V}^*) + \mathcal{O}(D^*) + \mathcal{O}(1)\,. \tag{192}$$

Отметим, что мы определили величину D^* с более длинным интервалом суммирования по q, чем ето необходимо в данном месте. Мы делаем ето, потому что в следующем параграфе мы встретим остаточный член, для оценки которого нужна оценка суммы D^*, определенной формулой (191).

3.4.4. *Асимптотическая формула для* $\mathcal{E}_1^{(3)}$ ..

В етом параграфе мы получим асимптотическую формулу (204). Главный член совпадает с главными членами в формулах (184) и (192). Остаточные члены в (204) являются сложными выражениями, и мы их оценим позже.

Рассмотрим величину $J_1^{(3)}$, определенную через (161). Используя (66), получим

$$J_1^{(3)} = \frac{P^2}{(d_1d_2d_3)^2} \sum_{q_1,q_2\le Q} (q_1q_2)^{-3} \times \sum_{a_1(q_1)^*,\, a_2(q_2)^*} S_{\mathbf{d}}(q_2,-a_2)\, S_{\mathbf{d}}(q_1,-a_1)\, B\Big(\frac{a_1}{q_1} + \frac{s}{pp'} + \frac{a_2}{q_2}\Big)\,, \tag{193}$$

где

$$B(\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} H^2\Big(\frac{n}{N}\Big)\, e(n\alpha) \tag{194}$$

Применяя Лемму 26, получим

$$B(\alpha) = P^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} H^2(t)\, e\big((\alpha-k)Nt\big)\, dt\,.$$

Обозначим через $\widetilde{B}$ вклад слагаемых, для которых $|k-\alpha| \ge 1/2$. Из оценки (108) Леммы 39 следует, что для сколь угодно большой постоянной $m>0$, имеем

$$\widetilde{B} \ll_m P^2 \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ |k-\alpha|\ge 1/2}} \big(|k-\alpha|\, N\big)^{-m} \ll_m P^{2-2m}\,.$$

Следовательно

$$B(\alpha) = P^2 \int_{-\infty}^{\infty} H^2(t)\, e\big((\alpha-k_0)Nt\big) dt + \mathcal{O}_m\big(P^{2-2m}\big)\,, \tag{195}$$

где $k_0\in\mathbb{Z}$ удовлетворяет $\alpha - 1/2 < k_0 \le \alpha + 1/2$.

Если $\alpha\in\mathbb{Z}$, то интеграл в правой части (195) равен постоянной κ_0, определенной через (107).

Если $\|\,\alpha\,\| = |\alpha - k_0| \ge P^{\varepsilon-2}$, то в силу Леммы 39 имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} H^2(t)\, e\big((\alpha-k_0)Nt\big) dt \ll_m \big(P^{\varepsilon-2}\, N\big)^{-m} = P^{-\varepsilon m}\,.$$

Из этих рассуждений видно, что для сколь угодно большой постоянной $M > 0$ имеем

(196) $$B(\alpha) = \kappa_0 P^2 + \mathcal{O}_{M}(P^{-M}) \qquad \text{если} \qquad \alpha \in \mathbb{Z}\,,$$

(197) $$B(\alpha) = \mathcal{O}_{M,\varepsilon}(P^{-M}) \qquad \text{если} \qquad \|\,\alpha\,\| \geq P^{\varepsilon-2}\,.$$

Используя (158) и (193), найдем выражение для $\mathcal{E}_1^{(3)}$. Имея ввиду (197), получим

(198) $$\mathcal{E}_1^{(3)} = \widetilde{\mathcal{E}_1^{(3)}} + \mathcal{O}(1)\,,$$

где

$$\widetilde{\mathcal{E}_1^{(3)}} = P^2 \sum_{(\mathcal{R})} \frac{\gamma(pp')}{pp'} \sum_{(\mathcal{D})} (d_1d_2d_3)^{-1} \sum_{s(pp')^*} \left(\frac{s}{pp'}\right) e_{pp'}(-sN)$$
$$\times \sum_{q_1,\,q_2\leq Q} (q_1q_2)^{-3} \sum_{\substack{a_1(q_1)^*\,,\,a_2(q_2)^* \\ \|\frac{a_1}{q_1}+\frac{s}{pp'}+\frac{a_2}{q_2}\|<P^{\varepsilon-2}}} S_{\mathbf{d}}(q_2,-a_2)\, S_{\mathbf{d}}(q_1,-a_1)\, B\Big(\frac{a_1}{q_1}+\frac{s}{pp'}+\frac{a_2}{q_2}\Big)\,.$$

Разоб?ем эту сумму на две части:

(199) $$\widetilde{\mathcal{E}_1^{(3)}} = D + E\,,$$

где D – вклад членов, для которых $\frac{a_1}{q_1}+\frac{s}{pp'}+\frac{a_2}{q_2} \in \mathbb{Z}$, и E – вклад остальных членов.

Рассмотрим E. Имеем

$$E = P^2 \sum_{(\mathcal{R})} \frac{\gamma(pp')}{pp'} \sum_{(\mathcal{D})}(d_1d_2d_3)^{-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} H^2\Big(\frac{n}{N}\Big)\,\mathcal{F},$$

где

(200)
$$\mathcal{F} = \sum_{q_1,q_2\leq Q} (q_1q_2)^{-3} \sum_{s(pp')^*} \Big(\frac{s}{pp'}\Big) e_{pp'}(-sN)$$
$$\times \sum_{\substack{a_1(q_1)^*\,,\,a_2(q_2)^* \\ 0<\|\frac{a_1}{q_1}+\frac{s}{pp'}+\frac{a_2}{q_2}\|<P^{\varepsilon-2}}} S_{\mathbf{d}}(q_1,-a_1)\, S_{\mathbf{d}}(q_2,-a_2)\; e\Big(n\Big(\frac{a_1}{q_1}+\frac{s}{pp'}+\frac{a_2}{q_2}\Big)\Big).$$

Следовательно, в силу Леммы 19 (i) и Леммы 39, имеем

(201) $$E = \mathcal{O}(E^*)\,,$$

где

(202) $$E^* = P^2 R^{-1} \sum_{(\mathcal{R})} \sum_{(\mathcal{D})}(d_1d_2d_3)^{-1} \sum_{n\leq N} |\mathcal{F}|.$$

Рассмотрим D. Разоб?ем ету сумму на части, в соответствии со стойностью наибольшего общего делителя $(a_1pp' + sq_1, q_1pp') = \delta$, и рассмотим некоторую из етих частей.

Отметим, что $\delta \mid (pp')^2$ и, кроме того, если $\frac{a_1}{q_1} + \frac{s}{pp'} + \frac{a_2}{q_2} = m \in \mathbb{Z}$, то

$$\frac{(a_1pp' + sq_1)\,\delta^{-1}}{q_1pp'\,\delta^{-1}} = \frac{mq_2 - a_2}{q_2}\,.$$

Тогда если $(a_2, q_2) = 1$, то

$$q_2 = q_1pp'\delta^{-1}\,, \qquad a_2 \equiv -(a_1pp' + sq_1)\,\delta^{-1} \pmod{q_2}\,.$$

Следовательно

$$S_{\mathbf{d}}(q_2, -a_2) = S_{\mathbf{d}}\Big(\frac{q_1pp'}{\delta},\, \frac{a_1pp' + sq_1}{\delta}\Big)\,.$$

Из етих замечаний и (196) следует, что

$$D \;=\; \kappa_0\, P^4 \sum_{(\mathcal{R})} \frac{\gamma(pp')}{(pp')^4} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{\delta | (pp')^2} \sum_{q \le \min\big(Q\,,\, Q\delta(pp')^{-1}\big)} \frac{\delta^3\, W(\mathbf{d}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, p, p', q, 0, \delta)}{d_1\, d_2\, d_3\, q^6} + \mathcal{O}(1)\,.$$

Тогда, в силу Леммы 19 (i), имеем

$$D = \mathcal{U}_1 + \mathcal{O}(D^*) + \mathcal{O}(1)\,, \tag{203}$$

где $\mathcal{U}_1$ и D^* определены через (183) и, соответственно, (191).

Из (198), (199), (201) и (203) следует

$$\mathcal{E}_1^{(3)} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{O}(D^*) + \mathcal{O}(E^*) + \mathcal{O}(1)\,. \tag{204}$$

3.4.5. *Оценки для $\mathcal{V}^*$ и D^*.*

Пользуясь определениями (177) и (191), соответственно для $\mathcal{V}^*$ и D^*, получаем

$$\mathcal{V}^* \ll \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_p + \mathcal{V}_{p^2} + \mathcal{V}_{pp'} + \mathcal{V}_{p^2p'} + \mathcal{V}_{p^2p'^2}\,, \tag{205}$$

$$D^* \ll D_1 + D_p + D_{p^2} + D_{pp'} + D_{p^2p'} + D_{p^2p'^2}\,, \tag{206}$$

где через $\mathcal{V}_\delta$ и D_δ обозначены вклады соответствуюших значений δ.

Оценки для $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_p$ наиболее трудны, потому что область суммирования по $\mathbf{n}$ в етих случаях самая большая. Оценки других членов в правой части (205) и (206) гораздо проще.

Рассмотрим функцию

$$\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{l}, q, h, v) = \sum_{a(q)^*} e_q(\overline{a}\, v)\; S_{\mathbf{d}}\big(q, ah^2, \mathbf{n}\big)\, S_{\mathbf{d}}\big(q, -a, -\mathbf{l}\big)\,. \tag{207}$$

Чтобы подчеркнуть зависимость от q и для простоты, мы будем писать $\Theta(q)$. Определим также

$$\eta = \eta(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{l}, h, v) = (2hd_1d_2d_3)^2\, v \,+\, \sum_{i=1}^{3} \frac{(d_1d_2d_3)^2}{d_i^2}\,\big(\, h^2 l_i^2 \,-\, n_i^2\,\big)\,. \tag{208}$$

Выполнены следующие леммы, доказательства которых приведены в конце настоящего параграфа.

Лемма 46. *Функция Θ является мультипликативной по отношению к q. Предположим, что d_1, d_2, d_3 являются нечетными бесквадратными числами. Если $(h,2) = 1$, то $\Theta(2^\alpha) \ll (2^\alpha)^4$. Если $(q,2h)=1$, то*

$$|\Theta(q)| \le q^3 \Big(q\,\xi(q,\mathbf{d})\ ,\ \eta(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},h,v) \Big) . \tag{209}$$

□

Лемма 47. *Предположим, что $H \in \mathbb{N}$ удовлетворяет $R \le H \le 4R^2$ и пусть*

$$\mathcal{D}(H) = \sum_{d_1,d_2,d_3 \le D} \ \sum_{q \le PHR^{-2}} \ \sum_{|v| \le P} \ \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{d},q}(H)} \ \sum_{\mathbf{l} \in \mathcal{N}_{\mathbf{d},q}} \frac{\Big(q\,\xi(q,\mathbf{d})\ ,\ \eta(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},H,v) \Big)}{q\, d_1\, d_2\, d_3\, (1+|v|)\, \lambda(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},H)} . \tag{210}$$

Выполнена оценка

$$\mathcal{D}(H) \ll (PH^2R^{-2} + H^3) D^6 P^{10\varepsilon} , \tag{211}$$

□

Рассмотрим $\mathcal{V}_1$ и D_1. Воспользуемся (177), (191) и определениями для $\mathcal{V}_1$ и D_1, которые даны в начале настоящего параграфа. Отметим, что если $(a,q) = (s,pp') = 1$, то условия $(q,pp') = 1$ и $(app' + sq, qpp') = 1$ еквивалентны. Поетому мы наложим первое из етих условий на области суммирования по q и освободимся от второго в области суммирования по a. Получим

$$\mathcal{V}_1 \ll \frac{P^{2+2\varepsilon}}{R^7} \sum_{(\mathcal{R})} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{\substack{q \le P \\ (q,pp')=1}} \ \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{d},q}(R^2)} \ \sum_{\mathbf{l} \in \mathcal{N}_{\mathbf{d},q}} \ \sum_{|v| \le P} \frac{|W_1(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},p,p',q,v)|}{q^4\, d_1 d_2 d_3\, (1+|v|)\, \lambda(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},R^2)} \tag{212}$$

и, соответственно,

$$D_1 \ll \frac{P^4}{R^7} \sum_{(\mathcal{R})} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{\substack{Q(pp')^{-1} < q \le P \\ (q,pp')=1}} \frac{|W_1(\mathbf{d},\mathbf{0},\mathbf{0},p,p',q,0)|}{q^6\, d_1 d_2 d_3} , \tag{213}$$

где

$$\begin{aligned} W_1(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},p,p',q,v) = &\sum_{s(pp')^*} \left(\frac{s}{pp'}\right) e_{pp'}(-sN) \\ &\times \sum_{a(q)^*} e_q(\overline{a}v) S_{\mathbf{d}}\big(qpp',\ app'+sq,\ \mathbf{n}\big)\, S_{\mathbf{d}}\big(q,\ -a,\ -\mathbf{l}\big) . \end{aligned}$$

Используя Лемму 20 (i), (iv), получим

(214)
$$S(qpp', (app'+sq)d_i^2, n_i) = S(q, a(pp')^2 d_i^2, n_i)\, S(pp', sq^2 d_i^2, n_i)$$

$$= S(q, a(pp')^2 d_i^2, n_i)\, S(pp', 1) \left(\frac{s}{pp'}\right) e_{pp'}\big(- \overline{(4sq^2 d_i^2)}\, n_i^2 \big)\,.$$

Следовательно, в силу (4), (60), (207), (214), Леммы 20 (iv) и Леммы 22 имеем

(215)
$$W_1(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{l}, p, p', q, v) = \Theta(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{l}, q, pp', v)\; S^3(pp', 1)$$

$$\times\; K\Big(pp',\, -N,\, -\overline{(4q^2)} \sum\nolimits_{i=1}^{3} \overline{(d_i^2)}\; n_i^2\,\Big)$$

$$\ll R^4 \left|\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{l}, q, pp', v)\,\right|.$$

Представим каждое $q \le P$, удовлетворяющее $(q, pp') = 1$, в виде $q = 2^{\alpha} t$, где $(t, 2pp') = 1$. Используя Лемму 46, получим

(216)
$$\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{l}, q, pp', v) \ll (2^{\alpha})^4\, t^3 \,\Big(t\xi(t, \mathbf{d})\,,\, \eta(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{l}, pp', v)\Big)\,,$$

где ξ и η определены через (139) и, соответственно через (208).

Очевидно $(q, d_i^2) = (t, d_i^2)$. Следовательно используя, (129) и (130), получим

(217)
$$\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}(R^2) = \mathcal{N}_{\mathbf{d},t}(R^2)\,, \qquad \mathcal{N}_{\mathbf{d},q} = \mathcal{N}_{\mathbf{d},t}\,.$$

Из формул (215) – (217) следует

(218)
$$\sum_{\substack{q \le P \\ (q, pp')=1}} \; \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{d},q}(R^2)} \; \sum_{\mathbf{l} \in \mathcal{N}_{\mathbf{d},q}} \frac{|W_1(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{l}, p, p', q, v)|}{q^4\, \lambda(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{l}, R^2)}$$

$$\ll R^4 \sum_{2^{\alpha} \le P} \; \sum_{\substack{t \le P 2^{-\alpha} \\ (t, 2pp')=1}} \; \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{d},t}(R^2)} \; \sum_{\mathbf{l} \in \mathcal{N}_{\mathbf{d},t}} \frac{\Big(t\,\xi(t, \mathbf{d})\,,\, \eta(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{l}, pp', v)\Big)}{t\, \lambda(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{l}, R^2)}$$

$$\ll R^4 P^{\varepsilon} \sum_{\substack{q \le P \\ (q, pp')=1}} \; \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{d},q}(R^2)} \; \sum_{\mathbf{l} \in \mathcal{N}_{\mathbf{d},q}} \frac{\Big(q\,\xi(q, \mathbf{d})\,,\, \eta(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{l}, pp', v)\Big)}{q\, \lambda(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{l}, R^2)}\,.$$

В силу (210), (212) и (218) имеем

$$\mathcal{V}_1 \ll P^{2+3\varepsilon} R^{-3} \sum_{(\mathcal{R})} \mathcal{D}(pp')\,.$$

Пользуясь Леммой 47 и определением для $\sum_{(\mathcal{R})}$, получим

$$\mathcal{V}_1 \ll (P^3 R + P^2 R^5) D^6 P^{15\varepsilon} \,. \tag{219}$$

Получить оценку для D_1 гораздо проще. В силу (207), (215) и Леммы 20 (ii), (iii) имеем

$$W_1(\mathbf{d}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, p, p', q, 0) \ll R^4 \, q^4 \, \xi(q, \mathbf{d}) \,. \tag{220}$$

Из (139), (213), (220), Леммы 7 (vi), Леммы 8 (ii), (iii) и определений для $\sum_{(\mathcal{R})}$ и $\sum_{(\mathcal{D})}$ следует

$$\begin{aligned} D_1 &\ll P^4 \, R^{-3} \sum_{(\mathcal{R})} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{Q(4R^2)^{-1} < q \le P} \frac{\xi(q, \mathbf{d})}{q^2 \, d_1 d_2 d_3} \\ &\ll P^4 \, R^{-1} \sum_{Q(4R^2)^{-1} < q \le P} q^{-2} \Big(\sum_{d \le D} \frac{(q, d^2)}{d} \Big)^3 \ll P^{4+3\varepsilon} \, D^3 \, R^{-1} \sum_{Q(4R^2)^{-1} < q} q^{-2} \\ &\ll P^{4+3\varepsilon} Q^{-1} D^3 R \,. \end{aligned} \tag{221}$$

Отметим, что имеет место даже более сильная оценка для D_1 , потому что в етом случае сумма Клостермана редуцируется до суммы Рамануджана. Однако, ето не дает улучшения в нашем крайнем результате.
Рассмотрим $\mathcal{V}_p$ и D_p. Воспользуемся (177), (191) и определениями для $\mathcal{V}_p$ и D_p. Если $(app' + sq, qpp') = p$ то $p \mid q$ и $p' \nmid q$, так что мы можем наложить ети условия на область суммирования по q . Поскольку $p' \nmid app' + sq$ и $(ap' + s\frac{q}{p}, \frac{q}{p}) = 1$ мы в состоянии ослабить условие для a до $(ap' + s\frac{q}{p}, p) = 1$. Положим $q = rp$ и получим

$$\mathcal{V}_p \ll \frac{P^{2+2\varepsilon}}{R^8} \sum_{(\mathcal{R})} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{\substack{r \le PR^{-1} \\ (r,p')=1}} \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}_{\mathbf{d},r}(R)} \sum_{\mathbf{l} \in \mathcal{N}_{\mathbf{d},r}} \sum_{|v| \le P} \frac{|W_2(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{l}, p, p', r, v)|}{r^4 \, d_1 d_2 d_3 \, (1 + |v|) \, \lambda(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{l}, R)} \tag{222}$$

и

$$D_p \ll \frac{P^4}{R^{10}} \sum_{(\mathcal{R})} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{\substack{Q(pp')^{-1} < r \le PR^{-1} \\ (r,p')=1}} \frac{|W_2(\mathbf{d}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, p, p', r, 0)|}{r^6 \, d_1 d_2 d_3} \,, \tag{223}$$

где

$$\begin{aligned} W_2(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{l}, p, p', r, v) = &\sum_{s(pp')^*} \Big(\frac{s}{pp'} \Big) e_{pp'}(-sN) \\ &\times \sum_{\substack{a(rp)^* \\ (ap'+sr,p)=1}} e_{rp}(\overline{a}v) \; S_{\mathbf{d}}(rpp', ap' + sr, \mathbf{n}) \; S_{\mathbf{d}}(rp, -a, -\mathbf{l}) \,. \end{aligned}$$

Представим каждое $r \le PR^{-1}$, удовлетворяющее $(r,p')=1$, в виде

(224) $$r = r_0 r_1 t\,,$$

где

(225) $$r_0 = 2^{\alpha}\,, \qquad r_1 = p^{\beta}\,, \qquad (t, 2pp') = 1\,.$$

Отметим, что

(226) $$\mathcal{N}_{\mathbf{d},r}(R) = \mathcal{N}_{\mathbf{d},t}(R)\,, \qquad \mathcal{N}_{\mathbf{d},r} = \mathcal{N}_{\mathbf{d},t}\,.$$

Из Леммы 3 следует, что для фиксированных p, p' множество

(227) $$\{\ cp' + c'p \ \ : \ \ c(p)^*, \ \ c'(p')^*\ \}$$

представляет собой приведенную систему вычетов по модулю pp'. Аналогично, для фиксированных r_0, r_1, p, t множество

$$\{\ a_0\, r_1 p\, t + a_1\, r_0\, t + b\, r_0\, r_1 p \ \ : \ \ a_0(r_0)^*, \ \ a_1(r_1 p)^*, \ \ b(t)^*\ \}$$

представляет собой приведенную систему вычетов по модулю $r_0\, r_1 p\, t = rp$.

Легко увидеть, что если $s = cp' + c'p$ и $a = a_0\, r_1 p\, t + a_1\, r_0\, t + b\, r_0\, r_1 p$, то условие $(ap'+sr, p) = 1$ еквивалентно $(a_1 + cr_1, p) = 1$. Используя ети замечания и Лемму 12 и, также, имея ввиду тождество (262), которое приведено в начале доказательства Леммы 46, получаем

(228)
$$W_2(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},p,p',r_0 r_1 t, v) = \left(\frac{p'}{p}\right)\left(\frac{p}{p'}\right) \sum_{c(p)^*}\sum_{c'(p')^*} \left(\frac{c}{p}\right)\left(\frac{c'}{p'}\right) e_p(-cN)\, e_{p'}(-c'N)$$
$$\times \sum_{a_0(r_0)^*}\ \sum_{\substack{a_1(r_1 p)^* \\ (a_1+cr_1,p)=1}}\ \sum_{b(t)^*}$$
$$\times\, e_{r_0}\big(\,\overline{a_0(r_1 p\, t)^2}\, v\,\big)\ e_{r_1 p}\big(\,\overline{a_1(r_0\, t)^2}\, v\,\big)\ e_t\big(\,\overline{b(r_0\, r_1 p)^2}\, v\,\big)\ S'\ S''\,,$$

где

$$S' = S_{\mathbf{d}}\big(r_0\, r_1 p\, t\, p'\,,\ (a_0\, r_1 p\, t + a_1\, r_0\, t + b\, r_0\, r_1 p)\, p' + (cp' + c'p)\, r_0\, r_1\, t\,,\ \mathbf{n}\big)$$

и

$$S'' = S_{\mathbf{d}}\big(r_0\, r_1 p\, t\,,\ -(a_0\, r_1 p\, t + a_1\, r_0\, t + b\, r_0\, r_1 p)\,,\ -\mathbf{l}\big)\,.$$

Используя (60) и Лемму 20 (i), получим

(229)
$$\begin{aligned} S' \ = \ & S_{\mathbf{d}}\big(p', c'(r_0\, r_1 p\, t)^2, \mathbf{n}\big) \\ \times\ & S_{\mathbf{d}}\big(r_0, a_0(r_1 p\, t\, p')^2, \mathbf{n}\big) \\ \times\ & S_{\mathbf{d}}\big(r_1 p, (a_1 + cr_1)\,(r_0\, t\, p')^2, \mathbf{n}\big) \\ \times\ & S_{\mathbf{d}}\big(t, b(r_0\, r_1 p\, p')^2, \mathbf{n}\big) \end{aligned}$$

и

$$
\begin{aligned}
(230) \qquad S'' = \; & S_{\mathbf{d}}\big(r_0,\, -a_0(r_1 p\, t)^2,\, -\mathbf{l}\big)\\
& \times S_{\mathbf{d}}\big(r_1 p,\, -a_1(r_0\, t)^2,\, -\mathbf{l}\big)\\
& \times S_{\mathbf{d}}\big(t,\, -b(r_0\, r_1 p)^2,\, -\mathbf{l}\big)\,.
\end{aligned}
$$

Из (207) и (228) – (230) следует

$$
(231) \qquad W_2(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},p,p',r_0 r_1 t,v) = \left(\frac{p'}{p}\right)\left(\frac{p}{p'}\right) W_2'\, W_2^{(0)}\, W_2^{(1)}\, W_2^{(2)}\,,
$$

где

$$
W_2' = \sum_{c'(p')^*} \left(\frac{c'}{p'}\right) e_{p'}(-c'N)\; S_{\mathbf{d}}(p', c'(r_0\, r_1 p\, t)^2, \mathbf{n})\,,
$$

$$
W_2^{(0)} = \Theta(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},r_0,p',v)\,,
$$

$$
W_2^{(1)} = \sum_{c(p)^*} \left(\frac{c}{p}\right) e_p(-cN) \sum_{\substack{a_1(r_1 p)^*\\ (a_1+cr_1,p)=1}} e_{r_1 p}(\overline{a_1\,(r_0\, t)^2} v)
$$

$$
\times\, S_{\mathbf{d}}(r_1 p, (a_1+cr_1)(r_0\, t\, p')^2, \mathbf{n}\,)\; S_{\mathbf{d}}(r_1 p, -a_1(r_0\, t)^2, -\mathbf{l}\,)\,,
$$

$$
W_2^{(2)} = \Theta(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},t,p',v)\,.
$$

В силу (4), (60), Леммы 20 (iii), (iv) и Леммы 22 имеем

$$
(232) \qquad W_2' = S^3(p',1)\; K\big(\,p',\, -N,\, -\sum_{i=1}^{3} \overline{4(r_0\, r_1 p\, t\, d_i)^2}\, n_i^2\,\big) \ll R^2\,.
$$

Применяя (60) и Лемму 20 (iii), получим, что

$$
(233) \qquad W_2^{(1)} \ll r_1^4 R^5\,.
$$

Наконец, из Леммы 46 следует

$$
(234) \qquad W_2^{(0)} \ll r_0^4
$$

и

$$
(235) \qquad W_2^{(2)} \ll t^3 \Big(t\,\xi(t,\mathbf{d}), \eta(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},p',v)\Big)\,.
$$

Используя (224) – (226) и (231) – (235), получим

(236)

$$\sum_{\substack{r\le PR^{-1}\\ (r,p')=1}}\ \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},r}(R)}\ \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},r}} \frac{|W_2(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},p,p',r,v)|}{r^4\,\lambda(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},R)}$$

$$\ll \sum_{2^\alpha\le P}\ \sum_{p^\beta\le P}\ \sum_{\substack{t\le PR^{-1}\\ (t,2pp')=1}}$$

$$\times \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},t}(R)}\ \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},t}} \frac{R^2\,(2^\alpha)^4\,R^5\,(p^\beta)^4\,t^3\,\Big(t\,\xi(t,\mathbf{d}),\ \eta(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},p',v)\Big)}{(2^\alpha\,p^\beta\,t)^4\,\lambda(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},R)}$$

$$\ll P^\varepsilon R^7 \sum_{\substack{q\le PR^{-1}\\ (q,p')=1}}\ \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}(R)}\ \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}} \frac{\Big(q\,\xi(q,\mathbf{d}),\ \eta(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},p',v)\Big)}{q\,\lambda(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},R)}$$

В силу (222) и (236) имеем

$$\mathcal{V}_p \ll P^{2+3\varepsilon}R^{-1}\sum_{(\mathcal{R})}\mathcal{D}(p')\,,$$

где $\mathcal{D}(H)$ определено через (210). Осталось применить Лемму 47 и использовать определение для $\sum_{(\mathcal{R})}$. Получим

(237) $$\mathcal{V}_p \ll (P^3R + P^2R^4)D^6P^{15\varepsilon}\,.$$

Оценка для D_p получается гораздо проще. Для каждого r, удовлетворяющего условию из области суммирования соответствующей суммы в правой части (223), имеем

(238) $$W_2(\mathbf{d},\mathbf{0},\mathbf{0},p,p',r,0) \ll R^7\,r^4\,\xi(r,\mathbf{d})\,.$$

Чтобы доказать ето неравенство, сначала мы представим r в виде (224), где r_0, r_1, t удовлетворяют (225). Потом воспользуемся формулой (231), неравенствами (232) – (234), а также неравенством $W_2^{(2)} \ll t^4\,\xi(t,\mathbf{d})$, которое является слабой версией (235). Получим оценку (238).

Из (139), (223), (238), Леммы 7 (vi), Леммы 8 (ii), (iii) и определений для $\sum_{(\mathcal{R})}$ и $\sum_{(\mathcal{D})}$ следует, что

(239)

$$D_p \ll P^4\, R^{-3} \sum_{(\mathcal{R})} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{Q(4R^2)^{-1}<r\le PR^{-1}} \frac{\xi(r,\mathbf{d})}{r^2\, d_1 d_2 d_3}$$

$$\ll P^4\, R^{-1} \sum_{Q(4R^2)^{-1}<r\le PR^{-1}} r^{-2} \left(\sum_{d\le D} \frac{(r,d^2)}{d} \right)^3 \ll P^{4+3\varepsilon}\, D^3\, R^{-1} \sum_{Q(4R^2)^{-1}<r} r^{-2}$$

$$\ll P^{4+3\varepsilon}\, Q^{-1}\, D^3\, R\,.$$

На етом месте тоже можно получить лучшую оценку, но ето не имеет значения для нашего крайнего результата.
Рассмотрим $\mathcal{V}_{p^2}$ и D_{p^2}. Если $(app'+sq, qpp') = p^2$, то $p \mid q$, $p^2 \nmid q$, $p' \nmid q$. Положим $q = rp$. Условие $(app'+sq, qpp') = p^2$ еквивалентно $ap'+sr \equiv 0\ (p)$ и, очевидно, $\mathcal{N}_{\mathbf{d},q} = \mathcal{N}_{\mathbf{d},r}$. Используя (177) и (191), получим

$$\mathcal{V}_{p^2} \ll \frac{P^{2+2\varepsilon}}{R^5} \sum_{(\mathcal{R})} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{\substack{r\le PR^{-1}\\ (r,pp')=1}} \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},r}} \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},r}} \sum_{|v|\le P} \frac{|W_3(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},p,p',r,v)|}{r^4\, d_1 d_2 d_3\, (1+|v|)\, \lambda(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l})} \tag{240}$$

и

$$D_{p^2} \ll \frac{P^4}{R^7} \sum_{(\mathcal{R})} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{\substack{Q(4R)^{-1}<r\le PR^{-1}\\ (r,pp')=1}} \frac{|W_3(\mathbf{d},\mathbf{0},\mathbf{0},p,p',r,0)|}{r^6\, d_1 d_2 d_3} \tag{241}$$

где

$$W_3(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},p,p',r,v) = \sum_{s(pp')^*} \left(\frac{s}{pp'}\right) e_{pp'}(-sN)$$
$$\times \sum_{\substack{a(rp)^*\\ ap'+sr\equiv 0\ (p)}} e_{rp}(\overline{a}v)\; S_{\mathbf{d}}\big(rp',\, (ap'+sr)\,p^{-1},\, \mathbf{n}\big)\; S_{\mathbf{d}}(rp,\, -a,\, -\mathbf{l})\,.$$

Из (139) и Леммы 20 (ii) и (iii) следует, что

$$W_3(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},p,p',r,v) \ll r^4\, R^5\, \xi(r,\mathbf{d})\,. \tag{242}$$

В силу (142), (240), (242), Леммы 43 и определения для $\sum_{(\mathcal{R})}$ имеем

$$\mathcal{V}_{p^2} \ll P^{2+3\varepsilon}\, R^2\, \mathcal{Y}(PR^{-1}) \ll P^{3+10\varepsilon} R D^6\,. \tag{243}$$

Чтобы оценить D_{p^2}, мы используем (241), (242), Лемму 7 (vi), Лемму 8 (ii), (iii) и определения для $\sum_{(\mathcal{R})}$ и $\sum_{(\mathcal{D})}$. Получим

(244)
$$D_{p^2} \ll P^4 \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{Q(4R)^{-1}<r\le PR^{-1}} \frac{\xi(r,\mathbf{d})}{r^2\, d_1 d_2 d_3} \ll P^4 \sum_{Q(4R)^{-1}<r\le PR^{-1}} r^{-2} \Big(\sum_{d\le D} \frac{(r,d^2)}{d} \Big)^3$$
$$\ll P^{4+3\varepsilon} D^3 \sum_{Q(4R)^{-1}<r\le PR^{-1}} r^{-2} \ll P^{4+3\varepsilon} Q^{-1} D^3 R\,.$$

Рассмотрим $\mathcal{V}_{pp'}$ и $D_{pp'}$. Если $(app'+sq, qpp') = pp'$ то $pp' \mid q$. Положим $q = rpp'$ и получим

$$\text{(245)}\quad \mathcal{V}_{pp'} \ll \frac{P^{2+2\varepsilon}}{R^9} \sum_{(\mathcal{R})} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{r\le PR^{-2}} \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},r}} \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},r}} \sum_{|v|\le P} \frac{|W_4(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},p,p',r,v)|}{r^4\, d_1d_2d_3\,(1+|v|)\,\lambda(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l})}\,,$$

и

$$\text{(246)}\qquad D_{pp'} \ll \frac{P^4}{R^{13}} \sum_{(\mathcal{R})} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{Q(2R)^{-2}<r\le PR^{-2}} \frac{|W_4(\mathbf{d},\mathbf{0},\mathbf{0},p,p',r,0)|}{r^6\, d_1d_2d_3}\,,$$

где

$$W_4(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},p,p',r,v) = \sum_{s(pp')^*} \left(\frac{s}{pp'}\right) e_{pp'}(-sN)$$
$$\times \sum_{\substack{a(rpp')^* \\ (a+sr,rpp')=1}} e_{rpp'}(\overline{a}v)\; S_{\mathbf{d}}(rpp',\, a+sr,\, \mathbf{n})\; S_{\mathbf{d}}(rpp',\, -a,\, -\mathbf{l})\,.$$

В силу (139) и Леммы 20 (ii) и (iii) имеем

$$\text{(247)}\qquad W_4(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},p,p',r,v) \ll R^{10} r^4 \xi(r,\mathbf{d})\,.$$

Из (142), (245), (247), Леммы 43 и определении для $\sum_{(\mathcal{R})}$ следует

$$\text{(248)}\qquad \mathcal{V}_{pp'} \ll P^{2+3\varepsilon} R^3\, \mathcal{Y}(PR^{-2}) \ll P^{3+10\varepsilon} R D^6\,.$$

Аналогично, используя (246), (247), Лемму 7 (vi), Лемму 8 (ii), (iii) и определения для $\sum_{(\mathcal{R})}$ и $\sum_{(\mathcal{D})}$, получим

(249)
$$D_{pp'} \ll P^4 R^{-1} \sum_{Q(2R)^{-2}<r\le PR^{-2}} r^{-2} \Big(\sum_{d\le D} \frac{(r,d^2)}{d} \Big)^3 \ll P^{4+3\varepsilon} D^3 R^{-1} \sum_{Q(2R)^{-2}<r} r^{-2}$$
$$\ll P^{4+3\varepsilon} Q^{-1} D^3 R\,.$$

Рассмотрим $\mathcal{V}_{p^2p'}$ и $D_{p^2p'}$. Если $(app'+sq, qpp') = \delta = p^2p'$, то из $|n_i| \le 4d_iR^2\delta^{-1}P^\varepsilon$ следует, что $\mathbf{n} = \mathbf{0}$. Мы имеем также $pp' \mid q$, $p^2 \nmid q$. Положим $q = rpp'$ и получим

$$(250) \qquad \mathcal{V}_{p^2p'} \ll \frac{P^{2+2\varepsilon}}{R^6} \sum_{(\mathcal{R})} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{\substack{r \le PR^{-2} \\ (r,p)=1}} \sum_{\mathbf{l} \in \mathcal{N}_{\mathbf{d},r}} \sum_{|v| \le P} \frac{|W_5(\mathbf{d},\mathbf{l},p,p',r,v)|}{r^4\, d_1d_2d_3\, (1+|v|)\, \lambda(\mathbf{d},\mathbf{0},\mathbf{l})}$$

и

$$(251) \qquad D_{p^2p'} \ll \frac{P^4}{R^{10}} \sum_{(\mathcal{R})} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{\substack{Q(pp')^{-1} < r \le PR^{-2} \\ (r,p)=1}} \frac{|W_5(\mathbf{d},\mathbf{0},p,p',r,0)|}{r^6\, d_1d_2d_3},$$

где

$$W_5(\mathbf{d},\mathbf{l},p,p',r,v) = \sum_{s(pp')^*} \left(\frac{s}{pp'}\right) e_{pp'}(-sN)$$
$$\times \sum_{\substack{a(rpp')^* \\ (a+sr,rpp')=p}} e_{rpp'}(\overline{a}v)\, S_{\mathbf{d}}\big(rp',\, (a+sr)p^{-1}\big)\, S_{\mathbf{d}}(rpp',\, -a,\, -\mathbf{l}).$$

Опять отметим, что для фиксированных p, p' множество (227) является приведенной системой вычетов по модулю pp'. Аналогично, в силу Леммы 3, для фиксированных p, p', r множество

$$\{\, bp + hrp' \;:\; b(rp')^*,\;\; h(p)^* \,\}$$

является приведенной системой вычетов по модулю rpp'.

Если $s = cp' + c'p$ и $a = bp + hrp'$ то условие $(a+sr, rpp') = p$ еквивалентно системе условий $(b+c'r, rp') = 1$ и $h + c \equiv 0\ (p)$, так что имеем

$$S_{\mathbf{d}}(rp', (a+sr)p^{-1}) = S_{\mathbf{d}}(rp', b+c'r).$$

Далее, используя Лемму 20 (i), получим

$$S_{\mathbf{d}}(rp'\,p, -a, -\mathbf{l}) = S_{\mathbf{d}}(rp', -bp^2, -\mathbf{l})\; S_{\mathbf{d}}(p, -h(rp')^2, -\mathbf{l}).$$

Используя последные замечания, Лемму 20 (ii) – (iv), Лемму 22 и имея ввиду тождество (262), получаем

(252)

$$W_5(\mathbf{d},\mathbf{l},p,p',r,v) = \left(\frac{p}{p'}\right)\left(\frac{p'}{p}\right) S^3(p,1)\; K\Big(p,\, -N,\, -\overline{(rp')^2}\big(v + \textstyle\sum_{i=1}^3 \overline{(4d_i^2)}\; l_i^2\,\big)\Big)$$

$$\times \sum_{c'(p')} \left(\frac{c'}{p'}\right) e_{p'}(-c'N) \sum_{\substack{b(rp')^* \\ (b+c'r,rp')=1}} e_{rp'}\big(\overline{(bp^2)}v\big)$$

$$\times\, S_{\mathbf{d}}\big(rp',\, b+c'r\big)\; S_{\mathbf{d}}(rp',\, -bp^2,\, -\mathbf{l})$$

$$\ll\; R^7\, r^4\, \xi(r,\mathbf{d}).$$

В силу (250), (252), Леммы 7 (vi), Леммы 8 (ii), Леммы 42 и определений для $\sum_{(\mathcal{R})}$ и $\sum_{(\mathcal{D})}$ имеем

$$\mathcal{V}_{p^2p'} \ll P^{2+3\varepsilon}\, R^3 \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{r\le PR^{-2}} \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},r}} \frac{\xi(r,\mathbf{d})}{d_1d_2d_3\,\lambda(\mathbf{d},\mathbf{0},\mathbf{l})} \tag{253}$$

$$\ll P^{2+4\varepsilon}\, D^3\, R^3 \sum_{r\le PR^{-2}} \Big(\sum_{d\le D} \frac{(r,d^2)}{d} \Big)^3 \ll P^{3+7\varepsilon}\, R\, D^6 .$$

Аналогично, из (251), (252), Леммы 7 (vi), Леммы 8 (ii), (iii) и определений для $\sum_{(\mathcal{R})}$ и $\sum_{(\mathcal{D})}$ следует

$$D_{p^2p'} \ll P^4\, R^{-1} \sum_{Q(4R^2)^{-1}<r\le PR^{-2}} r^{-2} \Big(\sum_{d\le D} \frac{(r,d^2)}{d} \Big)^3 \tag{254}$$

$$\ll P^{4+3\varepsilon}\, D^3\, R^{-1} \sum_{Q(4R^2)^{-1}<r} r^{-2} \ll P^{4+3\varepsilon}\, Q^{-1}\, D^3\, R .$$

Рассмотрим $\mathcal{V}_{(pp')^2}$ и $D_{(pp')^2}$. Если $(app'+sq, qpp') = \delta = (pp')^2$, то из условий $|n_i| \le 4d_iR^2\delta^{-1}P^{\varepsilon}$ следует, что $\mathbf{n}=\mathbf{0}$. Мы имеем также $pp' \mid q$, $p^2 \nmid q$ и ${p'}^2 \nmid q$. Положим $q = rpp'$ и получим

$$\mathcal{V}_{(pp')^2} \ll \frac{P^{2+2\varepsilon}}{R^3} \sum_{(\mathcal{R})} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{\substack{r\le PR^{-2}\\ (r,pp')=1}} \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},r}} \sum_{|v|\le P} \frac{|W_6(\mathbf{d},\mathbf{l},p,p',r,v)|}{r^4\, d_1d_2d_3\,(1+|v|)\,\lambda(\mathbf{d},\mathbf{0},\mathbf{l})} \tag{255}$$

и

$$D_{(pp')^2} \ll \frac{P^4}{R^7} \sum_{(\mathcal{R})} \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{\substack{Q(pp')^{-1}<r\le PR^{-2}\\ (r,pp')=1}} \frac{|W_6(\mathbf{d},\mathbf{0},p,p',r,0)|}{r^6\, d_1d_2d_3} , \tag{256}$$

где

$$W_6(\mathbf{d},\mathbf{l},p,p',r,v) = \sum_{s(pp')^*} \Big(\frac{s}{pp'}\Big)\, e_{pp'}(-sN) \times \sum_{\substack{a(rpp')^*\\ a+sr\equiv 0\ (pp')}} e_{rpp'}(\overline{a}v)\; S_{\mathbf{d}}\big(r,\ (a+sr)(pp')^{-1}\big)\; S_{\mathbf{d}}(rpp',\ -a,\ -\mathbf{l}) .$$

В силу Леммы 3, для фиксированных p, p', r множество

$$\{\ bpp' + tr \ :\ b(r)^*,\ \ t(pp')^*\ \}$$

является приведенной системой вычетов по модулю rpp'. Если $a = bpp' + tr$, то условие $a + sr \equiv 0\ (pp')$ эквивалентно $t + s \equiv 0\ (pp')$. Кроме того, имеем $(a + sr)(pp')^{-1} \equiv b\ (r)$ и

$$S_{\mathbf{d}}(rpp',\ -a,\ -\mathbf{l}) = S_{\mathbf{d}}(r,\ -b(pp')^2,\ -\mathbf{l})\ S_{\mathbf{d}}(pp',\ -tr^2,\ -\mathbf{l}) .$$

Используя (262), Лемму 20 (ii) – (iv) и Лемму 22, получим

$$(257) \qquad W_6(\mathbf{d}, \mathbf{l}, p, p', r, v) = S^3(pp', 1)\, K\Big(pp',\, -N,\, -\overline{r^2}\big(v + \sum\nolimits_{i=1}^{3} \overline{(4d_i^2)}\, l_i^2\,\big)\Big)$$

$$\times \sum_{b(r)^*} e_r\big(\overline{b(pp')^2} v\big)\, S_{\mathbf{d}}(r,\, b)\, S_{\mathbf{d}}(r,\, -b(pp')^2,\, -\mathbf{l})$$

$$\ll\, R^4\, r^4\, \xi(r, \mathbf{d})\,.$$

В силу (255), (257), Леммы 7 (vi), Леммы 8 (ii), Леммы 42 и определений для $\sum_{(\mathcal{R})}$ и $\sum_{(\mathcal{D})}$ имеем

$$(258) \qquad \mathcal{V}_{(pp')^2} \ll P^{2+3\varepsilon}\, R^3 \sum_{(\mathcal{D})} \sum_{r \le PR^{-2}} \sum_{\mathbf{l} \in \mathcal{N}_{\mathbf{d}, r}} \frac{\xi(r, \mathbf{d})}{d_1 d_2 d_3\, \lambda(\mathbf{d}, \mathbf{0}, \mathbf{l})}$$

$$\ll P^{2+4\varepsilon}\, D^3\, R^3 \sum_{r \le PR^{-2}} \Big(\sum_{d \le D} \frac{(r, d^2)}{d} \Big)^3 \,\ll\, P^{3+7\varepsilon}\, R\, D^6\,.$$

Применяя (256), (257), Леммы 7 (vi), Лемму 8 (ii), (iii) и определения для $\sum_{(\mathcal{R})}$ и $\sum_{(\mathcal{D})}$, получим

$$(259) \qquad D_{(pp')^2} \ll P^4\, R^{-1} \sum_{Q(4R^2)^{-1} < r \le PR^{-2}} r^{-2} \Big(\sum_{d \le D} \frac{(r, d^2)}{d} \Big)^3$$

$$\ll P^{4+3\varepsilon}\, D^3\, R^{-1} \sum_{Q(4R^2)^{-1} < r} r^{-2} \,\ll\, P^{4+3\varepsilon}\, Q^{-1}\, D^3\, R\,.$$

Вывод. Используя (205), (219), (237), (243), (248), (253) и (258), имеем

$$(260) \qquad \mathcal{V}^* \ll (P^3 R + P^2 R^5) D^6 P^{15\varepsilon}\,.$$

Соответственно, из (206), (221), (239), (244), (249), (254) и (259) следует, что

$$(261) \qquad D^* \ll P^{4+5\varepsilon} Q^{-1} D^3 R\,.$$

Теперь приведем доказательства лемм настоящего параграфа.
Доказательство Леммы 46. Сначала отметим, что если

$$(q_1, q_2) = (a_1, q_1) = (a_2, q_2) = 1$$

и если $m \in \mathbb{Z}$, то выполнено тождество

$$(262) \qquad e_{q_1 q_2}\big(\overline{(a_1 q_2 + a_2 q_1)}\, m\big) = e_{q_1}\big(\overline{(a_1 q_2^2)}\, m\big)\; e_{q_2}\big(\overline{(a_2 q_1^2)}\, m\big)\,.$$

Действительно, имеем

$$\big(\,\overline{(a_1 q_2^2)}_{q_1} q_2 + \overline{(a_2 q_1^2)}_{q_2} q_1\,\big)\,(a_1 q_2 + a_2 q_1) \,\equiv\, \overline{(a_1 q_2^2)}_{q_1}\, a_1 q_2^2 \,+\, \overline{(a_2 q_1^2)}_{q_2}\, a_2 q_1^2 \,\equiv\, 1 \pmod{q_1 q_2}\,.$$

Следовательно

$$\overline{(a_1q_2 + a_2q_1)}_{q_1q_2} \;\equiv\; \overline{(a_1q_2^2)}_{q_1} q_2 + \overline{(a_2q_1^2)}_{q_2} q_1 \pmod{q_1q_2}\,.$$

Отсюда следует тождество (262).

Мультипликативность Θ по отношению к q является следствием (262) и Леммы 20 (i). Если $(h,2)=1$, то оценка $\Theta(2^\alpha) \ll (2^\alpha)^4$ следует из Леммы 20 (iii).

Осталось доказать неравенство (209) при условии, что $(q,2h)=1$. Достаточно установить, что для каждого простого $p \nmid 2h$ и для каждого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$|\Theta(p^k)| \le p^{3k}\left(p^k\,\xi(p^k,\mathbf{d})\,,\,\eta\right). \tag{263}$$

Можно предположить, что $n_i, l_i \equiv 0 \;((p^k, d_i^2))$, потому что в противном случае в соответствии с Леммой 20 (ii), имеем $\Theta = 0$ и неравенство (263) верно.

Пусть $d_i = p^{\mu_i} e_i$, где $p \nmid e_i$. Тогда $\mu_i = 0$ или $\mu_i = 1$ и $(p^k, d_i^2) = p^{\nu_i}$, где $\nu_i = \min(k, 2\mu_i)$. Пусть $n_i' = n_i\, p^{-\nu_i}$ и $l_i' = l_i\, p^{-\nu_i}$. В силу Леммы 20 (ii), (iv) имеем

$$\Theta(p^k) = \prod_{i=1}^{3}\left(\left(\frac{-1}{p^{k-\nu_i}}\right) p^{2\nu_i}\, S^2\big(p^{k-\nu_i},1\big)\right)\ \rho(p^k)\,,$$

где

$$\rho(p^k) = \sum_{a(p^k)^*} e_{p^k}(\overline{a}\,v) \prod_{\substack{i=1\\ \nu_i<k}}^{3} e_{p^{k-\nu_i}}\left(\overline{(4ae_i^2)}_{p^{k-\nu_i}}\left(l_i'^2 - \overline{(h^2)}_{p^{k-\nu_i}}\, n_i'^2\right)\right).$$

Используя Лемму 20 (v), получим

$$|\Theta(p^k)| \le p^{3k+\nu_1+\nu_2+\nu_3}\,|\rho(p^k)|\,. \tag{264}$$

Рассмотрим $\rho(p^k)$. Легко проверить, что если $p \nmid A$ то

$$e_{p^k}\big(\overline{(A)}_{p^k}\,p^\nu\big) \;=\; e_{p^{k-\nu}}\big(\overline{(A)}_{p^{k-\nu}}\big)\,.$$

Следовательно

$$\rho(p^k) = \sum_{a(p^k)^*} e_{p^k}\left(\overline{a}\,v \;+\; \sum_{\substack{i=1\\ \nu_i<k}}^{3} p^{\nu_i}\overline{(4ae_i^2)}_{p^k}\left(l_i'^2 - \overline{(h^2)}_{p^k}\, n_i'^2\right)\right).$$

Теперь можно избавиться от условия $\nu_i < k$ в области суммирования внутренней суммы, потому что члены, для которых $\nu_i = k$, не имеют вклада в $\rho(p^k)$. Получим

$$\rho(p^k) = \sum_{a(p^k)^*} e_{p^k}\left(\overline{(a\,(2he_1e_2e_3)^2)}\;\eta'\right) \;=\; c_{p^k}(\eta')\,,$$

где $c_q(n)$ – сумма Рамануджана, определенная через (4) и

$$\eta' = (2he_1e_2e_3)^2\, v \;+\; \sum_{i=1}^{3} p^{\nu_i}\,(e_1e_2e_3)^2\, e_i^{-2}\left(h^2 l_i'^2 - n_i'^2\right).$$

Из Леммы 23 следует, что

$$|\rho(p^k)| \le (p^k, \eta')\,. \tag{265}$$

Следовательно, используя (264) и (265), получим

$$|\Theta(p^k)| \le p^{3k+\nu_1+\nu_2+\nu_3}\,(p^k,\eta') = p^{3k}(p^{k+\nu_1+\nu_2+\nu_3},\eta'')\,,$$

где $\eta'' = p^{\nu_1+\nu_2+\nu_3}\,\eta'$.

Если $k\ge 2$, то $\nu_i = 2\mu_i$ и $\eta''=\eta$, следовательно неравенство (263) верно.

Рассмотрим случай $k=1$. Теперь $\nu_i=\mu_i$ и мы имеем

$$|\Theta(p)| \le p^3\,(p^{1+\mu_1+\mu_2+\mu_3},\eta'') \le p^3\,(p^{1+\mu_1+\mu_2+\mu_3},\eta''')\,, \tag{266}$$

где

$$\eta''' = p^{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\,\eta'' = (2hd_1d_2d_3)^2\,v\,+\,\sum_{i=1}^{3} p^{\mu_i}\,(d_1d_2d_3)^2\,d_i^{-2}\left(h^2l_i^2\,-\,n_i^2\right).$$

Легко проверить, что $p^{1+\mu_1+\mu_2+\mu_3}\mid(\eta'''-\eta)$. Следовательно

$$(p^{1+\mu_1+\mu_2+\mu_3},\eta''') = (p^{1+\mu_1+\mu_2+\mu_3},\eta)\,. \tag{267}$$

Используя (266) и (267), делаем вывод, что (263) верно и для $k=1$. Лемма доказана.

$\square$

Доказательство Леммы 47. Имеем

$$\mathcal{D}(H)\,\ll\,\mathcal{D}'\,+\,\mathcal{D}''\,, \tag{268}$$

где $\mathcal{D}'$ является вкладом членов, для которых $\eta(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},H,v)=0$, и где $\mathcal{D}''$ – вклад остальных членов.

Рассмотрим $\mathcal{D}''$. В етом случае величина $\eta^* = \xi(q,\mathbf{d})^{-1}\,\eta$ является ненулевым целым числом, потому что координаты векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{l}$ удовлетворяют сравнениям в определениях (129) и (130) для $\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}(H)$ и, соответственно, $\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}$. Тогда, в силу Леммы 7 (vi) и Леммы 8 (i), имеем

$$\sum_{q\le PHR^{-2}} \frac{(q,\eta^*)}{q} \ll P^{\varepsilon}\,.$$

Следовательно, используя (139), получим

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'' \ll &\sum_{d_1,d_2,d_3\le D}\ \sum_{\substack{h_i\mid d_i^2\\ i=1,2,3}} \frac{h_1h_2h_3}{d_1d_2d_3}\\ &\times\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^*}\ \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},1}} \lambda(\mathbf{d},\ \mathbf{n},\ \mathbf{l},H)^{-1} \sum_{\substack{|v|\le P\\ \eta\ne 0}} \frac{1}{1+|v|} \sum_{\substack{q\le PHR^{-2}\\ (q,d_i^2)=h_i\\ i=1,2,3}} \frac{(q,\eta^*)}{q}\\ \ll\ & P^{2\varepsilon}\,\mathcal{H}\,,\end{aligned} \tag{269}$$

где

$$\mathcal{H} = \sum_{d_1,d_2,d_3\le D}\ \sum_{\substack{h_i\mid d_i^2\\ i=1,2,3}} \frac{h_1h_2h_3}{d_1d_2d_3} \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{N}^*}\ \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},1}} \lambda(\mathbf{d},\ \mathbf{n},\ \mathbf{l},H)^{-1}$$

и

$$\mathcal{N}^* = \{\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3 \ \ : \ \ |n_i| \le 4d_i H P^\varepsilon\ ,\ n_i \equiv 0\ (h_i)\ ,\ i = 1, 2, 3\ \}\,.$$

Имеем

$$\mathcal{H} \ll \mathcal{H}' + \mathcal{H}''\,, \tag{270}$$

где $\mathcal{H}'$ является вкладом членов, для которых $\mathbf{l} = \mathbf{0}$, и $\mathcal{H}''$ – вкладом остальных членов.

Рассмотрим $\mathcal{H}''$. В силу (135) и Леммы 42 имеем

$$\sum_{\substack{\mathbf{l} \in \mathcal{N}_{\mathbf{d},1} \\ \mathbf{l} \ne \mathbf{0}}} \lambda(\mathbf{d},\ \mathbf{n},\ \mathbf{l}, H)^{-1} \ll \sum_{\mathbf{l} \in \mathcal{N}_{\mathbf{d},1}} \lambda(\mathbf{d},\ \mathbf{0},\ \mathbf{l})^{-1} \ll D^3\, P^\varepsilon\,.$$

Из нашего предположения (156) следует, что $D \le R^{1/6}$, и мы также имеем $R \le H$. Тогда $h_i \le d_i^2 \le d_i D \le d_i H$, откуда получаем, что

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}^*} 1 = \prod_{i=1}^{3} \Big(\sum_{\substack{|n| \le 4 d_i H P^\varepsilon \\ n \equiv 0\, (h_i)}} 1 \Big) \ll \prod_{i=1}^{3} \Big(1 + \frac{d_i H P^\varepsilon}{h_i} \Big) \ll H^3\, P^{3\varepsilon}\, \frac{d_1 d_2 d_3}{h_1 h_2 h_3}\,.$$

Следовательно

$$\mathcal{H}'' \ll H^3\, D^6\, P^{7\varepsilon}\,. \tag{271}$$

Рассмотрим $\mathcal{H}'$. Сначала оценим величину

$$\mathcal{B} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}^*} \lambda(\mathbf{d},\ \mathbf{n},\ \mathbf{0}, H)^{-1}\,.$$

Имеем

$$\mathcal{B} \ll 1 + \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_3\,,$$

где $\mathcal{B}_\nu$ является вкладом членов, для которых $|n_\nu| d_\nu^{-1} = \max_{i=1,2,3} \big(|n_i| d_i^{-1} \big) > 0$. Рассмотрим, например, $\mathcal{B}_1$. Используя снова неравенства $D \le R^{1/6}$ и $R \le H$, получим

$$\mathcal{B}_1 \ll H^2 \sum_{\substack{n \le 4 d_1 H P^\varepsilon \\ n \equiv 0\ (h_1)}} \frac{d_1^2}{n^2} \Big(1 + \frac{d_2\, n}{h_2\, d_1} \Big) \Big(1 + \frac{d_3\, n}{h_3\, d_1} \Big) \ll H^3\, P^\varepsilon\, \frac{d_1 d_2 d_3}{h_1 h_2 h_3}\,.$$

Очевидно, та же самая оценка верна и для $\mathcal{B}$. Следовательно

$$\mathcal{H}' = \sum_{d_1, d_2, d_3 \le D} \sum_{\substack{h_i | d_i^2 \\ i = 1,2,3}} \frac{h_1 h_2 h_3}{d_1 d_2 d_3} \mathcal{B} \ll H^3\, D^3\, P^{2\varepsilon}\,. \tag{272}$$

Из оценок (269) – (272) следует

$$\mathcal{D}'' \ll H^3\, D^6\, P^{9\varepsilon}\,. \tag{273}$$

Теперь рассмотрим $\mathcal{D}'$. Имеем

$$\mathcal{D}' \ll \sum_{d_1, d_2, d_3 \le D} \sum_{q \le PHR^{-2}} \frac{\xi(q, \mathbf{d})}{d_1 d_2 d_3}\, \mathcal{X}\,, \tag{274}$$

где

$$\mathcal{X}=\sum_{|v|\le P}\ \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}}\ \sum_{\substack{\mathbf{n}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}(H)\\ \eta=0}}\big((1+|v|)\,\lambda(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},H)\big)^{-1}.$$

Разделим $\mathcal{X}$ на две части:

(275) $$\mathcal{X}=\mathcal{X}'+\mathcal{X}'',$$

где $\mathcal{X}'$ является вкладом слагаемых, для которых $\mathbf{l}=\mathbf{0}$ и где $\mathcal{X}''$ является вкладом других слагаемых.

Рассмотрим $\mathcal{X}''$. Используя (135), получим

$$\mathcal{X}''\ll\sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}}\lambda(\mathbf{d},\mathbf{0},\mathbf{l})^{-1}\sum_{|v|\le P}\frac{\mathcal{K}(\mathbf{d},\mathbf{l},q,H,v)}{(1+|v|)}$$

где $\mathcal{K}$ равно числу $\mathbf{n}\in\mathcal{N}_{\mathbf{d},q}(H)$, таких, что $\eta(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{l},H,v)=0$.

Оценим $\mathcal{K}$. Переменная n_1 может принимать не более чем $\mathcal{O}(\,H\,P^{\varepsilon}\,d_1\,(q,d_1^2)^{-1}\,)$ значений. Если $\mathbf{d},\mathbf{l},H,v,n_1$ фиксированны, то, в силу Леммы 7 (vii), уравнение $\eta=0$ определяет не более чем $\mathcal{O}(P^{\varepsilon})$ пары n_2,n_3. Следовательно

$$\mathcal{K}(\mathbf{d},\mathbf{l},q,H,v)\ll H\,P^{2\varepsilon}\,d_1\,(q,d_1^2)^{-1}$$

и, в силу Леммы 42,

(276) $$\mathcal{X}''\ll P^{4\varepsilon}\,D^3\,H\,d_1\,(q,d_1^2)^{-1}.$$

Рассмотрим $\mathcal{X}'$. Вклад к $\mathcal{X}'$ из членов, для которых $\mathbf{n}=\mathbf{0}$, равен $\mathcal{O}(P^{\varepsilon})$. Используя (135) и (208), делаем вывод, что если $\mathbf{n}\ne\mathbf{0}$ и $\eta(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{0},H,v)=0$, то имеем $v>0$ и $\lambda(\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{0},H)^{-1}\ll v^{-1}$. Следовательно

(277) $$\mathcal{X}'\ll P^{\varepsilon}+\sum_{v\le P}v^{-2}\,\mathcal{K}(\mathbf{d},\mathbf{0},q,H,v)\ \ll H\,P^{2\varepsilon}\,d_1\,(q,d_1^2)^{-1}.$$

Используя (274) – (277), Лемму 7 (vi) и Лемму 8 (ii), получим

(278) $$\mathcal{D}'\ll P^{1+6\varepsilon}H^2D^6R^{-2}.$$

Оценка (211) является следствием (268), (273) и (278). Лемма доказана.

□

3.4.6. *Оценка для E^*.*

Рассмотрим сумму $\mathcal{F}$, определенную через (200). Разделим ее на части в соответствии с вычетом числа $pp'(a_1q_2+a_2q_1)+sq_1q_2$ по модулю q_1q_2pp'. После замены порядка суммирования получим

(279) $$\mathcal{F}=\sum_{0<|l|\le 4R^2Q^2P^{\varepsilon-2}}\ \sum_{\substack{q_1,q_2\le Q\\ |l|(pp')^{-1}P^{2-\varepsilon}<q_1q_2}}(q_1q_2)^{-3}\,e\Big(\frac{nl}{q_1q_2pp'}\Big)\sum_{s(pp')^*}\Big(\frac{s}{pp'}\Big)e_{pp'}(-sN)$$

$$\times\sum_{\substack{a_1(q_1)^*,\,a_2(q_2)^*\\ pp'(a_1q_2+a_2q_1)+sq_1q_2\equiv l\ (q_1q_2pp')}}S_{\mathbf{d}}(q_1,-a_1)S_{\mathbf{d}}(q_2,-a_2).$$

С етого места мы будем считать, что

$$Q \le P^{1-\varepsilon} R^{-1/2}. \tag{280}$$

Из етого неравенства следует, что в правой части (279) суммирование ведется по числам l, удовлетворяющим $0 < |l| < R$. Для них выполнено $(l, pp') = 1$ и, следовательно, имеем $(q_1 q_2, pp') = 1$. Тогда сравнение в области суммиривания по a_1, a_2 еквивалентно системе сравнений

$$pp'(a_1 q_2 + a_2 q_1) \equiv l \ (q_1 q_2)\,, \qquad s q_1 q_2 \equiv l \ (pp').$$

Второе из етих сравнений однозначно определяет числа s по модулю pp'. Следовательно, сумма по переменной s в правой части (279) имеет только одно слагаемое, соответствующее $s \equiv l\ \overline{q_1 q_2} \quad (pp')$. Тогда имеем

$$\mathcal{F} = \sum_{\substack{0<|l|\le 4R^2Q^2P^{\varepsilon-2} \\ (l,pp')=1}} \sum_{\substack{q_1,q_2 \\ (283)}} (q_1 q_2)^{-3}\, e\Big(\frac{nl}{q_1 q_2 pp'}\Big) \cdot \Big(\frac{q_1 q_2 l}{pp'}\Big) \cdot e\Big(\frac{-Nl\,\overline{q_1 q_2}}{pp'}\Big) \cdot\ \mathcal{S}\,, \tag{281}$$

где

$$\mathcal{S} = \sum_{\substack{a_1(q_1)^*,\, a_2(q_2)^* \\ pp'(a_1q_2+a_2q_1)\equiv l\ (q_1q_2)}} S_{\mathbf{d}}(q_1, -a_1) S_{\mathbf{d}}(q_2, -a_2) \tag{282}$$

и где суммирование по q_1, q_2 в сумме в правой части (281) ведется по числам, удовлетворяющим условиям

$$q_1, q_2 \le Q\,, \qquad |l|(pp')^{-1}P^{2-\varepsilon} < q_1 q_2\,, \qquad (q_1 q_2, pp') = 1\,. \tag{283}$$

Заменим суммирование по q_1, q_2 суммированием по новых переменных g_1, g_2, b_1, b_2, связанных с q_1, q_2 равенствами

$$q_1 = g_1\, b_1\,, \qquad q_2 = g_2\, b_2 \tag{284}$$

и удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} &g_1 b_1,\ g_2 b_2 \le Q, \qquad |l|(pp')^{-1}P^{2-\varepsilon} < b_1 b_2 g_1 g_2, \\ &(g_1 g_2, 2pp' d_1 d_2 d_3 b_1 b_2) = (g_1, g_2) = (b_1 b_2, pp') = 1, \\ &\rho_{\mathbf{d}}(b_1) = \rho_{\mathbf{d}}(b_2), \end{aligned} \tag{285}$$

где $\rho_{\mathbf{d}}(m)$ – произведение простых делителей m, не делящих $2d_1 d_2 d_3$.

Для доказательства корректности етой замены переменных нам нужна следующая лемма, доказательство которой приведено в конце параграфа.

Лемма 48. *Рассмотрим множества*

$$\mathfrak{L} = \{\ \langle g_1, g_2, b_1, b_2\rangle \in \mathbb{N}^4 \quad : \quad \textit{выполнены условия } (285)\ \}\,,$$

$$\widetilde{\mathfrak{L}} = \{\ \langle q_1, q_2\rangle \in \mathbb{N}^2 \quad : \quad \textit{выполнены условия } (283)\ \}\,.$$

Если $\langle g_1, g_2, b_1, b_2\rangle \in \mathfrak{L}$, *то* $\langle g_1 b_1, g_2 b_2\rangle \in \widetilde{\mathfrak{L}}$. *Изображение* $\mathfrak{f} : \mathfrak{L} \to \widetilde{\mathfrak{L}}$, *заданное через* $\mathfrak{f} : \langle g_1, g_2, b_1, b_2\rangle \mapsto \langle g_1 b_1, g_2 b_2\rangle$, *является взаимно однозначным.*

$\square$

Рассмотрим сумму $\mathcal{S}$. Предположим, что q_1, q_2 удовлетвояют (284) и (285). В силу Леммы 3, множества

$$\{\ \alpha_i b_i + \beta_i g_i \ \ : \ \ \alpha_i (g_i)^*\ ,\ \ \beta_i (b_i)^*\ \}\,, \qquad i=1,2$$

представляют собой приведенные системы вычетов по модулям q_i, $i=1,2$. Далее, если $a_i = \alpha_i b_i + \beta_i g_i\,,\ i=1,2$, то сравнение в области суммирования в (282), еквивалентно следующей системе из трех сравнений:

$$pp'\alpha_1 b_1 b_2 g_2 \equiv l\ (g_1)\,, \qquad pp'\alpha_2 b_1 b_2 g_1 \equiv l\ (g_2)\,, \tag{286}$$

$$pp' g_1 g_2 (\beta_1 b_2 + \beta_2 b_1) \equiv l\ (b_1 b_2)\,. \tag{287}$$

Используя Лемму 20 (i), (iv), получим, что если выполнены условия (284), (285), то имеем

$$\mathcal{S} = \sum_{\substack{\alpha_1(g_1)^*,\,\alpha_2(g_2)^* \\ (286)}} S^3(g_1,-\alpha_1)\, S^3(g_2,-\alpha_2)\cdot \mathcal{S}' \tag{288}$$

$$= \Big(\frac{-pp'b_1b_2g_2l}{g_1}\Big)\Big(\frac{-pp'b_1b_2g_1l}{g_2}\Big) S^3(g_1,1) S^3(g_2,1)\cdot \mathcal{S}'\,,$$

где

$$\mathcal{S}' = \sum_{\substack{\beta_1(b_1)^*,\,\beta_2(b_2)^* \\ (287)}} S_{\mathbf{d}}(b_1,-\beta_1)\, S_{\mathbf{d}}(b_2,-\beta_2). \tag{289}$$

Разделим сумму $\mathcal{F}$ на $\mathcal{O}(\log^2 P)$ суммы $\mathcal{F}(G_1,G_2)$ в зависимости от местоположения величин g_i. В сумме $\mathcal{F}(G_1,G_2)$ суммирование ведется по

$$g_i \in (G_i, 2G_i]\,, \qquad i=1,2\,. \tag{290}$$

Рассмотрим сумму E^*, определенную через (202), и обозначим через $E(G_1,G_2)$ вклад к E^* из $\mathcal{F}(G_1,G_2)$. Имеем

$$E(G_1,G_2) = P^2 R^{-1} \sum_{(\mathcal{R})} \sum_{(\mathcal{D})} (d_1d_2d_3)^{-1} \sum_{n\le N} |\mathcal{F}(G_1,G_2)| \tag{291}$$

и, очевидно,

$$E^* \ll P^{\varepsilon} \max_{G_1,G_2\le Q} |E(G_1,G_2)|\,. \tag{292}$$

Рассмотрим $\mathcal{F}(G_1,G_2)$. Из (281), (284), (285), (288), (290) и Леммы 48 следует, что

$$(293)\quad \mathcal{F}(G_1,G_2) = \sum_{\substack{0<|l|\le 4R^2Q^2P^{\varepsilon-2}\\ (l,pp')=1}} \sum_{\substack{g_1,g_2,b_1,b_2\\ (285),(290)}} (b_1b_2g_1g_2)^{-3}$$

$$\times\ e\Big(\frac{nl}{g_1g_2b_1b_2pp'}\Big)\cdot\Big(\frac{g_1g_2b_1b_2l}{pp'}\Big)\cdot e\Big(\frac{-Nl\,\overline{(b_1b_2g_1g_2)}}{pp'}\Big)$$

$$\times\ \Big(\frac{-pp'b_1b_2g_2l}{g_1}\Big)\cdot\Big(\frac{-pp'b_1b_2g_1l}{g_2}\Big)\cdot S^3(g_1,1)\cdot S^3(g_2,1)\cdot\mathcal{S}'\,,$$

где $\mathcal{S}'$ определено через (289) и где суммирование по g_1,g_2,b_1,b_2 ведется по натуральным числам, удовлетворяющим (285) и (290).

Рассмотрим любую пару чисел b_1,b_2, удовлетворяющих условиям в области суммирования последней суммы. Пусть $b_1=B_1\Delta,\ b_2=B_2\Delta$, где $B_1,B_2,\Delta\in\mathbb{N}$ и $(B_1,B_2)=1$. Тогда из сравнения (287) следует, что $\Delta\mid l$, так что $l=\Delta v$ для некоторого $v\in\mathbb{Z}$. При етих обозначениях мы можем записать сравнение (287) в более простом виде и получим, что

$$\mathcal{S}'=\Xi(pp'g_1g_2)\,,$$

где

(294)

$$\Xi(\mu)\ =\ \Xi(B_1,B_2,\Delta,v,\mu)\ =\sum_{\substack{\beta_1(\Delta B_1)^*,\ \beta_2(\Delta B_2)^*\\ \mu(\beta_1B_2+\beta_2B_1)\equiv v\ (\Delta B_1B_2)}} S_{\mathbf{d}}(\Delta B_1,-\beta_1)S_{\mathbf{d}}(\Delta B_2,-\beta_2)\,.$$

Из последных рассуждений следует, что суммирование по b_1,b_2,l в (293) может быть заменено суммированием по новым переменным $v\in\mathbb{Z}$; $\Delta,B_1,B_2\in\mathbb{N}$, для которых $l=\Delta v,\ b_1=B_1\Delta,\ b_2=B_2\Delta,\ (B_1,B_2)=1$. Следовательно

(295)

$$\mathcal{F}(G_1,G_2)=\sum_{\substack{0<\Delta|v|\le 4R^2Q^2P^{\varepsilon-2}\\ (\Delta v,pp')=1}}\ \sum_{\substack{g_1,g_2,B_1,B_2\\ (296)}} \frac{S^3(g_1,1)\,S^3(g_2,1)}{(B_1B_2\Delta^2g_1g_2)^3}$$

$$\times\, e\Big(\frac{nv}{B_1B_2\Delta g_1g_2pp'}\Big)\cdot\Big(\frac{B_1B_2g_1g_2\Delta v}{pp'}\Big)\cdot e\Big(\frac{-Nv\overline{(B_1B_2\Delta g_1g_2)}}{pp'}\Big)$$

$$\times\,\Big(\frac{-pp'B_1B_2g_2\Delta v}{g_1}\Big)\cdot\Big(\frac{-pp'B_1B_2g_1\Delta v}{g_2}\Big)\cdot\Xi(pp'g_1g_2)\,,$$

где суммирование по g_1, g_2, B_1, B_2 ведется по всем натуральным числам, удовлетворяющим следуюшим условиям:

$$
\begin{aligned}
&B_1\Delta g_1 \le Q, \quad B_2\Delta g_2 \le Q, \quad G_1 < g_1 \le 2G_1, \quad G_2 < g_2 \le 2G_2,\\
&|v|(pp')^{-1}P^{2-\varepsilon} < B_1B_2\Delta g_1g_2, \quad \rho_{\mathbf{d}}(\Delta B_1) = \rho_{\mathbf{d}}(\Delta B_2) = \rho_{\mathbf{d}}(\Delta),\\
&(g_1g_2, 2pp'd_1d_2d_3\Delta B_1B_2) = (g_1,g_2) = (B_1B_2\Delta, pp') = (B_1,B_2) = 1.
\end{aligned}
\tag{296}
$$

Чтобы установить корректность перехода от (293) к (295), надо только проверить, что если $\rho_{\mathbf{d}}(\Delta B_1) = \rho_{\mathbf{d}}(\Delta B_2) = L$, то $\rho_{\mathbf{d}}(\Delta) = L$. Действительно, пусть π – любой простой делитель числа L. Докажем, что $\pi \mid \rho_{\mathbf{d}}(\Delta)$ и, таким образом, утверждение будет доказано. Очевидно имеем $\pi \mid \Delta B_1$, $\pi \mid \Delta B_2$, $\pi \nmid 2d_1d_2d_3$. Если допустить, что $\pi \nmid \Delta$, то получим $\pi \mid (B_1, B_2)$, а ето невозможно. Следовательно $\pi \mid \Delta$ и тогда $\pi \mid \rho_{\mathbf{d}}(\Delta)$.

Будем оценивать $E(G_1, G_2)$ двумя разными способами.
Первая оценка для $E(G_1, G_2)$. Используя Лемму 20 (ii), (iii), получим

$$
S_{\mathbf{d}}(\Delta B_j, -\beta_j) \ll (\Delta B_j)^{3/2}\, d_1d_2d_3\,. \tag{297}
$$

Если $(\mu, \Delta B_1B_2) = (B_1, B_2) = 1$, то имеем

$$
\sum_{\substack{\beta_1 (\Delta B_1)^* \\ \mu(\beta_1B_2+\beta_2B_1)\equiv v}} \ \sum_{\substack{\beta_2 (\Delta B_2)^* \\ (\Delta B_1B_2)}} 1 \,\le\, \Delta\,. \tag{298}
$$

Действительно, для разрешимости сравнения в области суммирования последней суммы необходимо, чтобы $\mu\beta_1B_2 \equiv v\ (B_1)$. Тогда β_1 можеть принимать не более чем Δ значения. Для каждого из них сравнение еквивалентно $\mu\beta_2 \equiv (v - \mu\beta_1B_2)B_1^{-1}\ (\Delta B_2)$, и тогда β_2 определено однозначно по модулю ΔB_2.

Из (294), (297) и (298) следует

$$
\Xi(\mu) \ll \Delta^4 (B_1B_2)^{3/2}\, (d_1d_2d_3)^2 \qquad \text{если} \qquad (\mu, \Delta B_1B_2) = 1\,. \tag{299}
$$

В силу Леммы 20 (iii) имеем

$$
\sum_{G_i < g_i \le 2G_i} g_i^{-3}|S^3(g_i,1)| \ll \sum_{G_i < g_i \le 2G_i} g_i^{-3/2} \ll G_i^{-1/2}\,, \qquad i = 1,2\,. \tag{300}
$$

Из (291), (295), (299) и (300) следует, что

$$
E(G_1,G_2) \ll E^{\#}(G_1,G_2)\,, \tag{301}
$$

где

$$
E^{\#}(G_1,G_2) = P^4R(G_1G_2)^{-1/2} \sum_{(\mathcal{D})} d_1d_2d_3\, \mathcal{T}\,, \tag{302}
$$

и

$$
\mathcal{T} = \sum_{\substack{\Delta v \le 4R^2Q^2P^{\varepsilon-2} \\ \Delta, v > 0}} \Delta^{-2} \sum_{B_1, B_2\ (304)} (B_1B_2)^{-3/2}\,. \tag{303}
$$

Здесь суммирование ведется по числам B_1 и B_2, удовлетворяющим условиям

$$\begin{aligned} & B_1 \le Q\Delta^{-1}G_1^{-1}, \qquad B_2 \le Q\Delta^{-1}G_2^{-1}, \\ & |v|(16R^2\Delta G_1G_2)^{-1}P^{2-\varepsilon} \le B_1B_2, \qquad (B_1B_2, pp') = 1, \\ & \rho_{\mathbf{d}}(\Delta B_1) = \rho_{\mathbf{d}}(\Delta B_2) = \rho_{\mathbf{d}}(\Delta)\,. \end{aligned} \tag{304}$$

Используя ети условия, получим

$$\mathcal{T} \ll \sum_{\substack{\Delta v \le 4R^2Q^2P^{\varepsilon-2} \\ \Delta, v>0}} \Delta^{-2}\big(vR^{-2}(\Delta G_1G_2)^{-1}P^{2-\varepsilon}\big)^{-3/2}\,\mathcal{T}_1^2 \tag{305}$$

$$\ll R^3\,(G_1G_2)^{3/2}\,P^{2\varepsilon-3} \sum_{\Delta \le 4R^2Q^2P^{\varepsilon-2}} \Delta^{-1/2}\,\mathcal{T}_1^2\,,$$

где

$$\mathcal{T}_1 = \sum_{\substack{B \le P \\ \rho_{\mathbf{d}}(\Delta B) = \rho_{\mathbf{d}}(\Delta)}} 1\,. \tag{306}$$

Рассмотрим $\mathcal{T}_1$. Если $\rho_{\mathbf{d}}(\Delta B) = \rho_{\mathbf{d}}(\Delta)$, то каждый простой множитель числа B делит $2d_1d_2d_3\Delta$. Следовательно, в силу Леммы 7 (iv), (vi) и Леммы 11, имеем

$$\mathcal{T}_1 \le \sum_{\substack{B=1 \\ p|B \Rightarrow p|2d_1d_2d_3\Delta}}^{\infty} (PB^{-1})^{\varepsilon} = P^{\varepsilon} \prod_{p|2d_1d_2d_3\Delta} \big(1 + p^{-\varepsilon} + p^{-2\varepsilon} + \dots\big) \tag{307}$$

$$\le P^{\varepsilon}\big(1 + 2^{-\varepsilon} + 2^{-2\varepsilon} + \dots\big)^{\nu(2d_1d_2d_3\Delta)} \ll P^{2\varepsilon}\,.$$

Исползуя ету оценку для $\mathcal{T}_1$ и (305) и имея ввиду (302), получим

$$E^{\#}(G_1, G_2) \ll G_1G_2\,R^5\,Q\,D^6\,P^{10\varepsilon}\,. \tag{308}$$

Из етого неравенства и (301) следует, что

$$E(G_1, G_2) \ll G_1G_2\,R^5\,Q\,D^6\,P^{10\varepsilon}\,. \tag{309}$$

Вторая оценка для $E(G_1, G_2)$. Предположим, что

$$G_1 \le G_2. \tag{310}$$

В силу (291), (295), и Леммы 20 (iii) имеем

$$E(G_1,G_2) \ll P^2R^{-1}\sum_{(\mathcal{R})}\sum_{(\mathcal{D})}(d_1d_2d_3)^{-1}\sum_{n\le N}\sum_{\substack{0<\Delta|v|\le 4R^2Q^2P^{\varepsilon-2}\\ (\Delta v,pp')=1}} \tag{311}$$

$$\times \sum_{B_1,B_2\ (304)}(B_1B_2\Delta^2)^{-3}$$

$$\times \sum_{\substack{G_1<g_1\le 2G_1\\ (g_1,2pp'd_1d_2d_3\Delta B_1B_2v)=1}} g_1^{-3/2} \max_{\substack{G,G':\\ G_2\le G\le G'\le 2G_2}} |\mathcal{M}_0|\,,$$

где

$$\mathcal{M}_0 = \sum_{\substack{G<g\le G'\\ (g,2pp'd_1d_2d_3\Delta B_1B_2g_1)=1}} g^{-3}\,S^3(g,1)\cdot e\Big(\frac{nv}{B_1B_2\Delta g_1gpp'}\Big)$$

$$\times \Big(\frac{g}{pp'}\Big)\cdot e\Big(\frac{-Nv\overline{(B_1B_2\Delta g_1g)}}{pp'}\Big)\cdot\Big(\frac{g}{g_1}\Big)\cdot\Big(\frac{-pp'B_1B_2g_1\Delta v}{g}\Big)\cdot\Xi(pp'g_1g)\,.$$

Далее

$$\mathcal{M}_0 = \sum_{\lambda(\Delta B_1B_2)^*}\Xi(pp'g_1\lambda)\,\mathcal{M}_1\,, \tag{312}$$

где

$$\mathcal{M}_1 = \sum_{\substack{G<g\le G'\\ (g,2pp'd_1d_2d_3g_1)=1\\ g\equiv\lambda\ (\Delta B_1B_2)}} g^{-3}\,S^3(g,1)\,e\Big(\frac{nv}{B_1B_2\Delta g_1gpp'}\Big)\cdot\Big(\frac{g}{pp'}\Big)$$

$$\times\, e\Big(\frac{-Nv\overline{(B_1B_2\Delta g_1g)}}{pp'}\Big)\cdot\Big(\frac{g}{g_1}\Big)\cdot\Big(\frac{-pp'B_1B_2g_1\Delta v}{g}\Big).$$

Из (299) и (312) следует

$$\mathcal{M}_0 \ll \Delta^4\,(B_1B_2)^{3/2}\,(d_1d_2d_3)^2\sum_{\lambda\ (\Delta B_1B_2)^*}|\mathcal{M}_1|. \tag{313}$$

Разделим $\mathcal{M}_1$ на четыре части в соответствии с вычетом числа g по модулю 8. Пусть $\mathcal{M}_2(j)$ представляет собой сумму слагаемых из $\mathcal{M}_1$, для которых $g\equiv j\ (8)$. Имеем

$$\mathcal{M}_1 \ll \max_{j=1,3,5,7}|\mathcal{M}_2(j)|\,. \tag{314}$$

Определим числа B_1', B_2', Δ', $v'\in\mathbb{N}$ равенствами

$$(B_1'B_2'\Delta'v',2)=1,\qquad B_1=2^{\mu_1}B_1',\qquad B_2=2^{\mu_2}B_2',\qquad \Delta=2^{\mu_3}\Delta',\qquad |v|=2^{\mu_4}v'\,,$$

где $\mu_i \in \mathbb{Z},\ \mu_i \geq 0$. Рассмотим любую из сумм $\mathcal{M}_2(j)$. В силу Леммы 13 (i) – (iii) и Леммы 20 (v), имеем

$$|\mathcal{M}_2(j)| = |\mathcal{M}_3|, \tag{315}$$

где

$$\mathcal{M}_3 = \sum_{\substack{G<g\leq G' \\ (g,pp'd_1d_2d_3g_1)=1 \\ g\equiv\lambda\ (\Delta B_1B_2) \\ g\equiv j\ (8)}} g^{-3/2}\cdot e\Big(\frac{nv}{B_1B_2\Delta g_1 gpp'}\Big)\cdot e\Big(\frac{-Nv\overline{(B_1B_2\Delta g_1 g)}}{pp'}\Big)\cdot\Big(\frac{B_1'B_2'\Delta' v'}{g}\Big).$$

Можно предположить, что $j \equiv \lambda\ ((8, B_1B_2\Delta))$, потому что в противном случае сумма $\mathcal{M}_3$ будет пуста. Обозначим

$$T = [8, B_1B_2\Delta]\,. \tag{316}$$

В силу Леммы 5, существует $\pi \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющее $(\pi, T) = 1$ и такое, что система сравнений $g \equiv \lambda\ (\Delta B_1B_2)$, $g \equiv j\ (8)$ еквивалентна $g \equiv \pi\ (T)$. Используя снова Лемму 13 (i), получим

$$|\mathcal{M}_3| = |\mathcal{M}_4|, \tag{317}$$

где

$$\mathcal{M}_4 = \sum_{\substack{G<g\leq G' \\ (g,pp'd_1d_2d_3g_1)=1 \\ g\equiv\pi\ (T)}} g^{-3/2}\cdot e\Big(\frac{nv}{B_1B_2\Delta g_1 gpp'}\Big)\cdot e\Big(\frac{-Nv\overline{(B_1B_2\Delta g_1 g)}}{pp'}\Big)\cdot\Big(\frac{g}{v'}\Big).$$

Далее, в силу (304), равномерно по $x \in [G_2, 2G_2]$ имеем

$$\frac{d}{dx}\Big(x^{-3/2}\, e\Big(\frac{nv}{B_1B_2\Delta g_1 xpp'}\Big)\Big) \ll P^{\varepsilon} G_2^{-5/2}\,.$$

Применим Лемму 24 и получим

$$\mathcal{M}_4 \ll P^{\varepsilon} G_2^{-3/2} \max_{G''\in[G,G']} |\mathcal{M}_5|, \tag{318}$$

где

$$\mathcal{M}_5 = \sum_{\substack{G<g\leq G'' \\ (g,pp'd_1d_2d_3g_1)=1 \\ g\equiv\pi\ (T)}} e\Big(\frac{-Nv\overline{(B_1B_2\Delta g_1 g)}}{pp'}\Big)\cdot\Big(\frac{g}{v'}\Big).$$

Наконец, чтобы освободится от условия $(g, d_1d_2d_3g_1) = 1$, наложенного на g, воспользуемся Леммой 2 и получим

$$\mathcal{M}_5 = \sum_{\substack{G<g\le G'' \\ (g,pp')=1 \\ g\equiv \pi\ (T)}} \Big(\sum_{\delta|(g,d_1d_2d_3g_1)} \mu(\delta)\Big) \cdot e\Big(\frac{-Nv\overline{(B_1B_2\Delta g_1 g)}}{pp'}\Big) \cdot \Big(\frac{g}{v'}\Big) \tag{319}$$

$$= \sum_{\delta|d_1d_2d_3g_1} \mu(\delta)\, \mathcal{M}_6\,,$$

где

$$\mathcal{M}_6 = \sum_{\substack{G<g\le G'' \\ (g,pp')=1 \\ g\equiv \pi\ (T) \\ g\equiv 0\ (\delta)}} e\Big(\frac{-Nv\overline{(B_1B_2\Delta g_1 g)}}{pp'}\Big)\Big(\frac{g}{v'}\Big)\,.$$

Имеем $(\pi, T) = 1$. Следовательно можно предположить, что $(\delta, T) = 1$, потому что в противном случае сумма $\mathcal{M}_6$ будет пуста. Тогда имеем

$$|\mathcal{M}_6| \le |\mathcal{M}_7|\,, \tag{320}$$

где

$$\mathcal{M}_7 = \sum_{\substack{G\delta^{-1}<g\le G''\delta^{-1} \\ (g,pp')=1 \\ g\equiv \pi'\ (T)}} e\Big(\frac{\mathfrak{m}\,\overline{g}}{pp'}\Big)\,\Big(\frac{g}{v'}\Big)$$

и

$$\mathfrak{m} \equiv -Nv\,\overline{(B_1B_2\Delta g_1\delta)}\ (pp')\,, \qquad\qquad \pi' \equiv \pi\,\overline{\delta}\ (T)\,.$$

Чтобы оценить сумму $\mathcal{M}_7$ мы делим ее на $\mathcal{O}(G_2(\delta v'Tpp')^{-1})$ полных сумм и на не более чем одну неполную сумму по модулю $v'Tpp'$. Получим

$$\mathcal{M}_7 \ll G_2\,(\delta v'Tpp')^{-1}\,|\mathcal{M}_8| \;+\; \max_{\substack{H,\,H' \\ 0<H'-H<v'Tpp'}} |\mathcal{M}_9|\,, \tag{321}$$

где

$$\mathcal{M}_8 = \sum_{\substack{g(v'Tpp') \\ (g,pp')=1 \\ g\equiv \pi'\ (T)}} e\Big(\frac{\mathfrak{m}\,\overline{g}}{pp'}\Big)\Big(\frac{g}{v'}\Big)\,, \qquad\qquad \mathcal{M}_9 = \sum_{\substack{H<g\le H' \\ (g,pp')=1 \\ g\equiv \pi'\ (T)}} e\Big(\frac{\mathfrak{m}\,\overline{g}}{pp'}\Big)\Big(\frac{g}{v'}\Big)\,.$$

Рассмотрим полную сумму $\mathcal{M}_8$. Отметим сначала, что по существу, g принимает значения, которые взаимно просты с числом $v'Tpp'$. Очевидно $(v'T, pp') = 1$. Следовательно, в силу Леммы 3, имеем

$$\mathcal{M}_8 = \sum_{\substack{h_1 (v'T)^*,\, h_2 (pp')^* \\ h_1 pp' + h_2 v'T \equiv \pi' \ (T)}} e\Big(\frac{\mathfrak{m}\,\overline{(h_1 pp' + h_2 v'T)}}{pp'}\Big)\Big(\frac{h_1 pp' + h_2 v'T}{v'}\Big)$$

$$= \sum_{\substack{h_1 (v'T)^* \\ h_1 pp' \equiv \pi' \ (T)}} \Big(\frac{h_1 pp'}{v'}\Big)\, c_{pp'}(\mathfrak{m}\,\overline{v'T})\,,$$

где $c_{pp'}$ – сумма Рамануджана, определенная через (4). Мы оцениваем ее при помощи Леммы 23. Отметим также, что сумма по h_1 имеет $\mathcal{O}(v')$ членов. Следовательно

$$\mathcal{M}_8 \ll v'\,. \tag{322}$$

Рассмотрим теперь неполную сумму $\mathcal{M}_9$. Преобразуем ее следующим стандартным способом, пользуясь Леммой 4 (i):

$$\mathcal{M}_9 = \sum_{\substack{g (v'Tpp') \\ (g,pp')=1 \\ g \equiv \pi' \ (T)}} e\Big(\frac{\mathfrak{m}\,\overline{g}}{pp'}\Big)\Big(\frac{g}{v'}\Big) \sum_{H < s \le H'} (v'Tpp')^{-1} \sum_{h (v'Tpp')} e\Big(\frac{h(g-s)}{v'Tpp'}\Big) \tag{323}$$

$$= (v'Tpp')^{-1} \sum_{h (v'Tpp')} \Big(\sum_{H < s \le H'} e\Big(\frac{-hs}{v'Tpp'}\Big)\Big)\, \mathcal{M}_{10}(h)\,,$$

где

$$\mathcal{M}_{10}(h) = \sum_{\substack{g (v'Tpp') \\ (g,pp')=1 \\ g \equiv \pi' \ (T)}} \Big(\frac{g}{v'}\Big) e\Big(\frac{\mathfrak{m}\,\overline{g}}{pp'} + \frac{hg}{v'Tpp'}\Big)\,.$$

Из (323) и Леммы 33 следует, что

$$\mathcal{M}_9 \ll \sum_{|h| \le v'Tpp'} (1 + |h|)^{-1}\, |\mathcal{M}_{10}(h)|\,. \tag{324}$$

Нам осталось оценить $\mathcal{M}_{10}(h)$. Отметим снова, что по существу, значения переменной g взаимно просты с числом $v'Tpp'$ и что $(v'T, pp') = 1$. Следовательно, используя

Лемму 3, получим

$$\mathcal{M}_{10}(h) = \sum_{\substack{t_1 (v'T)^*,\, t_2 (pp')^* \\ t_1 pp' + t_2 v'T \equiv \pi' \ (T)}} \Big(\frac{t_1 pp' + t_2 v'T}{v'}\Big)\, e\Big(\frac{\mathfrak{m}\,\overline{(v'Tt_2)}}{pp'} + \frac{t_1 h}{v'T} + \frac{t_2 h}{pp'}\Big)$$

$$= \sum_{\substack{t_1 (v'T)^* \\ t_1 pp' \equiv \pi' \ (T)}} \Big(\frac{t_1 pp'}{v'}\Big)\, e\Big(\frac{t_1 h}{v'T}\Big)\, K(pp', h, \mathfrak{m}\,\overline{v'T})\,,$$

где K – сумма Клостермана, определенная через (4). Мы оцениваем ее при помощи Леммы 22. Очевидно, сумма по t_1 имеет $\mathcal{O}(v')$ членов. Следовательно

(325) $$\mathcal{M}_{10}(h) \ll v'R\,.$$

Из неравенств (324) и (325) следует

(326) $$\mathcal{M}_9 \ll v'RP^{\varepsilon}\,.$$

В силу (321), (322) и (326) имеем

(327) $$\mathcal{M}_7 \ll \big(G_2(\delta T R^2)^{-1} + v'R\big)P^{\varepsilon}\,.$$

Пользуясь (314) – (320) и (327), получим

(328) $$\mathcal{M}_1 \ll \big(\,(G_2^{1/2}\Delta B_1 B_2 R^2)^{-1} \,+\, |v|\,R\,G_2^{-3/2}\,\big)P^{3\varepsilon}\,.$$

Чтобы оценить $E(G_1, G_2)$, используем (311), (313) и (328). Имеем

(329) $$E(G_1, G_2) \ll E^{(1)} + E^{(2)},$$

где $E^{(j)}$, $j = 1, 2$, являются вкладами к $E(G_1, G_2)$ из первого, соответственно второго слагаемого в правой части (328). В силу (302), (311), (313) и (328) имеем

(330) $$E^{(1)} \ll P^{3\varepsilon} R^{-2} E^{\#}(G_1, G_2)\,.$$

Воспользуемся теперь (308) и получим

(331) $$E^{(1)} \ll G_1 G_2 R^3 D^6 Q P^{15\varepsilon}.$$

Рассмотрим $E^{(2)}$. В силу (311), (313) и (328) имеем

(332) $$E^{(2)} \ll P^{4+3\varepsilon}\, R^2\, G_1^{-1/2}\, G_2^{-3/2} \sum_{(\mathcal{D})} d_1 d_2 d_3\, \mathcal{T}^*\,,$$

где

$$\mathcal{T}^* = \sum_{\substack{\Delta v \le 4R^2 Q^2 P^{\varepsilon-2} \\ \Delta, v > 0}} \Delta^{-1} v \sum_{B_1, B_2\ (304)} (B_1 B_2)^{-1/2}.$$

По аналогии с (305) имеем

(333) $$\mathcal{T}^* \ll \sum_{\substack{\Delta v \le 4R^2 Q^2 P^{\varepsilon-2} \\ \Delta, v > 0}} \Delta^{-1} v\, \big(vR^{-2}(\Delta G_1 G_2)^{-1} P^{2-\varepsilon}\big)^{-1/2}\, \mathcal{T}_1^2\,,$$

где $\mathcal{T}_1$ определено через (306). Используя (307), (332) и (333), получим

$$E^{(2)} \ll R^6\, Q^3\, G_2^{-1}\, D^6\, P^{10\varepsilon}\,. \tag{334}$$

Из (310), (329), (331) и (334) следует оценка

$$E(G_1, G_2) \ll \Big(G_1 G_2 R^3 Q + R^6 Q^3 \big(\max(G_1, G_2) \big)^{-1} \Big)\, D^6 P^{15\varepsilon}. \tag{335}$$

Вывод. Пусть H – параметр, который выберем ниже. Если $G_1, G_2 \le H$, то пользуемся первой оценкой (309) для $E(G_1, G_2)$. Если $H < \max(G_1, G_2) \le Q$, то воспользуемся второй оценкой, данной через (335). Получим

$$E(G_1, G_2) \ll \Big(R^5 H^2 Q + R^3 Q^3 + R^6 H^{-1} Q^3 \Big)\, D^6 P^{15\varepsilon}. \tag{336}$$

Выберем $H = R^{1/3} Q^{2/3}$ и воспользуемся (292) и (336). Получим оценку

$$E^* \ll (R^3 Q^3 + R^{17/3} Q^{7/3})\, D^6 P^{16\varepsilon}. \tag{337}$$

Осталось привести доказательство леммы.
Доказательство Леммы 48. Если $\langle g_1, g_2, b_1, b_2 \rangle \in \mathfrak{L}$, то числа $q_1 = g_1 b_1,\ q_2 = g_2 b_2$ удовлетворяют условия (285), так что $\langle g_1 b_1, g_2 b_2 \rangle \in \widetilde{\mathfrak{L}}$ и изображение $\mathfrak{f}$ корректно определено.

Докажем, что $\mathfrak{f}$ ин?ективно. Предположим, что для некоторых

$$\langle g_1, g_2, b_1, b_2 \rangle\,,\ \langle {g_1}', {g_2}', {b_1}', {b_2}' \rangle \in \mathfrak{L}$$

имеем

$$g_1 b_1 = {g_1}' {b_1}'\,, \qquad g_2 b_2 = {g_2}' {b_2}'\,. \tag{338}$$

Предположим, что $(g_1, b_1') > 1$. Тогда $\pi \mid g_1, \pi \mid b_1'$ для некоторого простого числа π. В силу того, что $\pi \nmid 2 d_1 d_2 d_3$, имеем $\pi \mid \rho_{\mathbf{d}}({b_1}')$ и, поскольку $\rho_{\mathbf{d}}({b_1}') = \rho_{\mathbf{d}}({b_2}')$, то выполнено $\pi \mid \rho_{\mathbf{d}}({b_2}')$. Следовательно $\pi \mid {b_2}'$. Но тогда, в силу второго равенства в (338), $\pi \mid g_2 b_2$, а ето невозможно, потому что $(g_1, g_2 b_2) = 1$. Итак, наше предположение ведет к противоречию. Тогда имеем $(g_1, b_1') = 1$ и, аналогично, $(g_1', b_1) = 1$. Следовательно, используя первое равенство в (338), получим, что $g_1 = {g_1}'$ и $b_1 = {b_1}'$.

Аналогично проверяем, что $g_2 = {g_2}'$ и $b_2 = {b_2}'$. Ин?ективность $\mathfrak{f}$ доказана.

Теперь докажем, что $\mathfrak{f}$ сюррективно. Пусть $\langle q_1, q_2 \rangle \in \widetilde{\mathfrak{L}}$. Определим числа g_1, g_2 равенствами

$$g_i = \prod_{\substack{\pi^l \| q_i \\ \pi \nmid 2 d_1 d_2 d_3 (q_1, q_2)}} \pi^l\,, \qquad i = 1, 2 \tag{339}$$

(здесь π обозначает простое число). Далее, определим b_1, b_2 через

$$q_i = g_i b_i\,, \qquad i = 1, 2\,. \tag{340}$$

Установим, что $\langle g_1, g_2, b_1, b_2 \rangle \in \mathfrak{L}$. Для етого нужно проверить условия (285). Все из них, кроме $\rho_{\mathbf{d}}(b_1) = \rho_{\mathbf{d}}(b_2)$, очевидно выполнены. Проверим и ето условие.

Пусть π – простое число и $\pi \mid \rho_{\mathbf{d}}(b_1)$. Тогда $\pi \mid b_1$ и $\pi \nmid 2d_1d_2d_3$. Если предположить, что $\pi \nmid b_2$, то $\pi \nmid q_2$, потому что из условия $(g_2, b_1) = 1$ следует, что $\pi \nmid g_2$. Но тогда $\pi \nmid (q_1, q_2)$, а ето противоречит определению b_1. Следовательно $\pi \mid b_2$ и, в силу того, что $\pi \nmid 2d_1d_2d_3$, имеем $\pi \mid \rho_{\mathbf{d}}(b_2)$.

Аналогично устанавливаем, что каждый простой делитель числа $\rho_{\mathbf{d}}(b_2)$ делит также $\rho_{\mathbf{d}}(b_1)$. Так как ети числа бесквадратны, то имеем $\rho_{\mathbf{d}}(b_1) = \rho_{\mathbf{d}}(b_2)$.

Сюрреактивность нашего изображения установлена и лемма доказана.

$\square$

3.4.7. *Оценка для* $\mathcal{E}_1$.

Приведем основные результаты из § 3.4. Уравнение (157) утверждает, что

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1^{(1)} - 2\mathcal{E}_1^{(2)} + \mathcal{E}_1^{(3)}.$$

Величины в правой части етой формулы, удовлетворяют, соответственно, асимптотическим формулам (184), (192) и (204):

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1^{(1)} &= \mathcal{U}_1 + \mathcal{O}(\mathcal{V}^*) + \mathcal{O}(1),\\ \mathcal{E}_1^{(2)} &= \mathcal{U}_1 + \mathcal{O}(\mathcal{V}^*) + \mathcal{O}(D^*) + \mathcal{O}(1),\\ \mathcal{E}_1^{(3)} &= \mathcal{U}_1 + \mathcal{O}(D^*) + \mathcal{O}(E^*) + \mathcal{O}(1).\end{aligned}$$

Остатки в етих формулах удовлетворяют, соответственно, (260), (261) и (337):

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^* &\ll (P^3R + P^2R^5)D^6P^{15\varepsilon},\\ D^* &\ll P^{4+5\varepsilon}Q^{-1}D^3R,\\ E^* &\ll (R^3Q^3 + R^{17/3}Q^{7/3})\, D^6P^{16\varepsilon}.\end{aligned}$$

Тогда имеем

$$\mathcal{E}_1 \ll \big(P^3D^6R + P^2D^6R^5 + P^4Q^{-1}D^3R + Q^3D^6R^3 + Q^{7/3}D^6R^{17/3}\big)\,P^{20\varepsilon}. \tag{341}$$

3.5. **Конец доказательства Предложения 1.**

Рассмотрим сумму $\mathcal{E}(D,Q)$, определенную через (68). Из (112) и (115) следует, что

$$\mathcal{E}(D,Q) \ll \big(PR^{-2}|\mathcal{E}_1| + PR^{-1}\mathcal{E}_2\big)^{1/2}P^{\varepsilon}.$$

Чтобы оценить $\mathcal{E}_2$, воспользуемся (155):

$$\mathcal{E}_2 \ll \big(P^3D^6 + P^4D^3Q^{-1}\big)P^{9\varepsilon}.$$

Для $\mathcal{E}_1$ воспользуемся оценкой (341). Получим

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(D,Q) \ll \Big(&P^2D^3R^{-1/2} + P^{3/2}D^3R^{3/2} + P^{5/2}Q^{-1/2}D^{3/2}R^{-1/2}\\ &+ P^{1/2}Q^{3/2}D^3R^{1/2} + P^{1/2}Q^{7/6}D^3R^{11/6}\Big)P^{12\varepsilon}.\end{aligned} \tag{342}$$

Параметры D, Q, R удовлетворяют условиям (110), (111), (113), (156) и (280):

$$\begin{aligned} Q &\le P^{1-\varepsilon}\,, \\ D &= P^{\alpha_0}\,, \qquad \text{где} \qquad \alpha_0 \in (0,1)\,, \\ R &= P^{\alpha_1}\,, \qquad \text{где} \qquad \alpha_1 \in (0,1)\,, \\ D &\le R^{1/6}P^{-10\varepsilon}\,, \\ P^{1+20\varepsilon}D^3R^{-1} &\le Q\,, \\ Q &\le P^{1-\varepsilon}R^{-1/2}\,. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что оптимальный выбор (с точностью до степени P^{ε}) этих параметров является

$$R = P^{5/23}\,, \qquad Q = P^{20/23}\,, \qquad D = P^{2/69\,-\,10\varepsilon}\,. \tag{343}$$

Из (342) и (343) следует

$$\mathcal{E}(D,Q) \ll P^{2-\varepsilon}\,.$$

Предложение 1 доказано.

$\square$

3.6. **Доказательство Предложения 2.**

3.6.1. *Начало доказательства.*

Обозначим, для краткости, $\beta(\mathbf{d}) = \beta_1(d_1)\beta_2(d_2)\beta_3(d_3)$ и рассмотрим сумму

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{(\mathcal{D})} \beta(\mathbf{d})\, \mathcal{L}_{\mathbf{d}}(N)\,. \tag{344}$$

В силу (59), (67), (71) и Предложения 1 имеем

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{(\mathcal{D})} \beta(\mathbf{d}) \sum_{p\le P} \Omega_{\mathbf{d}}(N-p^2) = \mathcal{H}_2 + \mathcal{O}(P^{2-\varepsilon})\,, \tag{345}$$

где

$$\mathcal{H}_2 = \sum_{(\mathcal{D})} \beta(\mathbf{d}) \sum_{p\le P} \mathcal{M}_{\mathbf{d},Q}(N-p^2) \tag{346}$$

и где $\mathcal{M}_{\mathbf{d},Q}$ определено через (66), а Q удовлетворяет (69). Воспользуемся (66) и поменяем порядок суммирования. Имея ввиду, что, в силу Леммы 39, простые числа $p \le P/4$ не имеют вклада к $\mathcal{H}_2$, получим

$$\mathcal{H}_2 \;=\; P \sum_{(\mathcal{D})} \frac{\beta(\mathbf{d})}{d_1d_2d_3} \sum_{q\le Q} q^{-3} \sum_{a(q)^*} S_{\mathbf{d}}(q,a) \sum_{P/4<p\le P} H\Big(1-\frac{p^2}{N}\Big)\, e_q(a(p^2-N))\,.$$

Далее, используя Лемму 24, получим

$$\mathcal{H}_2 = -P\int_{P/4}^{P} \mathcal{B}(x)\, \frac{d}{dx}\Big(\frac{H\big(1-x^2N^{-1}\big)}{\log x}\Big)\, dx\,, \tag{347}$$

где

$$\mathcal{B}(x) = \sum_{(\mathcal{D})} \frac{\beta(\mathbf{d})}{d_1 d_2 d_3} \sum_{q \le Q} q^{-3} \sum_{a(q)^*} S_{\mathbf{d}}(q,a)\, \mathcal{Z}(x) \tag{348}$$

и где

$$\mathcal{Z}(x) = \sum_{P/4 < p \le x} (\log p)\ e_q(a(p^2 - N))\,. \tag{349}$$

Рассмотрим сумму $\mathcal{Z}(x)$. Разделим ее на подсуммы в соответствии с вычетом числа p по модулю q. Очевидно, что вычеты m, для которых $(m,q) > 1$, не имеют вклада в $\mathcal{Z}(x)$. Следовательно

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(x) &= \sum_{m(q)^*} e_q(a(m^2 - N))\big(\theta(x,q,m) - \theta(P/4,q,m)\big) \\ &= \varphi(q)^{-1}\big(x - P/4\big)\, e_q(-aN)\, T(q,a) \\ &\quad + \sum_{m(q)^*} e_q(a(m^2 - N))\big(\Delta(x,q,m) - \Delta(P/4,q,m)\big)\,, \end{aligned} \tag{350}$$

где $T(q,a)$ и $\Delta(x,q,m)$ определены, соответственно, через (3) и (89).

Из (348) – (350) следует, что

$$\mathcal{B}(x) = \big(x - P/4\big)\,\mathcal{B}_0 + \mathcal{C}(x) - \mathcal{C}(P/4)\,, \tag{351}$$

где

$$\mathcal{C}(x) = \sum_{(\mathcal{D})} \frac{\beta(\mathbf{d})}{d_1 d_2 d_3} \sum_{q \le Q} q^{-3} \sum_{a(q)^*} S_{\mathbf{d}}(q,a) \sum_{m(q)^*} e_q(a(m^2 - N))\,\Delta(x,q,m)\,, \tag{352}$$

$$\mathcal{B}_0 = \sum_{(\mathcal{D})} \frac{\beta(\mathbf{d})}{d_1 d_2 d_3} \sum_{q \le Q} h_{\mathbf{d}}(q,N) \tag{353}$$

и где $h_{\mathbf{d}}(q,N)$ определено через (61).

3.6.2. *Оценка для суммы $\mathcal{C}(x)$.*

Рассмотрим сумму $\mathcal{C}(x)$. Мы ожидаем, что ею можно пренебречь, потому что она зависит от выражения $\Delta(x,q,m)$. Оно, в силу Леммы 17, мало в среднем по отношению к q и m. Точнее, мы докажем, что для любой, сколь угодно большой постоянной $M > 0$ имеем

$$\mathcal{C}(x) \ll P(\log P)^{-M} \qquad \text{равномерно по} \qquad x \in [P/4, P]\,. \tag{354}$$

Ясно, что

$$\mathcal{C}(x) = \sum_{q \le Q} \sum_{m(q)^*} \Gamma(q,m)\,\Delta(x,q,m)\,,$$

где

$$\Gamma(q,m)=q^{-3}\sum_{(\mathcal{D})}\frac{\beta(\mathbf{d})}{d_1d_2d_3}\,\zeta_{\mathbf{d}}(q,m) \tag{355}$$

и где

$$\zeta_{\mathbf{d}}(q,m)=\sum_{a(q)^*}S_{\mathbf{d}}(q,a)\,e_q(a(m^2-N))\,. \tag{356}$$

Легко увидеть, что величина $\Gamma(q,m)$ всегда действительна. Используя Лемму 1, получим

$$|\mathcal{C}(x)|^2\le L_1\,L_2\,, \tag{357}$$

где

$$L_1=\sum_{q\le Q}\sum_{m(q)^*}\Delta(x,q,m)^2\,, \tag{358}$$

$$L_2=\sum_{q\le Q}\sum_{m(q)^*}\Gamma(q,m)^2\,. \tag{359}$$

В силу Леммы 17, для любой постоянной $M>0$ имеем

$$L_1\ll P^2\,(\log P)^{-M}\,. \tag{360}$$

Рассмотрим сумму L_2. Мы докажем, что

$$L_2\ll(\log P)^{2^{16}}\,. \tag{361}$$

Потом воспользуемся (357) и (360) и получим оценку (354).

Займемся доказательством (361). Из (355) и (356) следует, что

$$L_2=\sum_{\substack{d_1,d_2,d_3\le D\\ h_1,h_2,h_3\le D}}\frac{\beta(\mathbf{d})\,\beta(\mathbf{h})}{d_1d_2d_3\,h_1h_2h_3}\sum_{q\le Q}\lambda(q,\mathbf{d},\mathbf{h})\,, \tag{362}$$

где

$$\lambda(q,\mathbf{d},\mathbf{h})=q^{-6}\sum_{m(q)^*}\zeta_{\mathbf{d}}(q,m)\,\zeta_{\mathbf{h}}(q,m)\,. \tag{363}$$

Используя Лемму 3 и Лемму 20 (i), устанавливаем, что функция λ мультипликативна по отношению к q.

Рассмотрим выражение, находяшееся в правой части (362). В силу (72), в нем имеют вклад только векторы $\mathbf{d}$ и $\mathbf{h}$ с нечетными координатами. В силу (356), (363) и Леммы 20 (vi), для таких $\mathbf{d}$ и $\mathbf{h}$ имеем

$$\lambda(2^l,\mathbf{d},\mathbf{h})\ll 1\,. \tag{364}$$

Рассмотрим $\lambda(p^l,\mathbf{d},\mathbf{h})$, где $p>2$ – простое число. Предположим, что

$$p^{\alpha_i}\parallel d_i\,,\qquad p^{\beta_i}\parallel h_i\,,\qquad \nu_i=\min(l,2\alpha_i)\,,\qquad \mu_i=\min(l,2\beta_i)\,. \tag{365}$$

Используя (4) и Лемму 20 (ii), (iv), получим

$$\zeta_{\mathbf{d}}(p^l,m)=\zeta^*_{\mathbf{d}}(p^l,m)\,\prod_{i=1}^{3}\Big(\,p^{\nu_i}\,S(p^{l-\nu_i},1)\Big)\,, \tag{366}$$

где

$$\zeta^*_{\mathbf{d}}(p^l,m)=\begin{cases} c_{p^l}(m^2-N) & \text{если}\quad \nu_1+\nu_2+\nu_3\equiv l\ (2)\,,\\ \\ \sum_{a(p^l)^*}\left(\frac{a}{p}\right)e_{p^l}(a(m^2-N)) & \text{если}\quad \nu_1+\nu_2+\nu_3\not\equiv l\ (2)\,.\end{cases} \tag{367}$$

Из (363), (365) – (367) и Леммы 20 (v) следует

$$|\lambda(p^l,\mathbf{d},\mathbf{h})|\le p^{-6l}\Big(\prod_{i=1}^{3}p^{l+\frac12(\nu_i+\mu_i)}\Big)\sum_{m(p^l)^*}|\,\zeta^*_{\mathbf{d}}(p^l,m)\,\zeta^*_{\mathbf{h}}(p^l,m)\,| \tag{368}$$

$$\le p^{-3l+\frac12(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\mu_1+\mu_2+\mu_3)}\,(T_1+T_2)\,,$$

где

$$T_1=\sum_{m(p^l)^*}|\,c_{p^l}(m^2-N)\,|^2\,, \tag{369}$$

$$T_2=\sum_{m(p^l)^*}\Big|\sum_{a(p^l)^*}\Big(\frac{a}{p}\Big)e_{p^l}(a(m^2-N))\Big|^2\,. \tag{370}$$

Ниже докажем, что

$$T_1\le 3p^{2l}\,,\qquad T_2\le 3p^{2l}\,. \tag{371}$$

Из етих неравенств и (368) следует, что для каждого простого $p>2$ и для каждого $l\in\mathbb{N}$ имеем

$$|\lambda(p^l,\mathbf{d},\mathbf{h})|\le 6p^{-l+\frac12(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\mu_1+\mu_2+\mu_3)}\,. \tag{372}$$

Тогда из (365) и (372) следует, что если $(m,2)=1$, то

$$\lambda(m,\mathbf{d},\mathbf{h})\ll\frac{6^{\nu(m)}}{m}\,\prod_{i=1}^{3}(m,d_i)(m,h_i)\,. \tag{373}$$

Следовательно, используя (364) и (373), получим

$$(374)\quad \sum_{q\le Q}\lambda(q,\mathbf{d},\mathbf{h})\ll\sum_{2^l\le Q}\sum_{\substack{m\le Q\\(m,2)=1}}\lambda(2^lm,\mathbf{d},\mathbf{h})\ll\sum_{2^l\le Q}\sum_{\substack{m\le Q\\(m,2)=1}}\frac{6^{\nu(m)}}{m}\prod_{i=1}^{3}(m,d_i)(m,h_i)$$

$$\ll(\log P)\sum_{q\le Q}\frac{6^{\nu(q)}}{q}\prod_{i=1}^{3}(q,d_i)(q,h_i)\,.$$

Теперь воспользуемся (73), (362), (374), Леммой 7 (ii), (iv) и Леммой 8 (i) и получим

$$L_2\ll\,(\log P)\sum_{q\le Q}\frac{6^{\nu(q)}}{q}\Big(\sum_{d\le D}\frac{\tau(d)(q,d)}{d}\Big)^6\ll\,(\log P)^{13}\sum_{q\le Q}\frac{6^{\nu(q)}}{q}\,\tau^{12}(q)$$

$$\ll\,(\log P)^{13}\sum_{q\le Q}\frac{\tau^{15}(q)}{q}\,\ll\,(\log P)^{2^{16}}\,.$$

Осталось доказать, что если $p>2$ простое и $l\in\mathbb{N}$, то выполнены неравенства (371). Тогда оценка (361) будет устанавлена и, следовательно, имея ввиду (357) и (360), будем иметь (354).

Рассмотрим T_1. Используя формулу для суммы Рамануджана, данную в Лемме 23, получим

$$T_1=\sum_{0\le h\le l}\sum_{\substack{m(p^l)^*\\(p^l,m^2-N)=p^h}}\Big|\frac{\varphi(p^l)}{\varphi(p^{l-h})}\mu(p^{l-h})\Big|^2\,\le\,p^{2l-2}\sum_{\substack{m(p^l)^*\\m^2\equiv N\ (p^{l-1})}}1\,+\,p^{2l}H_N(p^l)$$

$$\le p^{2l-1}H_N(p^{l-1})+p^{2l}H_N(p^l)\,,$$

где $H_N(q)$ определено в Лемме 6. Используя ету Лемму устанавливаем неравенства (371) для величины T_1.

Для рассмотрения T_2 нам нужна следующая лемма, доказательство которой приведено в конце параграфа.

Лемма 49. *Пусть $l,n\in\mathbb{N}$ и $p>2$ – простое число. Тогда имеем*

$$(375)\qquad \sum_{a(p^l)^*}\left(\frac{a}{p}\right)e_{p^l}(an)=\begin{cases}p^{l-1}\,S(p,1)\left(\frac{n/p^{l-1}}{p}\right) & \textit{если}\ \ p^{l-1}\parallel n\,,\\[2ex] 0 & \textit{в противном случае}\ .\end{cases}$$

□

В силу Леммы 6, Леммы 20 (v) и Леммы 49 имеем

$$T_2\,\le\sum_{\substack{m(p^l)^*\\(p^l,m^2-N)=p^{l-1}}}|p^{l-1}S(p,1)|^2\le p^{2l-1}\sum_{\substack{m(p^l)^*\\(p^l,m^2-N)=p^{l-1}}}1\,\le\,p^{2l}H_N(p^{l-1})\,\le\,2p^{2l}\,.$$

Неравенства (371) установлены и, таким образом, доказательство (354) закончено.
Доказательство Леммы 49. Обозначим сумму в левой части (375) через $G_{p,l}(n)$. Пусть $n = p^\nu m$, где $(m,p) = 1$. Если $\nu \ge l$, то $G_{p,l}(n) = \sum_{a(p^l)^*} \left(\frac{a}{p}\right) = 0$. В случае $\nu = l-1$ формула (375) следует из Леммы 19 (ii), (iii). Рассмотрим, наконец, случай $\nu \le l-2$. Тогда имеем

$$G_{p,l}(n) = \sum_{a(p^l)} \left(\frac{a}{p}\right) e_{p^{l-\nu}}(am) = \sum_{b=1}^{p} \sum_{c=0}^{p^{l-1}-1} \left(\frac{b+pc}{p}\right) e_{p^{l-\nu}}\big((b+pc)\,m\big)$$

$$= \sum_{b=1}^{p} \left(\frac{b}{p}\right) e_{p^{l-\nu}}(bm) \sum_{c=0}^{p^{l-1}-1} e_{p^{l-\nu-1}}(cm) = 0\,,$$

потому что, в силу Леммы 4 (i), внутренняя сумма равна нулю.

$\square$

3.6.3. *Конец доказательства Предложения 2.*

Рассмотрим сумму $\mathcal{B}_0$, определенную через (353). Заменим ее суммой

$$\mathcal{B}_1 = \sum_{(\mathcal{D})} \frac{\beta(\mathbf{d})}{d_1 d_2 d_3} \Sigma_0(\mathbf{d}, N)\,, \tag{376}$$

где $\Sigma_0(\mathbf{d}, N)$ определено через (62). Чтобы оценить ошибку, воспользуемся (69), (103), Лемму 7 (vi) и Лемму 8 (iv) и получим

$$\sum_{q>Q} |h_{\mathbf{d}}(q,N)| \ll (d_1 d_2 d_3)^2 \sum_{q>Q} \frac{(q,N)}{q^{2-\varepsilon}} \ll D^6\, Q^{-1}\, P^{2\varepsilon} \ll P^{-1/5}\,. \tag{377}$$

Следовательно

$$\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_1 + \mathcal{O}(P^{-\varepsilon})\,. \tag{378}$$

Из (351), (354) и (378) следует, что равномерно по $x \in [P/4, P]$ имеем

$$\mathcal{B}(x) \;=\; \big(x \;-\; P/4\big)\,\mathcal{B}_1 \;+\; \mathcal{O}\big(\,P\,(\log P)^{-M}\,\big)\,, \tag{379}$$

где $M > 0$ – любая, сколь угодно большая, постоянная. В формуле (347) заменим $\mathcal{B}(x)$ выражением в правой части (379). Остаточный член имеет вклад

$$\ll P^2(\log P)^{-M} \int_{P/4}^{P} \left| \frac{d}{dx} \Big(\frac{H(1 - x^2 N^{-1})}{\log x} \Big) \right| dx$$

$$\ll P^2(\log P)^{-M} \int_{P/4}^{P} \left(\frac{|H(1 - x^2 N^{-1})|}{x \log^2 x} + \frac{|H'(1 - x^2 N^{-1})|\, x\, N^{-1}}{\log x} \right) dx$$

$$\ll P^2(\log P)^{-M-1}\,.$$

Интегрируя по частям, получим, что вклад к $\mathcal{H}_2$ из главного члена асимптотической формулы (379) равен $\mathcal{N}_0\,\mathcal{B}_1$, где $\mathcal{N}_0$ определено через (65). В силу (345), для любой постоянной $M>0$ имеем

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{N}_0\,\mathcal{B}_1 + \mathcal{O}\big(P^2(\log P)^{-M}\big)\,. \tag{380}$$

Доказательство Предложения 2 является следствием из (74), (344), (376) и (380).

□

3.7. **Доказательство Теоремы 1.**

Рассмотрим сумму

$$\mathfrak{F} = \sum_{\substack{p^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=N\\ (x_1x_2x_3,\mathfrak{P})=1}} \omega(\mathbf{x})\,,$$

где

$$\mathfrak{P} = \prod_{2<p<z_1} p\,, \qquad z_1 = P^{\alpha} \tag{381}$$

и где $\alpha\in(0,1)$ – постоянная, которую мы выберем позже. Используя (56), (58) и условия $N\equiv 4\ (24)$, легко увидеть, что вклад в $\mathfrak{F}$ имеют только слагаемые, для которых $(p\,x_1x_2x_3,2)=1$.

Предположим, что

$$\mathfrak{F} \gg P^2(\log P)^{-4}\,. \tag{382}$$

Тогда существуют постоянные $c_0>0$ и $N_0>0$ такие, что если $N\in\mathbb{N}$, $N>N_0$ и $N\equiv 4\ (24)$, то существуют не менее чем $c_0P^2(\log P)^{-4}$ четверки чисел p,x_1,x_2,x_3, удовлетворяющих (54) и таких, что p – простое и $(x_1x_2x_3,2\mathfrak{P})=1$. С одной стороны, каждый простой делитель чисел x_i не меньше чем P^{α}, а с другой – имеем $x_i\le P$. Следовательно, каждое x_i является почти простым числом порядка $[\alpha^{-1}]$. Так что, наша цель – установить (382) с возможно наибольшим α. Для етого мы применим метод векторного решета.

Нам удобнее просеивать по малым простым числам отдельно. Определим

$$z_0 = (\log P)^{1000}\,, \qquad \mathfrak{P}_0 = \prod_{2<p<z_0} p\,, \qquad \mathfrak{P}_1 = \prod_{z_0\le p<z_1} p\,. \tag{383}$$

Используя Лемму 2, представим сумму $\mathfrak{F}$ в виде

$$\mathfrak{F} = \sum_{p^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=N} \omega(\mathbf{x})\,\Phi_1\,\Phi_2\,\Phi_3\,\Lambda_1\,\Lambda_2\,\Lambda_3\,, \tag{384}$$

где

$$\Phi_i = \sum_{k|(x_i,\mathfrak{P}_0)} \mu(k)\,, \qquad \Lambda_i = \sum_{l|(x_i,\mathfrak{P}_1)} \mu(l)\,.$$

Пусть

$$D_0 = P^{\varepsilon}\,, \qquad D_1 = P^{2/69-11\varepsilon}\,, \qquad D = D_0D_1\,. \tag{385}$$

Определим

$$s_0 = \frac{\log D_0}{\log z_0} = \frac{\varepsilon \log P}{1000 \log\log P}\,, \qquad s_1 = \frac{\log D_1}{\log z_1} = \Big(\frac{2}{69} - 11\varepsilon\Big)\,\alpha^{-1}\,. \tag{386}$$

Чтобы применить Лемму 31, нам нужны неравенства $s_0 > 2$ и $s_1 > 2$. Первое из них очевидно. Для того чтобы было верно и второе, предположим, что $\alpha < 1/69$ и возьмем ε достаточно близкое к нулю.

Рассмотрим функции Россера $\lambda_i^{\pm}(d)$ порядка D_i, где $i = 0, 1$. Определим

$$\Phi_i^{\pm} = \sum_{k|(x_i,\mathfrak{P}_0)} \lambda_0^{\pm}(k)\,, \qquad \Lambda_i^{\pm} = \sum_{l|(x_i,\mathfrak{P}_1)} \lambda_1^{\pm}(l)\,, \qquad i = 1,2,3\,. \tag{387}$$

Из (92) и Леммы 31 следует

$$|\lambda_i^{\pm}(d)| \le \mu^2(d)\,, \qquad \lambda_i^{\pm}(d) = 0 \quad \text{если} \quad d \ge D_i\,; \tag{388}$$

$$\Phi_i^{-} \le \Phi_i \le \Phi_i^{+}\,, \qquad \Lambda_i^{-} \le \Lambda_i \le \Lambda_i^{+}\,, \qquad i = 1,2,3\,. \tag{389}$$

В силу (389) и Леммы 30 имеем

$$\begin{aligned}\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3 \ge\ & \Phi_1^-\Phi_2^+\Phi_3^+\Lambda_1^+\Lambda_2^+\Lambda_3^+ + \Phi_1^+\Phi_2^-\Phi_3^+\Lambda_1^+\Lambda_2^+\Lambda_3^+ \\ & + \Phi_1^+\Phi_2^+\Phi_3^-\Lambda_1^+\Lambda_2^+\Lambda_3^+ + \Phi_1^+\Phi_2^+\Phi_3^+\Lambda_1^-\Lambda_2^+\Lambda_3^+ \\ & + \Phi_1^+\Phi_2^+\Phi_3^+\Lambda_1^+\Lambda_2^-\Lambda_3^+ + \Phi_1^+\Phi_2^+\Phi_3^+\Lambda_1^+\Lambda_2^+\Lambda_3^- \\ & -5\ \Phi_1^+\Phi_2^+\Phi_3^+\Lambda_1^+\Lambda_2^+\Lambda_3^+\,.\end{aligned} \tag{390}$$

Из (384) и (390) следует, что

$$\mathfrak{F} \ge \sum_{i=1}^{6} \mathfrak{F}_i - 5\mathfrak{F}_7\,, \tag{391}$$

где $\mathfrak{F}_i$, $1 \le i \le 7$, являются вкладами последовательных членов суммы в правой части (390). Очевидно $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_3$ и $\mathfrak{F}_4 = \mathfrak{F}_5 = \mathfrak{F}_6$.

Рассмотрим, например, $\mathfrak{F}_1$. Воспользуемся (385), (387), (388) и заменим порядок суммирования. Получим

$$\mathfrak{F}_1 = \sum_{d_1,d_2,d_3 \le D} \beta_1(d_1)\beta_2(d_2)\beta_3(d_3)\ \mathcal{L}_{\mathbf{d}}(N)\,,$$

где $\mathcal{L}_{\mathbf{d}}(N)$ определено через (71) и

$$\beta_1(d_1) = \sum_{\substack{k|\mathfrak{P}_0\,,\ l|\mathfrak{P}_1 \\ kl=d_1}} \lambda_0^-(k)\,\lambda_1^+(l)\,, \tag{392}$$

$$\beta_i(d_i) = \sum_{\substack{k|\mathfrak{P}_0\,,\ l|\mathfrak{P}_1 \\ kl=d_i}} \lambda_0^+(k)\,\lambda_1^+(l)\,, \qquad i = 2,3\,. \tag{393}$$

Очевидно, что величины β_i удовлетворяют (72) и (73). Следовательно, мы можем применить Предложение 2. Получим

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1^* + \mathcal{O}(P^2(\log P)^{-100})\,, \tag{394}$$

где

$$\mathfrak{F}_1^* = \sum_{d_1,d_2,d_3\le D} \frac{\beta_1(d_1)\beta_2(d_2)\beta_3(d_3)}{d_1d_2d_3}\,\mathcal{N}_0(N)\;\Sigma_0(\mathbf{d},N) \tag{395}$$

и где Σ_0 и $\mathcal{N}_0$ определены, соответственно, через (62) и (65).

Введем некоторые определения. Пусть

$$\xi_0 = \xi_0(N) = \prod_{p>2}(1 + H_0(p,N))\,, \tag{396}$$

$$\psi_\nu(l) = \psi_\nu(l,N) = \prod_{\substack{p|l\\ p>2}} \frac{1 + H_\nu(p,N)}{1 + H_0(p,N)}\,, \qquad \nu = 1,2,3\,, \tag{397}$$

где функции $H_\nu(p,N)$ определены через (97) – (100). Если $\mathbf{d} = \langle d_1, d_2, d_3\rangle \in \mathbb{N}^3$ – вектор с нечетными и бесквадратными коэффициентами, то определим

$$\mathfrak{R}(\mathbf{d},N) = \prod_{p\|d_1d_2d_3} \psi_1(p,N) \prod_{p^2\|d_1d_2d_3} \psi_2(p,N) \prod_{p^3\|d_1d_2d_3} \psi_3(p,N)\,. \tag{398}$$

Рассмотрим Σ_0. Используя (102) и (104), получим

$$\Sigma_0(\mathbf{d},N) = \xi_0(N)\,\mathfrak{R}(\mathbf{d},N)\,. \tag{399}$$

Далее, предположим, что $\mathbf{d} = \langle d_1, d_2, d_3\rangle$ и пусть $d_i = k_il_i$, где $k_i \mid \mathfrak{P}_0$ и $l_i \mid \mathfrak{P}_1$, $i = 1,2,3$. Тогда определим $\mathbf{k} = \langle k_1,k_2,k_3\rangle$, $\mathbf{l} = \langle l_1,l_2,l_3\rangle$ и, очевидно, имеем

$$\mathfrak{R}(\mathbf{d},N) = \mathfrak{R}(\mathbf{k},N)\,\mathfrak{R}(\mathbf{l},N)\,. \tag{400}$$

Определим

$$\mathcal{H}^\pm = \mathcal{H}^\pm(N) = \sum_{k_1,k_2,k_3|\mathfrak{P}_0} \frac{\lambda_0^\pm(k_1)\lambda_0^+(k_2)\lambda_0^+(k_3)}{k_1k_2k_3}\,\mathfrak{R}(\mathbf{k},N) \tag{401}$$

$$\mathcal{G}^\pm = \mathcal{G}^\pm(N) = \sum_{l_1,l_2,l_3|\mathfrak{P}_1} \frac{\lambda_1^\pm(l_1)\lambda_1^+(l_2)\lambda_1^+(l_3)}{l_1l_2l_3}\,\mathfrak{R}(\mathbf{l},N)\,. \tag{402}$$

Из (392), (393), (395) и (399) – (402) следует, что

$$\mathfrak{F}_1^* = \mathcal{N}_0\,\xi_0\,\mathcal{H}^-\,\mathcal{G}^+\,. \tag{403}$$

Из (394) и (403) получаем асимптотическую формулу для $\mathfrak{F}_1$. Мы изучаем другие суммы $\mathfrak{F}_i$ тем же способом и, используя аналоги (394) и (403), получаем

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_3 = \mathcal{N}_0\, \xi_0\, \mathcal{H}^-\, \mathcal{G}^+ + \mathcal{O}(P^2 (\log P)^{-100}) \,,$$

$$\mathfrak{F}_4 = \mathfrak{F}_5 = \mathfrak{F}_6 = \mathcal{N}_0\, \xi_0\, \mathcal{H}^+\, \mathcal{G}^- + \mathcal{O}(P^2 (\log P)^{-100}) \,,$$

$$\mathfrak{F}_7 = \mathcal{N}_0\, \xi_0\, \mathcal{H}^+\, \mathcal{G}^+ + \mathcal{O}(P^2 (\log P)^{-100}) \,.$$

Теперь применим (391) и получим

(404)
$$\mathfrak{F} \geq \mathcal{N}_0\, \xi_0\, (3\mathcal{H}^-\mathcal{G}^+ + 3\mathcal{H}^+\mathcal{G}^- - 5\mathcal{H}^+\mathcal{G}^+) + \mathcal{O}(P^2 (\log P)^{-100}) \,.$$

Из (386) следует, что $s_0 \to \infty$ при $N \to \infty$. Следовательно, в силу Леммы 32, функции Россера $\lambda_0^\pm$ ведут себя, в некотоым смысле, как функции Мебиуса и мы можем ожидать, что суммы $\mathcal{H}^\pm$ близки к выражению

(405)
$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0(N) = \Phi_0(\mathfrak{P}_0, N) \,, \qquad \text{где} \qquad \Phi_0(m, N) = \sum_{k_1, k_2, k_3 | m} \frac{\mu(k_1)\mu(k_2)\mu(k_3)}{k_1 k_2 k_3}\, \mathfrak{R}(\mathbf{k}, N) \,.$$

Точнее, имеет место асимптотическая формула Леммы 52.

Сначала сформулируем две вспомогательные леммы, вторую из которых будем использовать и в доказательстве Теоремы 2. Доказательства следующих трех лемм приведены в конце параграфа.

Лемма 50. *Имееют место оценки*

$$(i) \qquad \tau(l)^{-2} \leq \psi_1(l) \leq \tau(l)^2 \,, \qquad 0 \leq \psi_2(l),\, \psi_3(l) \leq \tau(l)^2 \,,$$

$$(ii) \qquad 1 \ll \xi_0 \ll \log\log P \,,$$

$$(iii) \qquad \mathfrak{R}(\mathbf{d}, N) \ll \tau^2(d_1)\, \tau^2(d_2)\, \tau^2(d_3) \,,$$

$$(iv) \qquad \mathcal{H}_0 \asymp (\log\log P)^{-3} \,,$$

$$(v) \qquad \mathcal{G}^\pm \ll (\log P)^{12} \,.$$

□

Лемма 51. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \geq 3$ *и* $\mathfrak{P}(\lambda) = \prod_{p<\lambda} p$ *. Тогда для суммы*

$$\mathcal{Q}(\lambda) = \sum_{l_1, l_2, l_3 | \mathfrak{P}(\lambda)} \tau^{10}(l_1)\, \tau^{10}(l_2)\, \tau^{10}(l_3) \sum_{\substack{h_i | \frac{\mathfrak{P}(\lambda)}{l_i} \\ i=1,2,3}} \frac{\tau^5([l_2h_2, l_3h_3])\, \tau^5([l_1h_1, l_3h_3])\, \tau^5([l_1h_1, l_2h_2])}{[l_2h_2, l_3h_3]\, [l_1h_1, l_3h_3]}$$

имеет место оценка

$$\mathcal{Q}(\lambda) \ll (\log \lambda)^{2^{100}} \,.$$

$\square$

Лемма 52. *Для сумм* $\mathcal{H}^{\pm}$ *имеем*

$$\mathcal{H}^{\pm} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{O}\big(\exp(-\sqrt{\log P})\big)\,.$$

$\square$

Продолжим с доказательством теоремы.

В силу (109), (404), Леммы 50 (ii), (v) и Леммы 52 имеем

$$\mathfrak{F} \geq \mathcal{N}_0\, \xi_0\, \mathcal{H}_0\, (3\mathcal{G}^- - 2\mathcal{G}^+) + \mathcal{O}(P^2 (\log P)^{-100})\,. \tag{406}$$

Нам осталось оценить снизу величину $3\mathcal{G}^- - 2\mathcal{G}^+$. Используя (402), получим

$$3\mathcal{G}^- - 2\mathcal{G}^+ \;=\; \sum_{l_1,l_2,l_3|\mathfrak{P}_1} \frac{(3\lambda_1^-(l_1) - 2\lambda_1^+(l_1))\,\lambda_1^+(l_2)\,\lambda_1^+(l_3)}{l_1 l_2 l_3}\,\mathfrak{R}(\mathbf{l}, N) \;=\; W_1 + W_1'\,, \tag{407}$$

где в W_1 суммирование ведется по $l_1, l_2, l_3 \mid \mathfrak{P}_1$, таких что

$$(l_1, l_2) = (l_1, l_3) = (l_2, l_3) = 1 \tag{408}$$

и где через W_1' обозначен вклад других слагаемых.

Следующая лемма утверждает, что величиной W_1' можно пренебречь. Доказательство приведено в конце параграфа.

Лемма 53. *Имеет место оценка*

$$W_1' \ll (\log P)^{-100}\,.$$

$\square$

Рассмотрим W_1. Если условие (408) выполнено, то имеем

$$\mathfrak{R}(\mathbf{l}, N) = \psi_1(l_1, N)\,\psi_1(l_2, N)\,\psi_1(l_3, N)\,,$$

где $\psi_1(l,N)$ определено через (397). Следовательно, используя Лемму 2, получим

(409)
$$W_1 = \sum_{l_1,l_2,l_3|\mathfrak{P}_1} \frac{(3\lambda_1^-(l_1) - 2\lambda_1^+(l_1))\,\lambda_1^+(l_2)\,\lambda_1^+(l_3)}{l_1l_2l_3}\,\psi_1(l_1,N)\psi_1(l_2,N)\psi_1(l_3,N)$$

$$\times \sum_{h_1|(l_2,l_3)} \mu(h_1) \sum_{h_2|(l_1,l_3)} \mu(h_2) \sum_{h_3|(l_1,l_2)} \mu(h_3)$$

$$= \sum_{h_1,h_2,h_3|\mathfrak{P}_1} \mu(h_1)\mu(h_2)\mu(h_3)$$

$$\times \sum_{\substack{l_1,l_2,l_3|\mathfrak{P}_1 \\ l_1\equiv 0([h_2,h_3]) \\ l_2\equiv 0([h_1,h_3]) \\ l_3\equiv 0([h_1,h_2])}} \frac{(3\lambda_1^-(l_1) - 2\lambda_1^+(l_1))\,\lambda_1^+(l_2)\,\lambda_1^+(l_3)}{l_1l_2l_3}\,\psi_1(l_1,N)\,\psi_1(l_2,N)\,\psi_1(l_3,N)$$

$$= W_2 + W_2',$$

где через W_2 обозначен вклад слагаемых, для которых $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ и где W_2' – вклад других слагаемых.

Следующая лемма утверждает, что мы можем пренебречь и величиной W_2'. Доказательство приведено в конце параграфа.

Лемма 54. *Имеет место оценка*

$$W_2' \ll (\log P)^{-100}.$$

□

Рассмотрим W_2. Очевидно

(410)
$$W_2 = (3\mathfrak{T}^- - 2\mathfrak{T}^+)\,(\mathfrak{T}^+)^2, \qquad \text{где} \qquad \mathfrak{T}^\pm = \sum_{l|\mathfrak{P}_1} \lambda_1^\pm(l)\,\frac{\psi_1(l,N)}{l}.$$

Воспользуемся Леммой 31, где $\mathcal{P} = \{\, p \geq z_0 \,\}$ и

$$\omega(p) = \begin{cases} \psi_1(p,N) & \text{если } p \geq z_0\,, \\ 0 & \text{в противном случае}\,. \end{cases}$$

Проверка условия (94) тривиальна. Чтобы доказать (95), берем логарифм произведения и используем затем формулу Тейлора и Лемму 16 (ii). Получим

$$\mathfrak{N} \le \mathfrak{T}^+ \le \mathfrak{N}\,\Big(\,F(s_1) + \mathcal{O}\big((\log P)^{-1/3}\big)\,\Big)\,, \tag{411}$$

$$\mathfrak{T}^- \ge \mathfrak{N}\,\Big(\,f(s_1) + \mathcal{O}\big((\log P)^{-1/3}\big)\,\Big)\,, \tag{412}$$

где F и f – функции линейного решета, которые определены в § 2.5, s_1 определено через (386) и

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(N) = \prod_{z_0 \le p < z_1} \Big(1 - \frac{\psi_1(p,N)}{p}\Big)\,.$$

Из (97), (98) и (397) видно, что $\psi_1(p,N) = 1 + \mathcal{O}(p^{-1})$. Тогда, в силу (381), (383) и Леммы 16 (iii) имеем

$$\mathfrak{N} \gg \prod_{z_0 \le p < z_1} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) \gg \frac{\log z_0}{\log z_1} \gg (\log P)^{-1}\,(\log\log P)\,. \tag{413}$$

Выберем $\alpha = 0.00983$. Тогда, если s_1 определено через (386) и $\varepsilon < 10^{-9}$, то мы можем воспользоваться (93) и получим, что

$$3f(s_1) - 2F(s_1) > 10^{-4}\,. \tag{414}$$

Из (410) – (414) следует

$$W_2 \,\ge\, \mathfrak{N}^3\,\Big(\,3f(s_1) - 2F(s_1) \,+\, \mathcal{O}\big((\log P)^{-1/3}\big)\,\Big) \,\gg\, (\log P)^{-3}\,(\log\log P)^3\,. \tag{415}$$

Воспользуемся (109), (406), (407), (409), (415), Леммой 50 (ii), (iv), Леммой 53 и Леммой 54. Получим, что если $\alpha = 0.00983$, то верна оценка (382). Нам осталось отметить, что ето α удовлетворяет $101 < \alpha^{-1} < 102$. Доказательство Теоремы 1 закончено.

□

Теперь приведем доказательства лемм настоящего параграфа.
Доказательство Леммы 50. Докажем (i). Используя (97) – (100) и (397), легко получить, что для каждого простого числа $p > 2$ имеем $4^{-1} \le \psi_1(p) \le 4$ и также $0 \le \psi_2(p),\ \psi_3(p) \le 4$. Тогда (i) следует из (397) и Леммы 7 (iv).

Установим (ii). В силу (97) и (396) имеем

$$\xi_0(N) \,\ge\, \prod_{p>2} \Big(1 - \frac{2}{p(p-1)}\Big) \,\gg\, 1\,.$$

С другой стороны, используя Лемму 7 $(viii)$, получим

$$\xi_0(N) \,\le\, \prod_{p\mid N} \Big(1 + \frac{1}{p}\Big) \prod_{p>2} \Big(\,1 + \frac{2}{p(p-1)}\,\Big) \ll \prod_{p\mid N} \Big(1 + \frac{1}{p}\Big) \ll \frac{N}{\varphi(N)} \ll \log\log P\,.$$

Таким образом (ii) доказано.

Рассмотрим (iii). Используя (398), Лемму 7 (iv), (v) и оценку (i) настоящей леммы, получим

(416) $$\mathfrak{R}(\mathbf{d}, N) \le \prod_{p|d_1d_2d_3} 4 \;\le\; \tau^2(d_1d_2d_3) \;\le\; \tau^2(d_1)\tau^2(d_2)\tau^2(d_3)\,.$$

Рассмотрим (iv). Легко проверить, что функция $\Phi_0(m,N)$, определенная через (405), является мультипликативной по отношению к m. Тогда, используя (383), получим

$$\mathcal{H}_0 = \prod_{2<p<z_0} \Phi_0(p,N)\,.$$

В силу (398) и (405) имеем

$$\Phi_0(p,N) = 1 - \frac{3\psi_1(p,N)}{p} + \frac{3\psi_2(p,N)}{p^2} - \frac{\psi_3(p,N)}{p^3}\,.$$

Из етой формулы, (97) – (100) и (397) следует, во первых, что $\Phi_0(p,N) > 0$ и, во вторых, что $\Phi_0(p,N) = 1 - 3p^{-1} + \mathcal{O}(p^{-2})$. Следовательно, используя (383) и Лемму 16 (iii), получим

$$\mathcal{H}_0 \asymp \prod_{3<p<z_0} \left(1-3p^{-1}\right) \prod_{3<p<z_0} \Big(\Phi_0(p,N)\,(1-3p^{-1})^{-1} \Big) \asymp \prod_{3<p<z_0} \left(1-3p^{-1}\right) \asymp (\log\log P)^{-3}\,.$$

Рассмотрим, наконец, (v). Используя (381), (383), (388), (402), (416), Лемму 9 и Лемму 16 (iii), получим

$$\mathcal{G}^{\pm} \ll \Big(\sum_{l|\mathfrak{P}_1} \frac{\tau^2(l)}{l} \Big)^3 \ll \prod_{p<z_1} \Big(1 + \frac{4}{p} \Big)^3 \ll (\log P)^{12}\,.$$

Лемма доказана.

□

Доказательство Леммы 51. Используя Лемму 7 (v) и Лемму 10, получим

(417)
$$\mathcal{Q}(\lambda) \ll \sum_{m_1,m_2,m_3\,|\,\mathfrak{P}(\lambda)} \tau^{11}(m_1)\,\tau^{11}(m_2)\,\tau^{11}(m_3) \frac{\tau^5([m_2,m_3])\,\tau^5([m_1,m_3])\,\tau^5([m_1,m_2])}{[m_2,m_3]\,[m_1,m_3]}$$

$$\ll \sum_{m_1,m_2,m_3\,|\,\mathfrak{P}(\lambda)} \tau^{30}(m_1)\,\tau^{30}(m_2)\,\tau^{30}(m_3) \frac{(m_2,m_3)\,(m_1,m_3)}{m_1\,m_2\,m_3^2}$$

$$= \sum_{m_1,m_2\,|\,\mathfrak{P}(\lambda)} \frac{\tau^{30}(m_1)\,\tau^{30}(m_2)}{m_1\,m_2}\; \mathcal{Q}^*_{m_1,m_2}(\lambda)\,,$$

где

$$\mathcal{Q}^*_{m_1,m_2}(\lambda) = \sum_{m\,|\,\mathfrak{P}(\lambda)} \frac{\tau^{30}(m)\,(m,m_1)\,(m,m_2)}{m^2}\,.$$

В силу определения величины $\mathfrak{P}(\lambda)$, Леммы 7 (iv), (v), Леммы 9 и Леммы 16 (iii), имеем

$$\mathcal{Q}^*_{m_1,m_2}(\lambda) = \prod_{p\,|\,\mathfrak{P}(\lambda)} \Big(1 + \frac{2^{30}\,(p,m_1)\,(p,m_2)}{p^2}\Big) \tag{418}$$

$$\ll 2^{31\,\nu((m_1,m_2))} \prod_{p<\lambda} \Big(1 + \frac{2^{30}}{p}\Big) \ll \tau^{20}(m_1)\,\tau^{20}(m_2)\,(\log\lambda)^{2^{30}}\,.$$

Из (417), (418), Леммы 9 и Леммы 16 (iii) следует

$$\mathcal{Q}(\lambda) \ll (\log\lambda)^{2^{30}} \sum_{m_1,m_2\,|\,\mathfrak{P}(\lambda)} \frac{\tau^{50}(m_1)\,\tau^{50}(m_2)}{m_1\,m_2} = (\log\lambda)^{2^{30}} \prod_{p<\lambda} \Big(1+\frac{2^{50}}{p}\Big)^2 \ll (\log\lambda)^{2^{100}}\,.$$

Лемма доказана.

$\square$

Доказательство Леммы 52. Рассмотрим, сначала, величину $\mathfrak{R}(\mathbf{k},N)$. Пусть $\mathbf{k} = \langle k_1,k_2,k_3\rangle$ – вектор с нечетными бесквадратными коеффициентами. Предположим, что $(k_1,k_2)=l_3$, $(k_1,k_3)=l_2$, $(k_2,k_3)=l_1$. Отметим, что в етом случае выполнено равенство $(k_1,k_2,k_3)=(l_1,l_2,l_3)$. Тогда, в силу (397), (398) и Леммы 50 (i) имеем

$$\mathfrak{R}(\mathbf{k},N) = \frac{\psi_1(k_1)\,\psi_1(k_2)\,\psi_1(k_3)\,\psi_1((k_1,k_2,k_3))^3}{\psi_1((k_1,k_2))^2\,\psi_1((k_1,k_3))^2\,\psi_1((k_2,k_3))^2}$$

$$\times\,\psi_2\Big(\frac{(k_1,k_2)}{(k_1,k_2,k_3)}\Big)\,\psi_2\Big(\frac{(k_1,k_3)}{(k_1,k_2,k_3)}\Big)\,\psi_2\Big(\frac{(k_2,k_3)}{(k_1,k_2,k_3)}\Big)\,\psi_3((k_1,k_2,k_3))$$

$$= \psi_1(k_1)\,\psi_1(k_2)\,\psi_1(k_3)\,\kappa(l_1,l_2,l_3)\,,$$

где

$$\kappa(h_1,h_2,h_3) = \frac{\psi_1((h_1,h_2,h_3))^3}{\psi_1(h_1)^2\,\psi_1(h_2))^2\,\psi_1(h_3)^2}$$

$$\times\,\psi_2\Big(\frac{h_1}{(h_1,h_2,h_3)}\Big)\,\psi_2\Big(\frac{h_2}{(h_1,h_2,h_3)}\Big)\,\psi_2\Big(\frac{h_3}{(h_1,h_2,h_3)}\Big)\,\psi_3((h_1,h_2,h_3))\,.$$

Отметим, что в силу Леммы 50 (i) имеем

$$0 \le \kappa(h_1,h_2,h_3) \le \tau^{10}(h_1)\,\tau^{10}(h_2)\,\tau^{10}(h_3)\,. \tag{419}$$

Рассмотрим, например, сумму $\mathcal{H}^+$. В силу последних формул, (401) и Леммы 2 имеем

$$\mathcal{H}^+ = \sum_{l_1,l_2,l_3|\mathfrak{P}_0} \kappa(l_1,l_2,l_3) \sum_{\substack{k_1,k_2,k_3|\mathfrak{P}_0\\(k_1,k_2)=l_3\,,\ (k_1,k_3)=l_2\\(k_2,k_3)=l_1}} \prod_{i=1}^{3} \frac{\lambda_0^+(k_i)\,\psi_1(k_i)}{k_i} \tag{420}$$

$$= \sum_{l_1,l_2,l_3|\mathfrak{P}_0} \kappa(l_1,l_2,l_3) \sum_{\substack{k_1,k_2,k_3|\mathfrak{P}_0\\k_1\equiv 0\,([l_2,l_3])\,,\ k_2\equiv 0\,([l_1,l_3])\\k_3\equiv 0\,([l_1,l_2])}} \Big(\prod_{i=1}^{3} \frac{\lambda_0^+(k_i)\,\psi_1(k_i)}{k_i} \Big)$$

$$\times \Big(\sum_{h_1|\left(\frac{k_2}{l_1},\frac{k_3}{l_1}\right)} \mu(h_1) \Big) \Big(\sum_{h_2|\left(\frac{k_1}{l_2},\frac{k_3}{l_2}\right)} \mu(h_2) \Big) \Big(\sum_{h_3|\left(\frac{k_1}{l_3},\frac{k_2}{l_3}\right)} \mu(h_3) \Big)$$

$$= \sum_{l_1,l_2,l_3|\mathfrak{P}_0} \kappa(l_1,l_2,l_3) \sum_{\substack{h_i|\frac{\mathfrak{P}_0}{l_i}\\i=1,2,3}} \mu(h_1)\,\mu(h_2)\,\mu(h_3)\,\mathcal{D}_1\,\mathcal{D}_2\,\mathcal{D}_3\,,$$

где

$$\mathcal{D}_i = \sum_{\substack{k|\mathfrak{P}_0\\k\equiv 0\,(\rho_i)}} \frac{\lambda_0^+(k)\,\psi_1(k)}{k}\,, \qquad i=1,2,3\,,$$

и где

$$\rho_1 = [l_2h_2, l_3h_3]\,, \qquad \rho_2 = [l_1h_1, l_3h_3]\,, \qquad \rho_3 = [l_1h_1, l_2h_2]\,. \tag{421}$$

Используя Лемму 32, сравним сумму $\mathcal{D}_i$ с суммой

$$\mathcal{E}_i = \sum_{\substack{k|\mathfrak{P}_0\\k\equiv 0\,(\rho_i)}} \frac{\mu(k)\,\psi_1(k)}{k}\,.$$

Из (386) и (397) следует, что все условия Леммы 32 выполнены. Действительно, в обозначениях Леммы 31, $\mathcal{P}$ представляет собой множество нечетных простых числах и $\omega(p) = \psi_1(p)$ для $p > 2$. Проверка условия (94) тривиальна. Чтобы доказать (95), берем логарифм произведения и используем затем формулу Тейлора и Лемму 16 (*ii*). Следовательно, в силу Леммы 32, имеем

$$\mathcal{D}_i = \mathcal{E}_i + \mathcal{O}\Big(\tau(\rho_i)\,\exp\big(-(\log P)^{0.9} \big) \Big)\,. \tag{422}$$

С другой стороны, в силу (383), (388), Леммы 7 (v), Леммы 9, Леммы 16 (iii) и Леммы 50 (i) имеем

$$|\mathcal{D}_i|\,,\ |\mathcal{E}_i| \ll \sum_{\substack{\delta|\mathfrak{P}_0\\ \delta\equiv 0\,(\rho_i)}} \frac{\tau^2(\delta)}{\delta} \le \frac{\tau^2(\rho_i)}{\rho_i}\sum_{l|\mathfrak{P}_0}\frac{\tau^2(l)}{l} \ll \frac{\tau^2(\rho_i)}{\rho_i}\log P\,. \tag{423}$$

Из (422) и (423) следует

(424)

$$\mathcal{D}_1\,\mathcal{D}_2\,\mathcal{D}_3 - \mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_2\,\mathcal{E}_3 = (\mathcal{D}_1 - \mathcal{E}_1)\,\mathcal{D}_2\,\mathcal{D}_3 + \mathcal{E}_1\,(\mathcal{D}_2 - \mathcal{E}_2)\,\mathcal{D}_3 + \mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_2\,(\mathcal{D}_3 - \mathcal{E}_3)$$

$$\ll \exp\big(-(\log P)^{0.8}\big)\,\tau^3(\rho_1)\,\tau^3(\rho_2)\,\tau^3(\rho_3)\,\Big(\frac{1}{\rho_1\rho_2} + \frac{1}{\rho_1\rho_3} + \frac{1}{\rho_2\rho_3}\Big)$$

В формуле (420) для $\mathcal{H}^+$ заменим произведение $\mathcal{D}_1\,\mathcal{D}_2\,\mathcal{D}_3$ произведением $\mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_2\,\mathcal{E}_3$ и обозначим новую сумму через $\mathcal{H}^*$. Пользуясь (419) – (421) и (424), получим

$$\mathcal{H}^+ - \mathcal{H}^* \ll \exp\big(-(\log P)^{0.8}\big)\,\mathcal{Q}(z_0)\,,$$

где величина $\mathcal{Q}(\lambda)$ определена в Лемме 51 и z_0 определено через (383). Тогда имеем

$$\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^* + \mathcal{O}\big(\exp(-\sqrt{\log P}\,)\big)\,.$$

Для рассмотрения суммы $\mathcal{H}^*$ мы проведем все ети действия в обратном порядке и получим

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H}_0 + \mathcal{O}\big(\exp(-\sqrt{\log P}\,)\big)\,.$$

Отсюда следует, что асимптотическая формула для $\mathcal{H}^+$ верна. Доказательство для $\mathcal{H}^-$ проводится тем же способом. Лемма доказана.

$\square$

Доказательство Леммы 53. Оценим W_1'. Используя определение $\mathfrak{P}_1$, данное через (383), получим, что если $l_i, l_j \mid \mathfrak{P}_1$ и $(l_i, l_j) > 1$, то $(l_i, l_j) \ge z_0$. Тогда, в силу (383), (385), (388), Леммы 7 (ii), (v), (vi), Леммы 8 (iii) и Леммы 50 (iii) имеем

$$W_1' \ll \sum_{\substack{l_1,l_2,l_3\le P\\ (l_1,l_2)\ge z_0}} \frac{\tau^2(l_1)\,\tau^2(l_2)\,\tau^2(l_3)}{l_1\,l_2\,l_3} \ll (\log P)^4 \sum_{z_0\le t\le P}\ \sum_{\substack{l_1,l_2\le P\\ l_1,l_2\equiv 0\,(t)}} \frac{\tau^2(l_1)\,\tau^2(l_2)}{l_1\,l_2}$$

$$\ll (\log P)^4 \sum_{z_0\le t\le P} \frac{\tau^4(t)}{t^2} \sum_{r_1,r_2\le Pt^{-1}} \frac{\tau^2(r_1)\,\tau^2(r_2)}{r_1\,r_2} \ll (\log P)^{12} \sum_{z_0\le t} t^{-3/2}$$

$$\ll (\log P)^{-100}\,.$$

Лемма доказана.

$\square$

Доказательство Леммы 54. Рассмотрим W_2'. Если $h_i \mid \mathfrak{P}_1$ и $h_i > 1$, то $h_i \geq z_0$. Тогда, используя (381), (383), (388), Лемму 7 (v), Лемму 9, Лемму 10, Лемму 16 (iii) и Лемму 50 (i), получим

$$W_2' \ll \sum_{\substack{h_1,h_2,h_3|\mathfrak{B}_1 \\ h_1\geq z_0}} \sum_{\substack{l_1,l_2,l_3|\mathfrak{B}_1 \\ l_1\equiv 0\,([h_2,h_3]) \\ l_2\equiv 0\,([h_1,h_3]) \\ l_3\equiv 0\,([h_1,h_2])}} \frac{\tau^2(l_1)\,\tau^2(l_2)\,\tau^2(l_3)}{l_1\,l_2\,l_3} \tag{425}$$

$$\ll \sum_{\substack{h_1,h_2,h_3|\mathfrak{B}_1 \\ h_1\geq z_0}} \frac{\tau^4(h_1)\,\tau^4(h_2)\,\tau^4(h_3)}{[h_2,h_3]\,[h_1,h_3]\,[h_1,h_2]} \sum_{r_1,r_2,r_3\,|\,\mathfrak{B}_1} \frac{\tau^2(r_1)\,\tau^2(r_2)\,\tau^2(r_3)}{r_1\,r_2\,r_3}$$

$$\ll \mathfrak{Q}_0 \Big(\sum_{r|\mathfrak{B}_1} \frac{\tau^2(r)}{r} \Big)^3 \ll \mathfrak{Q}_0 \prod_{p<z_1} \Big(1+\frac{4}{p}\Big)^3 \ll \mathfrak{Q}_0\,(\log P)^{12}\,,$$

где

$$\mathfrak{Q}_0 = \sum_{\substack{h_1,h_2,h_3|\mathfrak{B}_1 \\ h_1\geq z_0}} \frac{\tau^4(h_1)\,\tau^4(h_2)\,\tau^4(h_3)\,(h_2,h_3)\,(h_1,h_3)\,(h_1,h_2)}{h_1^2\,h_2^2\,h_3^2}\,.$$

Далее, имеем

$$\mathfrak{Q}_0 = \sum_{\substack{h_1,h_2|\mathfrak{B}_1 \\ h_1\geq z_0}} \frac{\tau^4(h_1)\,\tau^4(h_2)\,(h_1,h_2)}{h_1^2\,h_2^2}\,\mathfrak{Q}_1(h_1,h_2)\,, \tag{426}$$

где

$$\mathfrak{Q}_1(h_1,h_2) = \sum_{h|\mathfrak{B}_1} \frac{\tau^4(h)\,(h_1,h)\,(h_2,h)}{h^2}\,.$$

Чтобы оценить последную величину воспользуемся Леммой 7 (iv), (v), Леммой 9 и Леммой 16 (iii). Получим

$$\mathfrak{Q}_1(h_1,h_2) = \prod_{z_0\leq p<z_1} \Big(1+\frac{16\,(h_1,p)\,(h_2,p)}{p^2}\Big) \ll \Big(\prod_{p|(h_1,h_2)} 17 \Big) \prod_{p<z_1} \Big(1+\frac{16}{p}\Big)$$

$$\ll \tau^5((h_1,h_2))\,(\log P)^{16} \ll \tau^3(h_1)\,\tau^3(h_1)\,(\log P)^{16}\,.$$

Следовательно, в силу (381), (383), (426), Леммы 7 (iv) и Леммы 9, имеем

$$\mathfrak{Q}_0 \ll (\log P)^{16} \sum_{\substack{h_1,h_2|\mathfrak{B}_1 \\ h_1\geq z_0}} \frac{\tau^7(h_1)\,\tau^7(h_2)\,(h_1,h_2)}{h_1^2\,h_2^2} = (\log P)^{16} \sum_{h_1\geq z_0} \frac{\tau^7(h_1)}{h_1^2}\,\mathfrak{Q}_2(h_1)\,, \tag{427}$$

где

$$\mathfrak{Q}_2(h_1) = \sum_{h|\mathfrak{B}_1} \frac{\tau^7(h)\,(h_1,h)}{h^2} = \prod_{z_0\le p<z_1}\left(1+\frac{128\,(h_1,p)}{p^2}\right) \ll \prod_{\substack{z_0\le p<z_1\\ p|h_1}}\left(1+\frac{128}{p}\right) \ll \tau(h_1)\,.$$

Из (427), Леммы 7 (vi) и Леммы 8 (iii) следует

$$\mathfrak{Q}_0 \ll\, (\log P)^{16} \sum_{h\ge z_0} \frac{\tau^8(h)}{h^2} \,\ll\, (\log P)^{16} \sum_{h\ge z_0} h^{-3/2} \,\ll\, (\log P)^{16}\, z_0^{-1/2}\,.$$

Тогда, используя (383) и (425), получим

$$W_2' \ll (\log P)^{-100}\,.$$

Лемма доказана.

$\square$

4. Доказательство Теоремы 2.

4.1. **Доказательство Предложения 3.**

4.1.1. *Начало доказательства.*

Пусть $\mathbf{k} = \langle k_1, k_2, k_3 \rangle \in \mathbb{N}^3$ – вектор с нечетными бесквадратными компонентами, $n \in \mathbb{N},\ n \le Y$. Рассмотрим величину $I_{\mathbf{k}}(n)$, определенную формулой (80). Воспользуемся круговым методом. Очевидно, что в силу Леммы 4 (ii), имеем

$$I_{\mathbf{k}}(n) \;=\; \int_0^1 S_{k_1}(\alpha)\, S_{k_2}(\alpha)\, S_{k_3}(\alpha)\, e(-n\alpha)\; d\alpha \;,$$

где

$$S_k(\alpha) = \sum_{\substack{p \le X \\ p+2 \equiv 0\ (k)}} (\log p)\; e(\alpha\, p^2)\ . \tag{428}$$

Определим множества из больших дуг и, соответственно, малых дуг следующим образом. Пусть

$$Q = (\log X)^{1000A}\ , \qquad \tau = X^2 (\log X)^{-2000A}\ , \tag{429}$$

(величина Q была уже определена через (83), но для удобства приводим ее определение снова),

$$E_1 = \bigcup_{q<Q}\ \bigcup_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} \Big[\, \frac{a}{q} - \frac{1}{q\tau}\ ,\ \frac{a}{q} + \frac{1}{q\tau} \Big] \qquad \text{(большие дуги)}\ , \tag{430}$$

$$E_2 = \Big(-\,\frac{1}{\tau}\ , 1 - \frac{1}{\tau}\Big) \setminus E_1 \qquad \text{(малые дуги)}\ . \tag{431}$$

Имеем

$$I_{\mathbf{k}}(n) \;=\; I_1 + I_2\ , \tag{432}$$

где

$$I_j = \int_{E_j} S_{k_1}(\alpha)\, S_{k_2}(\alpha)\, S_{k_3}(\alpha)\, e(-n\alpha)\, d\alpha\ , \qquad j = 1, 2\ . \tag{433}$$

Определение: Для краткости будем писать $\sum^*_{n\le Y}$, чтобы обозначить, что суммирование ведется по $n \in \mathbb{N},\ n \le Y$, удовлетворяющих $n \equiv 3\ (24)$ и $n \not\equiv 0\ (5)$.

Для доказательства предложения рассмотрим суммы

$$\mathcal{U}_1 = \sum_{n\le Y}{}^{*}\ \Big|\ \sum_{\substack{k_i \le K_i \\ i=1,2,3}} \beta_1(k_1)\, \beta_2(k_2)\, \beta_3(k_3)\ \Big(I_1 - \frac{\pi}{4}\sqrt{n}\, \frac{\mathfrak{S}_{\mathbf{k}}(n,Q)}{\varphi(k_1)\varphi(k_2)\varphi(k_3)} \Big)\ \Big|\ , \tag{434}$$

$$\mathcal{U}_2 = \sum_{n\le Y}\ \Big|\ \sum_{\substack{k_i \le K_i \\ i=1,2,3}} \beta_1(k_1)\, \beta_2(k_2)\, \beta_3(k_3)\ I_2\ \Big|\ . \tag{435}$$

В силу (85), (88) и (432) имеем

$$\mathcal{U} \ll \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \,. \tag{436}$$

Оценим $\mathcal{U}_2$ в § 4.1.2 и, соответственно, $\mathcal{U}_1$ в § 4.1.3 и установим, что

$$\mathcal{U}_1\,,\ \mathcal{U}_2 \ll X^3(\log X)^{-A}\,. \tag{437}$$

Оценка (88) является следствием из (436) и (437).

Отметим, что только в доказательстве оценки (441) нам действительно нужно сильное ограничение на K_3, данное в (86). Так что, если установим (441) для больших K_3, то ето приведет к улучшению Теоремы 2. Это, в принципе, возможно, если учитывать структуру функций β_i, которые втречаются в нашей задаче. Вычисления, однако, будут очень громоздкими.

4.1.2. *Малые дуги.*

Цель настоящего параграфа доказать неравенство (437) для $\mathcal{U}_2$. Подставим выражение для I_2, данное с (433), в формуле (435) и заменим порядок суммирования и интегрирования. Получим

$$\mathcal{U}_2 = \sum_{n\le Y} \Big| \int_{E_2} \mathcal{K}_1(\alpha)\mathcal{K}_2(\alpha)\mathcal{K}_3(\alpha)e(-n\alpha)\,d\alpha \Big|\,,$$

где

$$\mathcal{K}_i(\alpha) = \sum_{k\le K_i} \beta_i(k)\,S_k(\alpha)\,, \qquad i=1,2,3\,. \tag{438}$$

Применим Лемму 1 и потом Лемму 25. Получим

(439)

$$\mathcal{U}_2^2 \ll Y \sum_{n\le Y} \Big| \int_{E_2} \mathcal{K}_1(\alpha)\,\mathcal{K}_2(\alpha)\,\mathcal{K}_3(\alpha)\,e(-n\alpha)\,d\alpha \Big|^2$$

$$\ll Y \int_{E_2} \big|\mathcal{K}_1(\alpha)\,\mathcal{K}_2(\alpha)\,\mathcal{K}_3(\alpha)\,\big|^2\,d\alpha \ll Y\Big(\max_{\alpha\in E_2}\big|\mathcal{K}_3(\alpha)\big|\Big)^2 \int_0^1 \big|\mathcal{K}_1(\alpha)\,\mathcal{K}_2(\alpha)\big|^2\,d\alpha$$

$$\ll Y\,\Big(\max_{\alpha\in E_2}\big|\mathcal{K}_3(\alpha)\big|\Big)^2 \Big(\int_0^1 \big|\mathcal{K}_1(\alpha)\big|^4\,d\alpha + \int_0^1 \big|\mathcal{K}_2(\alpha)\big|^4\,d\alpha\Big)\,.$$

Чтобы оценить последнее выражение, нам нужны две леммы:

Лемма 55. *Имеют место неравенства*

$$\int_0^1 \big|\,\mathcal{K}_i(\alpha)\,\big|^4\,d\alpha \ll X^2(\log X)^{10^5}\,, \qquad i=1,2\,. \tag{440}$$

□

Лемма 56. *Выполнена оценка*

$$\max_{\alpha\in E_2}\big|\mathcal{K}_3(\alpha)\big| \ll X\,(\log X)^{-2A}\,. \tag{441}$$

$\square$

Неравенство (437) для $\mathcal{U}_2$ является следствием из (439), Леммы 55 и Леммы 56. Теперь приведем доказательства етих лемм.
Доказательство Леммы 55. Обозначим интеграл в левой стороне (440) через $\mathfrak{I}$. Используя (87), (428), (438) и Лемму 4 (ii) получаем

$$\mathfrak{I}=\int_0^1 \sum_{k_1,\ldots,k_4\le K_i}\beta_i(k_1)\beta_i(k_2)\overline{\beta_i(k_3)\beta_i(k_4)}\;S_{k_1}(\alpha)S_{k_2}(\alpha)S_{k_3}(-\alpha)S_{k_4}(-\alpha)\,d\alpha$$

$$=\sum_{k_1,\ldots,k_4\le K_i}\beta_i(k_1)\beta_i(k_2)\overline{\beta_i(k_3)\beta_i(k_4)}$$

$$\times\int_0^1 \sum_{\substack{p_1,\ldots,p_4\le X\\ p_j+2\equiv 0(k_j)\ ,\ 1\le j\le 4}}(\log p_1)\ldots(\log p_4)\,e\big(\alpha(p_1^2+p_2^2-p_3^2-p_4^2)\big)\,d\alpha$$

$$=\sum_{k_1,\ldots,k_4\le K_i}\beta_i(k_1)\beta_i(k_2)\overline{\beta_i(k_3)\beta_i(k_4)}\sum_{\substack{p_1,\ldots,p_4\le X\\ p_j+2\equiv 0(k_j)\ ,\ 1\le j\le 4\\ p_1^2+p_2^2=p_3^2+p_4^2}}(\log p_1)\ldots(\log p_4)$$

$$\ll(\log X)^4\sum_{k_1,\ldots,k_4\le K_i}\tau_3(k_1)\ldots\tau_3(k_4)\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_4\le X\\ n_j+2\equiv 0(k_j)\ ,\ 1\le j\le 4\\ n_1^2+n_2^2=n_3^2+n_4^2}}1$$

$$=(\log X)^4\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_4\le X\\ n_1^2+n_2^2=n_3^2+n_4^2}}\Big(\sum_{\substack{k_1\le K_i\\ k_1|n_1+2}}\tau_3(k_1)\Big)\cdots\Big(\sum_{\substack{k_4\le K_i\\ k_4|n_4+2}}\tau_3(k_4)\Big)$$

$$\ll(\log X)^4\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_4\le X\\ n_1^2+n_2^2=n_3^2+n_4^2}}\tau^3(n_1+2)\,\tau^3(n_2+2)\,\tau^3(n_3+2)\,\tau^3(n_4+2)\ .$$

Чтобы оценить последнюю сумму, применим неравенство $xyzt\le x^4+y^4+z^4+t^4$. Потом разделим новую сумму на две части и, используя Лемму 7 (i), получим

$$\mathfrak{I}\ll(\log X)^4\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_4\le X\\ n_1^2+n_2^2=n_3^2+n_4^2}}\tau^{12}(n_1+2)\ \ll\ X^2(\log X)^{2^{12}+3}\ +\ (\log X)^4U_0\ , \tag{442}$$

где

$$U_0 = \sum_{\substack{n_1,\dots,n_4 \le X \\ (n_1-n_3)(n_1+n_3)=(n_4-n_2)(n_4+n_2) \\ n_1\ne n_3\ ,\ n_1\ne n_4\ ,\ n_2\ne n_3\ ,\ n_2\ne n_4}} \tau^{12}(n_1+2)\ . \tag{443}$$

Разоб?ем U_0 на две подсуммы:

$$U_0 = U_1 + U_2\ . \tag{444}$$

В области суммирования U_1 условие $n_1 \ne n_3$ заменено на $n_1 > n_3$, в U_2 оно заменено на $n_1 < n_3$.

Рассмотрим U_1. Имеем

$$U_1 = \sum_{\substack{h_1,\dots,h_4\le 2X \\ h_1h_3=h_2h_4 \\ h_1\equiv h_3(2)\ ,\ h_2\equiv h_4(2)}} \sum_{\substack{n_1,\dots,n_4\le X \\ n_1-n_3=h_1\ ,\ n_1+n_3=h_3 \\ n_4-n_2=h_2\ ,\ n_4+n_2=h_4}} \tau^{12}(n_1+2)$$

$$\ll \sum_{\substack{h_1,\dots,h_4\le 2X \\ h_1h_3=h_2h_4}} \tau^{12}(h_1+h_3+4)\ = \sum_{k,l\le 2X} \sum_{\substack{h_1,\dots,h_4\le 2X \\ h_1h_3=h_2h_4 \\ (h_1,h_2)=k\ ,\ (h_3,h_4)=l}} \tau^{12}(h_1+h_3+4)$$

$$\ll \sum_{k,l\le 2X} \sum_{\substack{h_1,h_2\le \frac{2X}{k}\ ;\ h_3,h_4\le\frac{2X}{l} \\ h_1h_3=h_2h_4 \\ (h_1,h_2)=(h_3,h_4)=1}} \tau^{12}(h_1k+h_3l+4)\ .$$

Из условий $(h_1,h_2)=(h_3,h_4)=1$, $h_1h_3=h_2h_4$ следует, что $h_1=h_4$ и $h_2=h_3$. Следовательно

$$U_1 \ll \sum_{k,l\le 2X} \sum_{h_1,h_2\le \min\left(\frac{2X}{k}\ ,\ \frac{2X}{l}\right)} \tau^{12}(h_1k+h_2l+4)$$

$$= \sum_{m_1,m_2\le 2X} \tau^{12}(m_1+m_2+4) \sum_{\substack{k,l\le 2X \\ h_1,h_2\le\min\left(\frac{2X}{k}\ ,\ \frac{2X}{l}\right) \\ h_1k=m_1\ ,\ h_2l=m_2}} 1$$

$$\ll \sum_{m_1,m_2\le 2X} \tau^{12}(m_1+m_2+4)\,\tau(m_1)\,\tau(m_2)\,.$$

Теперь воспользуемся неравенством $x^{12}yz \le x^{14}+y^{14}+z^{14}$ и, в силу Леммы 7 (i), получим

$$U_1 \ll \sum_{m_1,m_2\le 2X} \tau^{14}(m_1+m_2+4) \ + \sum_{m_1,m_2\le 2X} \tau^{14}(m_1) \tag{445}$$

$$\ll \sum_{l\le 4X+4} \tau^{14}(l) \sum_{\substack{m_1,m_2\le 2X\\ m_1+m_2+4=l}} 1 \ + \ X^2(\log X)^{2^{14}-1} \ \ll X^2(\log X)^{2^{14}-1} \, .$$

Оценим U_2 аналогично и получим

$$U_2 \ll X^2(\log X)^{2^{14}-1} \, . \tag{446}$$

Неравенство (440) является следствием (442), (444) – (446). Лемма 55 доказана.

$\square$

Доказательство Леммы 56. Для простоты обозначим K_3 и $\beta_3(k)$, соответственно, через K и $\beta(k)$. Разделяем $\mathcal{K}_3(\alpha)$ на $\mathcal{O}\big(\log X\big)$ суммы вида

$$\mathcal{K}(\alpha,Z) = \sum_{k\le K} \beta(k) \sum_{\substack{Z<p\le 2Z\\ p+2\equiv 0\ (k)}} \log p \ e(\alpha p^2) \, .$$

Без ограничения общности можно предположить, что

$$X(\log X)^{-2A-4} < Z \le X/2 \, , \tag{447}$$

потому, что противном случае результат следует из тривиальной оценки для $\mathcal{K}(\alpha,Z)$.

Используя определение функции Мангольда и Лемму 7 (vi) легко получаем, что

$$\mathcal{K}(\alpha,Z) = W(Z,K,\alpha) + \mathcal{O}\big(X^{2/3}\big) \, , \tag{448}$$

где

$$W(Z,K,\alpha) = \sum_{Z<n\le 2Z} \Lambda(n)\, e(\alpha n^2) \sum_{\substack{k\le K\\ k|n+2}} \beta(k) \, .$$

Применим Лемму 35 и разоб?ем $W(Z,K,\alpha)$ на $\mathcal{O}\big((\log X)^6\big)$ сумм двух типов. Суммы первого типа – ето

$$W_1 = \sum_{\substack{M<m\le M_1\\ Z<ml\le 2Z}} \sum_{L<l\le L_1} a_m\, e(\alpha m^2 l^2) \sum_{\substack{k\le K\\ k|ml+2}} \beta(k)$$

и

$$W_1' = \sum_{\substack{M<m\le M_1\\ Z<ml\le 2Z}} \sum_{L<l\le L_1} a_m\, (\log l)\, e(\alpha m^2 l^2) \sum_{\substack{k\le K\\ k|ml+2}} \beta(k) \, ,$$

где

$$M_1 \le 2M \, , \quad L_1 \le 2L \, , \quad ML \asymp Z \, , \quad L \ge Z^{0.498} \, , \quad |a_m| \ll \tau_5(m)\log X \, . \tag{449}$$

Суммы второго типа – ето

$$W_2=\sum_{\substack{M<m\le M_1\\ Z<ml\le 2Z}}\ \sum_{L<l\le L_1} a_m\,b_l\,e(\alpha m^2l^2)\sum_{\substack{k\le K\\ k|ml+2}}\beta(k)\ ,$$

где

(450) $$M_1\le 2M\ ,\quad L_1\le 2L\ ,\quad ML\asymp Z\ ,\quad Z^{0.001}\le L\le 2^{30}Z^{1/3}\ ,$$
$$|a_m|\ll\tau_5(m)\log X\ ,\qquad |b_l|\ll\tau_5(l)\log X\ .$$

Рассмотрим сумму второго типа. Имеем

$$|W_2|\ll\log X\sum_{M<m\le M_1}\tau_5(m)\Big|\sum_{\substack{L<l\le L_1\\ Z<ml\le 2Z\\ ml+2\equiv 0(k)}}\ \sum_{k\le K}b_l\,\beta(k)\,e(\alpha m^2l^2)\Big|\ .$$

Чтобы избавиться от весов $\tau_5(m)$, воспользуемся Леммой 1 и Леммой 7 (i). Получим

$$|W_2|^2\ll M(\log X)^{26}\sum_{M<m\le M_1}\Big|\sum_{\substack{L<l\le L_1\\ Z<ml\le 2Z\\ ml+2\equiv 0(k)}}\ \sum_{k\le K}b_l\,\beta(k)\,e(\alpha m^2l^2)\Big|^2$$

$$=M(\log X)^{26}\sum_{M<m\le M_1}\ \sum_{\substack{L<l_1,l_2\le L_1\\ Z<l_1m,l_2m\le 2Z\\ l_im+2\equiv 0(k_i)\ ,\ i=1,2}}\ \sum_{k_1,k_2\le K}b_{l_1}\,\overline{b_{l_2}}\ \beta(k_1)\,\overline{\beta(k_2)}\,e\big(\alpha m^2(l_1^2-l_2^2)\big)\ .$$

Следовательно, в силу (87) и (450), имеем

(451) $$|W_2|^2\ll M(\log X)^{28}\sum_{\substack{k_1,k_2\le K\\ (k_1k_2,2)=(l_1,k_1)=(l_2,k_2)=1\\ l_1\equiv l_2\ ((k_1,k_2))}}\ \sum_{L<l_1,l_2\le L_1}\tau_3(k_1)\tau_3(k_2)\tau_5(l_1)\tau_5(l_2)\,\big|V\big|\ ,$$

где

$$V=\sum_{\substack{M'<m\le M_1'\\ l_im+2\equiv 0(k_i)\ ,\ i=1,2}}e\big(\alpha m^2(l_1^2-l_2^2)\big)\ ,$$

(452) $$M'=\max\Big(\frac{Z}{l_1},\frac{Z}{l_2},M\Big)\ ,\qquad M_1'=\min\Big(\frac{2Z}{l_1},\frac{2Z}{l_2},M_1\Big)\ .$$

Отметим, что если $l_1\not\equiv l_2\ ((k_1,k_2))$, то система сравнений

(453) $$l_im+2\equiv 0\ (k_i)\ ,\qquad i=1,2$$

не имеет решений и, следовательно, $V=0$. Используя Лемму 5 легко получить, что если l_i, k_i удовлетворяют условиям области суммирования в формуле (451), то существует некоторое $h_0=h_0(l_1,l_2,k_1,k_2)\in\mathbb{Z}$, удовлетворяющее $1\le h_0\le[k_1,k_2]$

и такое, что система (453) еквивалентна сравнению $m \equiv h_0 \; ([k_1, k_2])$. В етом случае имеем

$$|V| = \Big| \sum_{\substack{M' < m \le M_1' \\ m \equiv h_0([k_1,k_2])}} e\big(\alpha m^2 (l_1^2 - l_2^2)\big) \Big| = \Big| \sum_{H < r \le H_1} e\big(\alpha (h_0 + r[k_1,k_2])^2 (l_1^2 - l_2^2)\big) \Big|$$

$$= \Big| \sum_{H < r \le H_1} e\big(\alpha (r^2 [k_1,k_2]^2 + 2h_0 r [k_1,k_2])(l_1^2 - l_2^2)\big) \Big| ,$$

где

(454) $$H = \frac{M' - h_0}{[k_1,k_2]} , \qquad H_1 = \frac{M_1' - h_0}{[k_1,k_2]} .$$

Оценка

$$|V| \ll \frac{M}{[k_1,k_2]}$$

является тривиальной для V. Отметим, что в силу (86), (447) и (450) имеем $[k_1, k_2] \ll M \, (\log X)^{-200A}$. Если верхняя граница для $K = K_3$ из (86) была бы большей, например $X^{1/3+\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то наш метод не работал бы. Действительно, в етом случае для некоторых k_1, k_2 тривиальная оценка для V была бы $|V| \ll 1$ и тогда было бы трудно найти нетривиальную оценку для суммы W_2 .

Пользуясь Леммой 7 (i), (ii), (v) и Леммой 10 получаем, что слагаемые в правой стороне (451), для которых $l_1 = l_2$, имеют вклад

$$\ll M^2 (\log X)^{28} \sum_{k_1, k_2 \le K} \frac{\tau^2(k_1)\tau^2(k_2)}{[k_1,k_2]} \sum_{L < l \le L_1} \tau_5^2(l)$$

$$\ll M^2 L (\log X)^{52} \sum_{k_1, k_2 \le K} \frac{\tau^2(k_1)\tau^2(k_2)}{k_1 k_2} \, (k_1, k_2) \ll M^2 L (\log X)^{52} \sum_{\delta \le X} \delta \Big(\sum_{\substack{k \le X \\ k \equiv 0 \, (\delta)}} \frac{\tau^2(k)}{k} \Big)^2$$

$$\ll M^2 L (\log X)^{52} \sum_{\delta \le X} \frac{\tau^4(\delta)}{\delta} \Big(\sum_{h \le X} \frac{\tau^2(h)}{h} \Big)^2 \ll M^2 L (\log X)^{100} .$$

В силу последных вычислений, Леммы 1, Леммы 7 (i), (ii), (v), Леммы 10 и оценки (451) получаем

$$
\begin{aligned}
(455)\qquad |W_2|^4 &\ll M^4L^2(\log X)^{200} \\
&\quad + M^2(\log X)^{60}\Bigg(\sum_{k_1,k_2\le K}\frac{\tau^4(k_1)\tau^4(k_2)}{[k_1,k_2]}\sum_{L<l_1,l_2\le L_1}\tau_5^2(l_1)\tau_5^2(l_2)\Bigg) \\
&\quad \times\Bigg(\sum_{\substack{k_1,k_2\le K\\(k_1k_2,2)=1}}[k_1,k_2]\sum_{\substack{L<l_1,l_2\le L_1\ ,\ l_1\ne l_2\\(k_1,l_1)=(k_2,l_2)=1\\ l_1\equiv l_2\ ((k_1,k_2))}}|V|^2\Bigg) \\
&\ll M^4L^2(\log X)^{200}+M^2L^2(\log X)^{1000}\Sigma_0\ ,
\end{aligned}
$$

где

$$
\Sigma_0=\sum_{\substack{k_1,k_2\le K\\(k_1k_2,2)=1}}[k_1,k_2]\sum_{\substack{L<l_1,l_2\le L_1\ ,\ l_1\ne l_2\\(k_1,l_1)=(k_2,l_2)=1\\ l_1\equiv l_2\ ((k_1,k_2))}}
$$

$$
\times\sum_{H<r_1,r_2\le H_1} e\Big(\alpha\big((r_1^2-r_2^2)[k_1,k_2]^2+2h_0[k_1,k_2](r_1-r_2)\big)(l_1^2-l_2^2)\Big)\ .
$$

Имеем

$$
\begin{aligned}
\Sigma_0 &= \sum_{\substack{k_1,k_2\le K\\(k_1k_2,2)=1}}[k_1,k_2]\sum_{\substack{L<l_1,l_2\le L_1\ ,\ l_1\ne l_2\\(k_1,l_1)=(k_2,l_2)=1\\ l_1\equiv l_2\ ((k_1,k_2))}} \\
&\quad \times\sum_{s_1,s_2} e\Big(\alpha\big(s_1s_2[k_1,k_2]^2+2h_0s_1[k_1,k_2]\big)(l_1^2-l_2^2)\Big)\sum_{\substack{H<r_1,r_2\le H_1\\ r_1-r_2=s_1\\ r_1+r_2=s_2}}1 \\
&= \sum_{\substack{k_1,k_2\le K\\(k_1k_2,2)=1}}[k_1,k_2]\sum_{\substack{L<l_1,l_2\le L_1\ ,\ l_1\ne l_2\\(k_1,l_1)=(k_2,l_2)=1\\ l_1\equiv l_2\ ((k_1,k_2))}} \\
&\quad \times\sum_{\substack{s_1,s_2:\ \ s_1\equiv s_2(2)\\ 2H<s_2+s_1\le 2H_1\\ 2H<s_2-s_1\le 2H_1}} e\Big(\alpha\big(s_1s_2[k_1,k_2]^2+2h_0s_1[k_1,k_2]\big)(l_1^2-l_2^2)\Big)\ .
\end{aligned}
$$

Следовательно

(456)
$$\Sigma_0 = \sum_{\substack{k_1,k_2\le K\\(k_1k_2,2)=1}} [k_1,k_2] \sum_{\substack{L<l_1,l_2\le L_1\ ,\ l_1\ne l_2\\(k_1,l_1)=(k_2,l_2)=1\\l_1\equiv l_2\ ((k_1,k_2))}}$$
$$\times \sum_{|s_1|\le 2H_1-2H} e\Big(2\alpha h_0 s_1[k_1,k_2](l_1^2-l_2^2))\Big)$$
$$\times \sum_{\substack{s_2:\ \ s_2\equiv s_1(2)\\2H-s_1<s_2\le 2H_1-s_1\\2H+s_1<s_2\le 2H_1+s_1}} e\Big(\alpha s_1 s_2[k_1,k_2]^2(l_1^2-l_2^2)\Big)\ .$$

Обозначим

(457)
$$K_0 = (\log X)^{50A}$$

и разделим сумму Σ_0 на две части:

(458)
$$\Sigma_0 = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

На область суммирования по $k_1,\ k_2$ в Σ_1 наложено дополнительное условие $[k_1,k_2]\le K_0$, а в Σ_2 суммирование ведется по k_1,k_2, таких, что $[k_1,k_2] > K_0$. В силу етих определений и (456), обозначим $s_2 = s_1 + 2t$ и получим

(459)
$$\Sigma_1 \le \sum_{\substack{k_1,k_2\le K_0\\(k_1k_2,2)=1}} [k_1,k_2] \sum_{\substack{L<l_1,l_2\le L_1\ ,\ l_1\ne l_2\\(k_1,l_1)=(k_2,l_2)=1\\l_1\equiv l_2\ ((k_1,k_2))}}$$
$$\times \sum_{|s_1|\le 2H_1-2H} \Big| \sum_{H'<t\le H_1'} e\Big(2\alpha s_1[k_1,k_2]^2(l_1^2-l_2^2)t\Big)\Big|\ ,$$

(460)
$$\Sigma_2 \le \sum_{\substack{k_1,k_2\le K\\(k_1k_2,2)=1\\ [k_1,k_2]>K_0}} [k_1,k_2] \sum_{\substack{L<l_1,l_2\le L_1\ ,\ l_1\ne l_2\\(k_1,l_1)=(k_2,l_2)=1\\l_1\equiv l_2\ ((k_1,k_2))}}$$
$$\times \sum_{|s_1|\le 2H_1-2H} \Big| \sum_{H'<t\le H_1'} e\Big(2\alpha s_1[k_1,k_2]^2(l_1^2-l_2^2)t\Big)\Big|\ ,$$

где

(461)
$$H' = \max(H-s_1,H)\ , \qquad H_1' = \min(H_1-s_1,H_1)\ .$$

Сначала рассмотрим Σ_1 . Имеем

(462)
$$\Sigma_1 = \Sigma_1^{(1)} + \Sigma_1^{(2)}\ ,$$

где $\Sigma_1^{(1)}$ и $\Sigma_1^{(2)}$ обозначают суммы слагаемых из правой части (459), для которых, соответственно, $s_1 \neq 0$ и $s_1 = 0$. Очевидно имеем

$$\Sigma_1^{(2)} \ll ML^2K_0^2\,. \tag{463}$$

Вспомним, что $\alpha \in E_2$, где множество E_2 определено через (431). Пользуясь Леммой 15, получим, что существуют $a \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие

$$Q \le q \le \tau\,, \qquad (a,q) = 1\,, \qquad \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{q^2}\,. \tag{464}$$

Тогда, в силу (429), (450), (452), (454), (457), (459), (461), (464), Леммы 7 (v), (vi), Леммы 33 и Леммы 34 (ii) имеем

$$\begin{aligned}
\Sigma_1^{(1)} &\ll \sum_{k_1,k_2\le K_0}[k_1,k_2]\sum_{\substack{L<l_1,l_2\le L_1\\ l_1\neq l_2}}\ \sum_{0<|s|\le\frac{2M}{[k_1,k_2]}}\min\left(\frac{M}{[k_1,k_2]},\frac{1}{||2\alpha(l_1^2-l_2^2)[k_1,k_2]^2s||}\right)\\
&\ll K_0^3\sum_{h\le K_0^2}\ \sum_{\substack{L<l_1,l_2\le L_1\\ l_1\neq l_2}}\ \sum_{0<|s|\le 2M}\min\left(M,\frac{1}{||2\alpha(l_1^2-l_2^2)h^2s||}\right)\\
&= K_0^3\sum_{h\le K_0^2}\ \sum_{t_1,t_2}\left(\sum_{\substack{L<l_1,l_2\le L_1\\ l_1-l_2=t_1\ ,\ l_1+l_2=t_2\\ l_1\neq l_2}}1\right)\sum_{0<|s|\le 2M}\min\left(M,\frac{1}{||2\alpha t_1t_2h^2s||}\right)\\
&\ll K_0^3\sum_{h\le K_0^2}\ \sum_{\substack{0<|t_1|\le L\\ 1\le t_2\le 4L}}\ \sum_{0<|s|\le 2M}\min\left(M,\frac{1}{||2\alpha t_1t_2h^2s||}\right)\\
&\ll K_0^3\sum_{h\le K_0^2}\ \sum_{t_1,t_2\le 4L}\ \sum_{s\le 2M}\min\left(M,\frac{1}{||2\alpha t_1t_2h^2s||}\right)\\
&\ll K_0^3\sum_{m\le 64K_0^4L^2M}\tau_5(m)\ \min\left(M,\frac{1}{||\alpha m||}\right)\ \ll\ M^2L^2(\log X)^{-140A}\,.
\end{aligned}$$

Из последней оценки, (450), (462) и (463) следует

$$\Sigma_1 \ll M^2L^2(\log X)^{-140A}\,. \tag{465}$$

Теперь рассмотрим сумму Σ_2. В силу (460) имеем

$$\Sigma_2 \ll \log X \max_{K_0\le T\le K^2}\left(T\,\Sigma_2^{(1)}\right)\,, \tag{466}$$

где

$$\Sigma_2^{(1)} = \Sigma_2^{(1)}(T) = \sum_{\substack{k_1,k_2\le K \\ (k_1k_2,2)=1 \\ T\le[k_1,k_2]\le 2T}} \sum_{\substack{L<l_1,l_2\le L_1\ ,\ l_1\ne l_2 \\ (k_1,l_1)=(k_2,l_2)=1 \\ l_1\equiv l_2\ ((k_1,k_2))}}$$

$$\times \sum_{|s_1|\le 2H_1-2H} \Big| \sum_{H'<t\le H_1'} e\Big(2\alpha s_1[k_1,k_2]^2(l_1^2-l_2^2)t\Big)\Big|\ .$$

Интервал суммирования по t в етой сумме зависит от других параметров. Чтобы освободиться от етой зависимости, применим Лемму 36 и оценим $\Sigma_2^{(1)}$ посредством средней стойности подобной суммы, в которой интервал суммирования по t не зависит от k_i , l_i , s_1 . В новой сумме мы уже в состоянии расширить область суммирования по k_i , l_i , s_1 . После етой процедуры величина, которую мы рассматриваем, не уменьшается. Точнее, используя (452), (454), (461) и Лемму 36, получим

$$\Sigma_2^{(1)} \le \sum_{\substack{k_1,k_2\le K \\ T\le[k_1,k_2]\le 2T}} \sum_{\substack{L<l_1,l_2\le L_1 \\ l_1\ne l_2}} \sum_{|s|\le\frac{2M}{T}}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\theta) \Big| \sum_{\frac{M}{4T}<t\le\frac{4M}{T}} e(\theta t)\, e\Big(2\alpha s[k_1,k_2]^2(l_1^2-l_2^2)t\Big)\Big|\, d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\theta)\, \Sigma_2^{(2)}(\theta,T)\, d\theta\ , \tag{467}$$

где

$$\mathcal{K}(\theta) = \min\Big(\frac{15M}{4T}+1\ ,\ (\pi|\theta|)^{-1}\ ,\ (\pi\theta)^{-2}\Big) \tag{468}$$

и

$$\Sigma_2^{(2)} = \Sigma_2^{(2)}(\theta,T) = \sum_{\substack{k_1,k_2\le K \\ T<[k_1,k_2]\le 2T}} \sum_{\substack{L<l_1,l_2\le L_1 \\ l_1\ne l_2}} \sum_{|s|\le\frac{2M}{T}} \Big| \sum_{\frac{M}{4T}<t\le\frac{4M}{T}} e\Big(2\alpha s[k_1,k_2]^2(l_1^2-l_2^2)t+\theta t\Big)\Big|\ .$$

Из (467), (468) и Леммы 36 следует

$$\Sigma_2^{(1)} \ll \log X \max_{0\le\theta\le 1} \Sigma_2^{(2)}\ . \tag{469}$$

Рассмотрим $\Sigma_2^{(2)}$. Имеем

(470)
$$\Sigma_2^{(2)} = \sum_{T<h\le 2T} \Big(\sum_{\substack{k_1,k_2\le K\\ [k_1,k_2]=h}} 1\Big) \sum_{\substack{L<l_1,l_2\le L_1\\ l_1\ne l_2}} \sum_{|s|\le \frac{2M}{T}} \Big| \sum_{\frac{M}{4T}<t\le \frac{4M}{T}} e\big(2\alpha s h^2 (l_1^2-l_2^2)t+\theta t\big)\Big|$$

$$\ll \sum_{T<h\le 2T} \tau^2(h) \sum_{\substack{L<l_1,l_2\le L_1\\ l_1\ne l_2}} \sum_{|s|\le \frac{2M}{T}} \Big| \sum_{\frac{M}{4T}<t\le \frac{4M}{T}} e\big(2\alpha s h^2 (l_1^2-l_2^2)t+\theta t\big)\Big|$$

$$= \sum_{T<h\le 2T} \tau^2(h) \sum_{t_1,t_2} \Big(\sum_{\substack{L<l_1,l_2\le L_1\\ l_1-l_2=t_1\ ,\ l_1+l_2=t_2\\ l_1\ne l_2}} 1\Big) \sum_{|s|\le \frac{2M}{T}} \Big| \sum_{\frac{M}{4T}<t\le \frac{4M}{T}} e\big(2\alpha s h^2 t_1 t_2 t+\theta t\big)\Big|$$

$$\ll \sum_{T<h\le 2T} \tau^2(h) \sum_{0<|t_1|,|t_2|\le 4L} \sum_{|s|\le \frac{2M}{T}} \Big| \sum_{\frac{M}{4T}<t\le \frac{4M}{T}} e\big(2\alpha s h^2 t_1 t_2 t+\theta t\big)\Big|$$

$$\ll \sum_{T<h\le 2T} \tau^2(h) \sum_{0<|t_1|,|t_2|\le 4L} \sum_{0<|s|\le \frac{2M}{T}} \Big| \sum_{\frac{M}{4T}<t\le \frac{4M}{T}} e\big(2\alpha s h^2 t_1 t_2 t+\theta t\big)\Big|$$

$$+\ ML^2(\log X)^3$$

$$\ll\ ML^2(\log X)^3 + \Sigma_2^{(3)}\ ,$$

где

$$\Sigma_2^{(3)} = \sum_{T<h\le 2T} \tau^2(h) \sum_{0<|m|\le \frac{32ML^2}{T}} \tau^3(|m|) \Big| \sum_{\frac{M}{4T}<t\le \frac{4M}{T}} e\big(2\alpha h^2 m t+\theta t\big)\Big|\ .$$

Воспользуемся Леммой 1 и Леммой 7 (i) и получим

(471)
$$\big(\Sigma_2^{(3)}\big)^2 \le \Big(\sum_{T<h\le 2T} \tau^4(h) \sum_{0<|m|\le \frac{32ML^2}{T}} \tau^6(|m|)\Big)\, \Sigma_2^{(4)} \ll\ ML^2(\log X)^{100}\, \Sigma_2^{(4)}\ ,$$

где

$$\Sigma_2^{(4)} = \sum_{T<h\le 2T} \sum_{0<|m|\le \frac{32ML^2}{T}} \Big| \sum_{\frac{M}{4T}<t\le \frac{4M}{T}} e\big(2\alpha h^2 m t+\theta t\big)\Big|^2 .$$

Для етой суммы имеем

$$\Sigma_2^{(4)} = \sum_{T<h\le 2T} \sum_{0<|m|\le \frac{32ML^2}{T}} \sum_{\frac{M}{4T}<t_1,t_2\le \frac{4M}{T}} e\big((2\alpha mh^2+\theta)(t_1-t_2)\big) \tag{472}$$

$$\ll \sum_{0<|m|\le \frac{32ML^2}{T}} \sum_{\frac{M}{4T}<t_1,t_2\le \frac{4M}{T}} \Big| \sum_{T<h\le 2T} e\big((2\alpha mh^2)(t_1-t_2)\big)\Big|$$

$$\ll \frac{M^2L^2}{T} + \frac{M}{T} \sum_{0<|m|\le \frac{32ML^2}{T}} \sum_{0<|l|\le \frac{4M}{T}} \Big| \sum_{T<h\le 2T} e\big(2\alpha mh^2 l\big)\Big|$$

$$\ll \frac{M^2L^2}{T} + \frac{M}{T}\,\Sigma_2^{(5)}\,,$$

где

$$\Sigma_2^{(5)} = \sum_{s\le \frac{256M^2L^2}{T^2}} \tau(s) \Big| \sum_{T<h\le 2T} e\big(\alpha sh^2\big)\Big|\,.$$

Пользуясь Леммой 1 и Леммой 7 (i), получим

$$\big(\Sigma_2^{(5)}\big)^2 \ll \Big(\sum_{s\le \frac{256M^2L^2}{T^2}} \tau^2(s)\Big)\Big(\sum_{s\le \frac{256M^2L^2}{T^2}} \Big|\sum_{T<h\le 2T} e\big(\alpha sh^2\big)\Big|^2\Big) \tag{473}$$

$$\ll \frac{M^2L^2}{T^2}(\log X)^3 \sum_{s\le \frac{256M^2L^2}{T^2}} \sum_{T<h_1,h_2\le 2T} e\big(\alpha s(h_1^2-h_2^2)\big)$$

$$\ll \frac{M^4L^4}{T^3}(\log X)^3 + \frac{M^2L^2}{T^2}(\log X)^3\,\big|\Sigma_2^{(6)}\big|\,,$$

где

$$\Sigma_2^{(6)} = \sum_{s\le \frac{256M^2L^2}{T^2}} \sum_{\substack{T<h_1,h_2\le 2T\\ h_1\ne h_2}} e\big(\alpha s(h_1^2-h_2^2)\big)\,.$$

Воспользуемся снова, что $\alpha\in E_2$. Тогда существуют числа $a\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$, удовлетворяющие (464). Далее, величины Q, τ удовлетворяют (429), $T\in[K_0,K^2]$, где K_0 определено через (457) и $K=K_3$ удовлетворяет (86). Тогдя, в силу Леммы 33 и

Леммы 34 (ii), имеем

$$\Sigma_2^{(6)} = \sum_{m_1,m_2} \Big(\sum_{\substack{T<h_1,h_2\le 2T\\ h_1-h_2=m_1\ ,\ h_1+h_2=m_2\\ h_1\ne h_2}} 1 \Big) \sum_{s\le \frac{256M^2L^2}{T^2}} e\big(\alpha s m_1 m_2\big) \tag{474}$$

$$\ll \sum_{0<|m_1|,|m_2|\le 4T} \Big| \sum_{s\le \frac{256M^2L^2}{T^2}} e\big(\alpha s m_1 m_2\big) \Big|$$

$$\ll \sum_{m_1,m_2\le 4T} \min\Big(\frac{M^2L^2}{T^2}, \frac{1}{||\alpha m_1 m_2||}\Big)$$

$$\ll \sum_{m\le 16T^2} \tau(m)\ \min\Big(\frac{M^2L^2}{T^2}, \frac{1}{||\alpha m||}\Big) \ \ll\ M^2L^2(\log X)^{2-50A}\,.$$

Из неравенств (86), (450), (457), (466), (469) – (474) следует

$$\Sigma_2 \ll M^2L^2(\log X)^{-12A}\,. \tag{475}$$

Имея ввиду (447), (450), (455), (458) (465) и (475), получаем

$$|W_2| \ll X(\log X)^{1000-3A}\,. \tag{476}$$

Рассмотрим суммы первого типа. Оценим, например, сумму W_1. В силу (87) и (449) имеем

$$|W_1| \ll (\log X)^2 \max_{1/2\le T\le K} \Sigma_3\ , \tag{477}$$

где

$$\Sigma_3 = \Sigma_3(T) = \sum_{\substack{T<k\le 2T\\ (k,2)=1}} \tau_3(k) \sum_{\substack{M<m\le M_1\\ (m,k)=1}} \tau_5(m) \Big| \sum_{\substack{L'<l\le L_1'\\ ml+2\equiv 0(k)}} e(\alpha m^2 l^2)\Big|,$$

и

$$L' = \max\Big(L, \frac{Z}{m}\Big)\ , \qquad L_1' = \min\Big(L_1, \frac{2Z}{m}\Big)\,. \tag{478}$$

Для каждого m, такого что $(m,k)=1$, определим $\overline{m}$ через пару условий

$$m\overline{m} \equiv 1\ (k)\,, \qquad 0\le \overline{m} < k\,.$$

Пусть

$$R = \frac{L'+2\overline{m}}{k}\ , \qquad R_1 = \frac{L_1'+2\overline{m}}{k}\,. \tag{479}$$

Пользуясь Леммой 1 и Леммой 7 (i), получим

(480) $$\big(\Sigma_3\big)^2 \ll \Big(\sum_{T<k\le 2T}\tau_3^2(k)\sum_{M<m\le M_1}\tau_5^2(m)\Big)$$

$$\times\Big(\sum_{\substack{T<k\le 2T\\(k,2)=1}}\sum_{\substack{M<m\le M_1\\(m,k)=1}}\Big|\sum_{R<r\le R_1}e\big(\alpha m^2(-2\overline{m}+rk)^2\big)\Big|^2\Big)$$

$$\ll MT(\log X)^{100}\sum_{\substack{T<k\le 2T\\(k,2)=1}}\sum_{\substack{M<m\le M_1\\(m,k)=1}}\Big|\sum_{R<r\le R_1}e\big(\alpha m^2(r^2k^2-4\overline{m}rk)\big)\Big|^2$$

$$= MT(\log X)^{100}\sum_{\substack{T<k\le 2T\\(k,2)=1}}\sum_{\substack{M<m\le M_1\\(m,k)=1}}$$

$$\times\sum_{R<r_1,r_2\le R_1}e\Big(\alpha m^2\big(k^2(r_1^2-r_2^2)-4\overline{m}k(r_1-r_2)\big)\Big)$$

$$\ll M^2LT(\log X)^{100}+MT(\log X)^{100}\,|\Sigma_3^{(1)}|\,,$$

где

$$\Sigma_3^{(1)}=\sum_{\substack{T<k\le 2T\\(k,2)=1}}\sum_{\substack{M<m\le M_1\\(m,k)=1}}\sum_{\substack{R<r_1,r_2\le R_1\\r_1\ne r_2}}e\Big(\alpha m^2\big(k^2(r_1^2-r_2^2)-4\overline{m}k(r_1-r_2)\big)\Big)\,.$$

Далее, имеем

$$\Sigma_3^{(1)}=\sum_{\substack{T<k\le 2T\\(k,2)=1}}\sum_{\substack{M<m\le M_1\\(m,k)=1}}\sum_{\substack{s_1,s_2\\s_1\ne 0}}e\Big(\alpha m^2\big(k^2s_1s_2-4\overline{m}ks_1\big)\Big)\sum_{\substack{R<r_1,r_2\le R_1\\r_1-r_2=s_1\\r_1+r_2=s_2}}1$$

$$=\sum_{\substack{T<k\le 2T\\(k,2)=1}}\sum_{\substack{M<m\le M_1\\(m,k)=1}}\sum_{\substack{s_1,s_2\,:\,s_1\ne 0\\2R<s_1+s_2\,,\,s_2-s_1\le 2R_1\\s_1\equiv s_2(2)}}e\big(\alpha m^2(k^2s_1s_2-4\overline{m}ks_1\big)$$

$$\ll\sum_{\substack{T<k\le 2T\\(k,2)=1}}\sum_{\substack{M<m\le M_1\\(m,k)=1}}\sum_{0<|s_1|\le\frac{10L}{T}}\Big|\sum_{\substack{s_2\,:\,s_2\equiv s_1(2)\\2R-s_1<s_2\le 2R_1-s_1\\2R+s_1<s_2\le 2R_1+s_1}}e\big(\alpha m^2k^2s_1s_2\big)\Big|.$$

Следовательно

$$\Sigma_3^{(1)} \ll \sum_{\substack{T<k\le 2T\\ (k,2)=1}} \sum_{\substack{M<m\le M_1\\ (m,k)=1}} \sum_{0<|s_1|\le \frac{10L}{T}} \Bigg| \sum_{\substack{R<t\le R_1\\ R-s_1<t\le R_1-s_1}} e\big(2\alpha m^2k^2s_1t\big)\Bigg| . \tag{481}$$

Сначала рассмотрим случай

$$MT \le K_0 , \tag{482}$$

где K_0 определено через (457). Применим Лемму 1, Лемму 7 (i), Лемму 33, Лемму 34 (ii) и также (429), (447), (449), (457), (464), (479) и (482). Получим

$$\Sigma_3^{(1)} \ll \sum_{T<k\le 2T} \sum_{M<m\le M_1} \sum_{s\le 20L} \min\left(L\, ,\, \frac{1}{||2\alpha m^2k^2s||}\right) \tag{483}$$

$$\ll \sum_{n\le 640K_0^2L} \tau_5(n)\ \min\left(L\, ,\, \frac{1}{||\alpha n||}\right) \ll X^2(\log X)^{-300A} .$$

Следовательно, используя Лемму 1, Лемму 7 (i) и имея ввиду (447), (449), (480), (482) и (483), получим

$$\Sigma_3 \ll X(\log X)^{-100A} \qquad \text{если} \qquad MT\le K_0 . \tag{484}$$

Теперь рассмотрим случай

$$MT > K_0 . \tag{485}$$

Пользуясь (478), (479), (481) и Леммой 36, получим

$$|\Sigma_3^{(1)}| \ll \log X \max_{0\le\theta\le 1} \Sigma_3^{(2)} , \tag{486}$$

где

$$\Sigma_3^{(2)} \;=\; \Sigma_3^{(2)}(\theta, T) \;=\; \sum_{T<k\le 2T} \sum_{M<m\le M_1} \sum_{0<|s|\le \frac{10L}{T}} \Bigg| \sum_{\frac{L}{4T}<t\le \frac{4L}{T}} e\big(2\alpha k^2m^2st+\theta t\big)\Bigg| .$$

Очевидно

$$\Sigma_3^{(2)} \ll \sum_{MT<h\le 4MT} \tau(h) \sum_{0<|s|\le \frac{10L}{T}} \Bigg| \sum_{\frac{L}{4T}<t\le \frac{4L}{T}} e\big(2\alpha h^2st+\theta t\big)\Bigg| .$$

Следователно, в силу Леммы 1 и Леммы 7 (i)

$$(487)\quad \big(\Sigma_3^{(2)}\big)^2 \ll \Big(\sum_{MT<h\le 4MT}\tau^2(h)\sum_{s\le \frac{10L}{T}}1\Big)$$

$$\times\Big(\sum_{MT<h\le 4MT}\ \sum_{0<|s|\le\frac{10L}{T}}\Big|\sum_{\frac{L}{4T}<t\le\frac{4L}{T}}e\big(2\alpha h^2 st+\theta t\big)\Big|^2\Big)$$

$$\ll ML\,(\log X)^3\sum_{MT<h\le 4MT}\ \sum_{0<|s|\le\frac{10L}{T}}\ \sum_{\frac{L}{4T}<t_1,t_2\le\frac{4L}{T}}e\big((2\alpha h^2 s+\theta)(t_1-t_2)\big)$$

$$\ll ML\,(\log X)^3\sum_{s\le\frac{10L}{T}}\ \sum_{\frac{L}{4T}<t_1,t_2\le\frac{4L}{T}}\Big|\sum_{MT<h\le 4MT}e\big(2\alpha h^2 s(t_1-t_2)\big)\Big|$$

$$\ll \frac{M^2L^3}{T}(\log X)^3+ML(\log X)^3\,\Sigma_3^{(3)}\ ,$$

где

$$\Sigma_3^{(3)}=\sum_{s\le\frac{10L}{T}}\ \sum_{\substack{\frac{L}{4T}<t_1,t_2\le\frac{4L}{T}\\ t_1\ne t_2}}\Big|\sum_{MT<h\le 4MT}e\big(2\alpha h^2 s(t_1-t_2)\big)\Big|\ .$$

Для последней суммы имеем

$$\Sigma_3^{(3)}=\sum_{s\le\frac{10L}{T}}\ \sum_{\substack{0<|t|\le\frac{4L}{T}\\ 1\le u\le\frac{8L}{T}}}\Big(\sum_{\substack{\frac{L}{4T}<t_1,t_2\le\frac{4L}{T}\\ t_1-t_2=t\\ t_1+t_2=u}}1\Big)\Big|\sum_{MT<h\le 4MT}e\big(2\alpha h^2 st\big)\Big|$$

$$\ll\frac{L}{T}\sum_{s\le\frac{10L}{T}}\ \sum_{t\le\frac{4L}{T}}\Big|\sum_{MT<h\le 4MT}e(2\alpha h^2 st)\Big|\ll\frac{L}{T}\sum_{m\le\frac{80L^2}{T^2}}\tau(m)\ \Big|\sum_{MT<h\le 4MT}e(\alpha h^2 m)\Big|\ .$$

Следовательно, в силу Леммы 1 и Леммы 7 (i), имеем

$$
\begin{aligned}
(488) \qquad \big(\Sigma_3^{(3)}\big)^2 &\ll \frac{L^2}{T^2}\Big(\sum_{m\le\frac{80L^2}{T^2}}\tau^2(m)\Big)\Big(\sum_{m\le\frac{80L^2}{T^2}}\Big|\sum_{MT<h\le 4MT}e(\alpha h^2 m)\Big|^2\Big)\\
&\ll \frac{L^4}{T^4}(\log X)^3\sum_{m\le\frac{80L^2}{T^2}}\ \sum_{MT<h_1,h_2\le 4MT}e\big(\alpha(h_1^2-h_2^2)m\big)\\
&\ll \frac{L^6M}{T^5}(\log X)^3+\frac{L^4}{T^4}(\log X)^3\ \Sigma_3^{(4)}\ ,
\end{aligned}
$$

где

$$
\Sigma_3^{(4)}=\sum_{\substack{MT<h_1,h_2\le 4MT\\ h_1\ne h_2}}\Big|\sum_{m\le\frac{80L^2}{T^2}}e\big(\alpha(h_1^2-h_2^2)m\big)\Big|\ .
$$

Используя (86), (429), (447), (449), (464), (485), Лемму 33 и Лемму 34 (ii), получим

$$
\begin{aligned}
(489) \qquad \Sigma_3^{(4)}&=\sum_{0<|s_1|,|s_2|\le 8MT}\Big(\sum_{\substack{TM<h_1,h_2\le 4MT\\ h_1-h_2=s_1\\ h_1+h_2=s_2}}1\Big)\Big|\sum_{m\le\frac{80L^2}{T^2}}e(\alpha s_1s_2m)\Big|\\
&\ll\sum_{s_1,s_2\le 8MT}\Big|\sum_{m\le\frac{80L^2}{T^2}}e(\alpha s_1s_2m)\Big|\ll\sum_{s_1,s_2\le 8MT}\min\Big(\frac{L^2}{T^2}\,,\ \frac{1}{||\alpha s_1s_2||}\Big)\\
&\ll\sum_{s\le 64M^2T^2}\tau(s)\ \min\Big(\frac{L^2}{T^2}\,,\ \frac{1}{||\alpha s||}\Big)\ \ll\ M^2L^2(\log X)^{2-50A}\ .
\end{aligned}
$$

Ввиду (86), (447), (449), (457), (480) и (485) – (489) имеем

$$
(490) \qquad \Sigma_3\ll X(\log X)^{-6A} \qquad \text{если} \qquad MT>K_0\ .
$$

Следовательно, пользуясь (477), (484) и (490), получим

$$
(491) \qquad |W_1|\ll X(\log X)^{2-6A}\ .
$$

Аналогично рассматриваем сумму первого типа W_1'. Однако, чтобы освободится от логарифмических весов в сумме по l, сначала воспользуемся Леммой 24 и получим

$$
W_1'\ll\log X\max_{L_2\in[L,L_1]}\Big|\sum_{\substack{M<m\le M_1\\ Z<ml\le 2Z}}\ \sum_{L<l\le L_2}a_m\,e(\alpha m^2l^2)\sum_{\substack{k\le K\\ k|ml+2}}\beta(k)\Big|.
$$

Теперь, используя предыдущие рассуждения, находим, что

$$
(492) \qquad |W_1'|\ll X(\log X)^{2-6A}\ .
$$

Оценка (441) является следствием (448), (476), (491) и (492). Лемма 56 доказана.

□

4.1.3. *Большие дуги.*

В етом параграфе мы докажем, что для суммы $\mathcal{U}_1$, определенной через (434), выполняется оценка (437). Однако, здесь нам не нужно ограничение на K_3, введенное в (86). Теперь мы предположим только, что

$$K_i \le X^{1/2}(\log X)^{-20000A}\,, \qquad i = 1, 2, 3\,. \tag{493}$$

В силу (430) и (433) имеем

$$I_1 = \sum_{q<Q} \sum_{a(q)^*} H(a,q)\,, \tag{494}$$

где

$$H(a,q) = \int_{-1/(q\tau)}^{1/(q\tau)} S_{k_1}\Big(\frac{a}{q}+\alpha\Big) S_{k_2}\Big(\frac{a}{q}+\alpha\Big) \times \tag{495}$$

$$\times\, S_{k_3}\Big(\frac{a}{q}+\alpha\Big) e\Big(-n\Big(\frac{a}{q}+\alpha\Big)\Big) d\alpha$$

и где $S_k(\alpha)$ определено через (428).

Обозначим

$$M(\alpha) = \sum_{m\le Y} \frac{1}{2\sqrt{m}}\, e(\alpha m) \tag{496}$$

Выполнена следующая лемма, доказательство которой можно найти в [71], гл.2, §4.

Лемма 57. *Предположим, что* $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \le 1/2$. *Имеет место асимптотическая формула*

$$M(\alpha) = \int_0^X e(\alpha t^2)\, dt \,+\, \mathcal{O}(1 + Y|\alpha|)\,,$$

□

Пусть $s_k(a,q)$ задано через (81). Определим величину $\mathcal{G}(\alpha;\, k,\, q,\, a)$ равенством

$$S_k\Big(\frac{a}{q}+\alpha\Big) = \frac{s_k(a,q)}{\varphi(k)} M(\alpha) \,+\, \mathcal{G}(\alpha;\, k,\, q,\, a)\,. \tag{497}$$

Выполнена следующая лемма, доказательство которой приведено в конце параграфа.

Лемма 58. *Предположим, что* Q *и* τ *заданы через* (429), $k \in \mathbb{N}$, $k \le X^{1/2}$, $(k,2) = 1$ *и пусть* $\Delta^*(x,q)$ *определено через* (90). *Тогда, если* α, a, q *удовлетворяют*

$$|\alpha| \le (q\tau)^{-1}\,, \qquad 0 \le a < q < Q\,, \qquad (a,q) = 1\,, \tag{498}$$

то имеет место оценка

$$\mathcal{G}(\alpha;\, k,\, q,\, a) \ll \big(\,1 + \Delta^*(X,[k,q])\,\big)\, X^2\, \tau^{-1}\,.$$

$\square$

Определим

(499) $$\Gamma_i\big(\alpha, q, a\big) \;=\; \sum_{k\le K_i} \beta_i(k)\, \mathcal{G}(\alpha\,;\,k\,,\,q,\,a)\;, \qquad i=1,2,3\;.$$

В силу (87), (90), (429), (493), Леммы 1, Леммы 7 (ii), (vi), $(viii)$, Леммы 18 и Леммы 58 имеем

(500)
$$\begin{aligned}
\max_{\substack{\alpha\,,\,q\,,\,a\\(498)}} |\Gamma_i\big(\alpha, q, a\big)| &\ll X^{2/3} \,+\, \frac{X^2}{\tau} \sum_{q\le Q}\sum_{k\le K_i} \tau_3(k)\,\Delta^*(X,[k,q]) \\
&\ll X^{2/3} \,+\, \frac{X^2}{\tau} \sum_{h\le K_iQ} \tau^4(h)\,\Delta^*(X,h) \\
&\ll X^{2/3} \,+\, \frac{X^2}{\tau}\Big(\sum_{h\le K_iQ} \tau^8(h)\,\Delta^*(X,h)\Big)^{1/2}\Big(\sum_{h\le K_iQ} \Delta^*(X,h)\Big)^{1/2} \\
&\ll X^{2/3} \,+\, \frac{X^2}{\tau}\Big(X\,\log X \sum_{h\le X}\frac{\tau^8(h)}{h}\Big)^{1/2}\Big(X\,(\log X)^{-18500A}\Big)^{1/2} \\
&\ll X\,(\log X)^{-7000A}\,.
\end{aligned}$$

Обозначим

(501) $$\mathcal{S}_i = S_{k_i}\Big(\frac{a}{q}+\alpha\Big)\,, \qquad \mathcal{M}_i = \frac{s_{k_i}(a,q)}{\varphi(k_i)} M(\alpha)\,, \qquad \mathcal{G}_i = \mathcal{S}_i - \mathcal{M}_i\;.$$

В силу (494) – (497), (501) и тождество

(502) $$\mathcal{S}_1\,\mathcal{S}_2\,\mathcal{S}_3 \;= \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 \,+\, \mathcal{S}_1\,\mathcal{S}_2\,\mathcal{G}_3 \,+\, \mathcal{S}_1\,\mathcal{G}_2\mathcal{M}_3 + \mathcal{G}_1\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3$$

имеем

(503) $$I_1 = J' + J_1 + J_2 + J_3\;,$$

где

(504) $$J' = \sum_{q<Q}\sum_{a(q)^*} \int_{-1/(q\tau)}^{1/(q\tau)} \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3\; e\Big(-n\Big(\frac{a}{q}+\alpha\Big)\Big)d\alpha\;,$$

и где J_1, J_2 и J_3 представляют собой вклады остальных слагаемых из правой части равенства (502). Следовательно, в силу (434) и (503), имеем

(505) $$\mathcal{U}_1 \ll \mathcal{U}' + \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_3\;,$$

где

(506)
$$\mathcal{U}' = \sum_{n\le Y}{}^{*} \Big| \sum_{\substack{k_i\le K_i\\ i=1,2,3}} \beta_1(k_1)\beta_2(k_2)\beta_3(k_3)\Big(J' - \frac{\pi}{4}\sqrt{n}\,\frac{\mathfrak{S}_{\mathbf{k}}(n,Q)}{\varphi(k_1)\varphi(k_2)\varphi(k_3)}\Big)\Big| ,$$

$$\mathcal{Z}_1 = \sum_{n\le Y}\Big| \sum_{\substack{k_i\le K_i\\ i=1,2,3}} \beta_1(k_1)\beta_2(k_2)\beta_3(k_3) \sum_{q<Q}\sum_{a(q)^*} \int_{-1/(q\tau)}^{1/(q\tau)} \mathcal{S}_1\,\mathcal{S}_2\,\mathcal{G}_3\; e\Big(-n\Big(\frac{a}{q}+\alpha\Big)\Big)d\alpha\,\Big|$$

и где определения $\mathcal{Z}_2$ и $\mathcal{Z}_3$ очевидны (в формуле для $\mathcal{Z}_2$ вместо $\mathcal{S}_1\,\mathcal{S}_2\,\mathcal{G}_3$ стоит величина $\mathcal{S}_1\,\mathcal{G}_2\,\mathcal{M}_3$, а в формуле для $\mathcal{Z}_3$ – соответственно величина $\mathcal{G}_1\,\mathcal{M}_2\,\mathcal{M}_3$).

Сначала установим, что

(507)
$$\mathcal{Z}_i \ll X^3(\log X)^{-A}\,, \qquad i=1,2,3\,.$$

Рассмотрим $\mathcal{Z}_1$. Имеем

$$\mathcal{Z}_1 \ll \sum_{q<Q}\sum_{a(q)^*}\sum_{n\le Y}\Big|\int_{-1/(q\tau)}^{1/(q\tau)} \mathcal{K}_1\Big(\frac{a}{q}+\alpha\Big)\,\mathcal{K}_2\Big(\frac{a}{q}+\alpha\Big)\,\Gamma_3\big(\alpha,q,a\big)\,e(-n\alpha)\,d\alpha\,\Big| ,$$

где $\mathcal{K}_i(\alpha)$ определены через (438) и $\Gamma_3\big(\alpha,q,a\big)$ – через (499). В силу Леммы 1 и Леммы 25 имеем

$$\mathcal{Z}_1^2 \ll Q^2X^2\sum_{q<Q}\sum_{a(q)^*}\sum_{n\le Y}\Big|\int_{-1/(q\tau)}^{1/(q\tau)} \mathcal{K}_1\Big(\frac{a}{q}+\alpha\Big)\,\mathcal{K}_2\Big(\frac{a}{q}+\alpha\Big)\,\Gamma_3\big(\alpha,q,a\big)\,e(-n\alpha)\,d\alpha\,\Big|^2$$

$$\ll Q^2X^2\sum_{q<Q}\sum_{a(q)^*}\int_{-1/(q\tau)}^{1/(q\tau)}\Big|\mathcal{K}_1\Big(\frac{a}{q}+\alpha\Big)\,\mathcal{K}_2\Big(\frac{a}{q}+\alpha\Big)\,\Gamma_3\big(\alpha,q,a\big)\,\Big|^2\,d\alpha$$

$$\ll Q^2X^2\max_{\substack{\alpha,\,q,\,a\\ (498)}}|\Gamma_3\big(\alpha,q,a\big)|^2\int_0^1\big|\mathcal{K}_1(\alpha)\,\mathcal{K}_2(\alpha)\big|^2\,d\alpha$$

$$\ll Q^2X^2\max_{\substack{\alpha,\,q,\,a\\ (498)}}|\Gamma_3\big(\alpha,q,a\big)|^2\int_0^1\Big(\big|\mathcal{K}_1(\alpha)\big|^4 + \big|\mathcal{K}_2(\alpha)\big|^4\Big)\,d\alpha\,.$$

Используя (429), (500) и Лемму 55, получаем оценку (507) для $\mathcal{Z}_1$.

Выражения $\mathcal{Z}_2$ и $\mathcal{Z}_3$ оцениваются аналогично, но нам еще нужно позаботиться об оценках величин $\mathfrak{N}_i(\alpha)$, $i=2,3$, определенных через

(508)
$$\mathfrak{N}_i(\alpha) = \sum_{k_i\le K_i}\beta_i(k_i)\,\mathcal{M}_i = \sum_{k\le K_i}\frac{\beta_i(k)s_k(a,q)}{\varphi(k)}\,M(\alpha)\,.$$

Воспользуемся следующей леммой, доказательство которой приведено в конце настоящего параграфа.

Лемма 59. *Если* $q \in \mathbb{N}$, $K_i \in \mathbb{R}$, $q \le X$, $1 \le K_i \le X$, *то имеет место оценка*

$$\int_0^1 |\,\mathfrak{N}_i(\alpha)\,|^4\,d\alpha \,\ll\, X^2\,(\log X)^{24}\,.$$

□

Рассмотрим $\mathcal{Z}_2$. В силу Леммы 1 и Леммы 25

$$\mathcal{Z}_2^2 \ll Q^2X^2 \sum_{q<Q}\,\sum_{a(q)^*}\,\sum_{n\le Y}\Big|\int_{-1/(q\tau)}^{1/(q\tau)} \mathcal{K}_1\Big(\frac{a}{q}+\alpha\Big)\,\Gamma_2\big(\alpha,q,a\big)\,\mathfrak{N}_3(\alpha)\,e(-n\alpha)\,d\alpha\,\Big|^2$$

$$\ll Q^2X^2 \sum_{q<Q}\,\sum_{a(q)^*}\,\int_{-1/(q\tau)}^{1/(q\tau)}\Big|\mathcal{K}_1\Big(\frac{a}{q}+\alpha\Big)\,\Gamma_2\big(\alpha,q,a\big)\,\mathfrak{N}_3(\alpha)\,\Big|^2\,d\alpha$$

$$\ll Q^2X^2 \max_{\substack{\alpha\,,\,q\,,\,a\\(498)}} |\Gamma_2\big(\alpha,q,a\big)|^2\,\mathfrak{X}\,,$$

где

$$\mathfrak{X} = \sum_{q<Q}\,\sum_{a(q)^*}\,\int_{-1/(q\tau)}^{1/(q\tau)}\Big(\Big|\mathcal{K}_1\Big(\frac{a}{q}+\alpha\Big)\Big|^4 \,+\, \big|\mathfrak{N}_3(\alpha)\big|^4\Big)\,d\alpha\,.$$

Далее, в силу Леммы 55 и Леммы 59 имеем

$$\mathfrak{X} \ll \sum_{q<Q}\,\sum_{a(q)^*}\,\int_0^1 \Big(\big|\mathcal{K}_1(\alpha)\big|^4 \,+\, \big|\mathfrak{N}_3(\alpha)\big|^4\Big)\,d\alpha \,\ll\, X^2\,Q^2\,(\log X)^{10^5}\,.$$

Из последних неравенств, (429) и (500) получаем оценку (507) для $\mathcal{Z}_2$. Аналогично оцениваем $\mathcal{Z}_3$ и, таким образом, устанавливаем, что (507) выполнено.

Рассмотрим величину J' , определенную через (504). В силу (82) и (501) имеем

(509) $$J' = \frac{1}{\varphi(k_1)\varphi(k_2)\varphi(k_3)}\sum_{q<Q} t_{\mathbf{k}}(q,n)\,\int_{-1/(q\tau)}^{1/(q\tau)} M^3(\alpha)\,e(-n\alpha)\,d\alpha\;.$$

Для исследования J' нам нужна информация о функции $t_{\mathbf{k}}(q,n)$ и об интеграле в правой части (509).

Следующая лемма дает необходимую информацию об етом интеграле. Доказательство можно найти в [71], гл.2, §4.

Лемма 60. *Предположим, что* $\omega \in (0,1/2)$. *Имеет место следующая асимптотическая формула*

(510) $$\int_{-\omega}^{\omega} M^3(\alpha)\,e(-n\alpha)\,d\alpha = \frac{\pi}{4}\sqrt{n} \,+\, \mathcal{O}(\,\omega^{-1/2})\,.$$

□

Теперь позаботимся о функции $t_{\mathbf{k}}(q,n)$. Определим при $p>2$

$$h_0(p,n)=\begin{cases}\frac{\left(\frac{-n}{p}\right)p^2+\left(3\left(\frac{n}{p}\right)+3\left(\frac{-1}{p}\right)\right)p+1}{(p-1)^3} & \text{если} \quad p\nmid n\,,\\ \frac{-3\left(\frac{-1}{p}\right)p-1}{(p-1)^2} & \text{если} \quad p\mid n\,;\end{cases} \tag{511}$$

$$h_1(p,n)=\begin{cases}\frac{\left(-2\left(\frac{n-4}{p}\right)-\left(\frac{-1}{p}\right)\right)p-1}{(p-1)^2} & \text{если} \quad p\nmid n-4\,,\\ \frac{\left(\frac{-1}{p}\right)p+1}{p-1} & \text{если} \quad p\mid n-4\,;\end{cases} \tag{512}$$

$$h_2(p,n)=\begin{cases}\frac{\left(\frac{n-8}{p}\right)p+1}{p-1} & \text{если} \quad p\nmid n-8\,,\\ -1 & \text{если} \quad p\mid n-8\,;\end{cases} \tag{513}$$

$$h_3(p,n)=\begin{cases}-1 & \text{если} \quad p\nmid n-12\,,\\ p-1 & \text{если} \quad p\mid n-12\,.\end{cases} \tag{514}$$

Выполнена следующая лемма, доказательство которой приведено в конце настоящего параграфа.

Лемма 61. *Функция* $t_{\mathbf{k}}(q,n)$ *мультипликативна по отношению к* q *. Далее, предположим, что* $n\equiv 3\ (8)$ *и что* $\mathbf{k}=\langle k_1,k_2,k_3\rangle\in\mathbb{N}^3$ *, где числа* k_1,k_2,k_3 *нечетны и бесквадратны. Тогда*

$$t_{\mathbf{k}}(2^l,n)=2^{l-1}\quad \textit{при}\quad l=1,2,3\,;\qquad t_{\mathbf{k}}(2^l,n)=0\quad \textit{при}\quad l>3\,. \tag{515}$$

Если $p>2$ *, то*

$$t_{\mathbf{k}}(p,n)=h_j(p,n)\quad \textit{при}\quad p^j\parallel k_1k_2k_3\,,\quad \textit{где } j=0,1,2,3\,, \tag{516}$$

$$t_{\mathbf{k}}(p^l,n)=0\quad \textit{при}\quad l>1\,. \tag{517}$$

Наконец, при тех же условиях для n *и* $\mathbf{k}$*, имеем*

$$t_{\mathbf{k}}(q,n)\ll\tau^3(q)\,q^{-1}\,(k_1,q)\,(k_2,q)\,(k_3,q)\,. \tag{518}$$

□

В силу последних двух лемм и (509) имеем

$$J'=\frac{\pi}{4}\,\frac{\sqrt{n}}{\varphi(k_1)\,\varphi(k_2)\,\varphi(k_3)}\,\sum_{q<Q}t_{\mathbf{k}}(q,n)\;+\;\mathcal{O}\Big(\tau^{1/2}\sum_{q<Q}\frac{\tau^3(q)\,(k_1,q)\,(k_2,q)\,(k_3,q)}{q^{1/2}\,\varphi(k_1)\,\varphi(k_2)\,\varphi(k_3)}\Big)\,.$$

Определение: С етого места $\sum'_{k\le X}$ обозначает, что суммирование ведется по нечетным бесквадратным числам.

Используя Лемму 7 (*viii*), (87), (506) и последнюю формулу, получим

$$\mathcal{U}'\;\ll\;(\log X)\,\big(\mathcal{U}''+\mathcal{U}'''\big)\,, \tag{519}$$

где

$$\mathcal{U}'' = X \sum_{n\le Y}{}^{*} \sum_{k_1,k_2,k_3\le X}{}' \frac{\tau_3(k_1)\,\tau_3(k_2)\,\tau_3(k_3)}{k_1\,k_2\,k_3}\, \Big| \sum_{q<Q} t_{\mathbf{k}}(q,n) \;-\; \mathfrak{S}_{\mathbf{k}}(n,Q) \Big| \,,$$

$$\mathcal{U}''' = \tau^{1/2}\,X^2 \sum_{k_1,k_2,k_3\le X} \sum_{q<Q} \frac{\tau^3(q)\,(k_1,q)\,(k_2,q)\,(k_3,q)\,\tau_3(k_1)\,\tau_3(k_2)\,\tau_3(k_3)}{q^{1/2}\,k_1\,k_2\,k_3} \,.$$

Величина $\mathcal{U}'''$ оценивается легко. Используя Лемму 7 (ii), Лемму 8 (i) и (429), получим

$$\mathcal{U}''' \ll \tau^{1/2}\,X^2 \sum_{q<Q} \frac{\tau^3(q)}{q^{1/2}} \Big(\sum_{k\le X} \frac{(k,q)\,\tau^2(k)}{k} \Big)^3 \ll \tau^{1/2}\,X^2\,(\log X)^{12} \sum_{q<Q} \frac{\tau^{12}(q)}{q^{1/2}} \tag{520}$$

$$\ll \tau^{1/2}\,X^2\,(\log X)^{12}\,Q^{1/2} \sum_{q<Q} \frac{\tau^{12}(q)}{q} \ll X^3\,(\log X)^{-400A} \,.$$

Теперь рассмотрим $\mathcal{U}''$. Пусть функция $\Psi(k,y)$ определена через (91) и пусть

$$T = 8 \prod_{p<Q} p \,. \tag{521}$$

В силу (84), (91) и Леммы 61 имеем

$$\mathfrak{S}_{\mathbf{k}}(n,Q) \;-\; \sum_{q<Q} t_{\mathbf{k}}(q,n) \;=\; \sum_{Q\le q\le X} t_{\mathbf{k}}(q,n)\Psi(q,Q) \;+\; \sum_{X<q\le T} t_{\mathbf{k}}(q,n)\Psi(q,Q) \,.$$

Следовательно

$$\mathcal{U}'' \;\ll\; X\,\big(\mathcal{U}^{*} + \mathcal{U}^{**}\big) \,, \tag{522}$$

где

$$\mathcal{U}^{*} = \sum_{n\le Y}{}^{*} \sum_{k_1,k_2,k_3\le X}{}' \frac{\tau^2(k_1)\,\tau^2(k_2)\,\tau^2(k_3)}{k_1\,k_2\,k_3}\, \Big| \sum_{Q\le q\le X} t_{\mathbf{k}}(q,n)\,\Psi(q,Q) \Big| \,, \tag{523}$$

$$\mathcal{U}^{**} = \sum_{n\le Y}{}^{*} \sum_{k_1,k_2,k_3\le X}{}' \frac{\tau^2(k_1)\,\tau^2(k_2)\,\tau^2(k_3)}{k_1\,k_2\,k_3} \sum_{X<q\le T} \big| t_{\mathbf{k}}(q,n) \big|\, \Psi(q,Q) \,. \tag{524}$$

Рассмотрим $\mathcal{U}^{*}$. В силу Леммы 1 и Леммы 7 (ii) имеем

$$\mathcal{U}^{*2} \ll X^2\,(\log X)^{100} \sum_{k_1,k_2,k_3\le X}{}' (k_1k_2k_3)^{-1}\,\mathfrak{F} \tag{525}$$

где

$$\mathfrak{F} = \sum_{n\le Y} \Big| \sum_{Q\le q\le X} t_{\mathbf{k}}(q,n)\,\Psi(q,Q) \Big|^2 .$$

Используя (82), представим сумму $\mathfrak{F}$ в виде

$$\mathfrak{F} = \sum_{n\le Y} \Big| \sum_{q\le X} \sum_{\substack{1\le a\le q\\(a,q)=1}} \lambda_{q,a,\mathbf{k}}\, e_q(-na) \Big|^2 ,$$

где

$$\lambda_{q,a,\mathbf{k}} = \begin{cases} s_{k_1}(a,q)s_{k_2}(a,q)s_{k_3}(a,q)\,\Psi(q,Q) & \text{если} \quad Q\le q\le X\,,\\ 0 & \text{если} \quad q<Q\,.\end{cases}$$

В силу Леммы 29 имеем

$$\mathfrak{F} \ll X^2 \sum_{Q\le q\le X} \varpi_{\mathbf{k}}(q)\,, \tag{526}$$

где для $\mathbf{k} = \langle k_1,k_2,k_3\rangle \in \mathbb{N}^3$ мы определили

$$\varpi_{\mathbf{k}}(q) = \sum_{a(q)^*} \big|s_{k_1}(a,q)s_{k_2}(a,q)s_{k_3}(a,q)\big|^2\,.$$

Выполнена следующая лемма, доказательство которой приведено в конце настоящего параграфа.

Лемма 62. *Если* $\mathbf{k} = \langle k_1,k_2,k_3\rangle \in \mathbb{N}^3$*, где числа* k_1,k_2,k_3 *нечетны и бесквадратны, то имеем*

$$\varpi_{\mathbf{k}}(q) \ll \tau^6(q)\, q^{-2}\,(k_1,q)\,(k_2,q)\,(k_3,q)\,.$$

□

В силу (429), (525), (526), Леммы 7 (vi), Леммы 8 (i), (iii) и Леммы 62 имеем

$$U^{*2} \ll X^4\,(\log X)^{100} \sum_{k_1,k_2,k_3\le X}\ \sum_{Q\le q\le X} \frac{\tau^6(q)\,(k_1,q)\,(k_2,q)\,(k_3,q)}{q^2\,k_1\,k_2\,k_3} \tag{527}$$

$$\ll X^4\,(\log X)^{200} \sum_{Q\le q} \frac{\tau^9(q)}{q^2} \ll X^4\,(\log X)^{200} \sum_{Q\le q} q^{-3/2} \ll X^4\,(\log X)^{-400A}\,.$$

Рассмотрим $\mathcal{U}^{**}$. Пользуясь (518) и Леммой 8 (i), получим

$$\mathcal{U}^{**} \ll X^2 \sum_{X<q\le T} \Psi(q,Q)\,\frac{\tau^3(q)}{q}\Big(\sum_{k\le X}\frac{\tau^2(k)\,(k,q)}{k}\Big)^3 \ll X^2\,(\log X)^{12}\,\mathfrak{T}\,, \tag{528}$$

где

$$\mathfrak{T} = \sum_{X<q\le T} \Psi(q,Q)\,\frac{\tau^{12}(q)}{q}\,.$$

Далее, в силу Леммы 1 и Леммы 7 (ii), имеем

$$\mathfrak{T}^2 \ll \sum_{q\le T} \frac{\tau^{24}(q)}{q}\,\mathfrak{T}_1 \ll (\log T)^{2^{24}}\,\mathfrak{T}_1\,, \tag{529}$$

где

$$\mathfrak{T}_1 = \sum_{X \le q \le T} \frac{\Psi(q,Q)}{q}\,.$$

Оценим $\mathfrak{T}_1$, используя Лемму 27, и получим

$$\mathfrak{T}_1 \ll (\log T) \max_{M \in [X,T]} \Big(\frac{1}{M} \sum_{q \le M} \Psi(q,Q) \Big) \ll (\log T)\, \exp\Big(- \frac{\log X}{\log Q} \Big)\,. \tag{530}$$

Отметим, наконец, что в силу (521) и Леммы 16 (i) имеем $\log T \ll Q$. Тогда, используя (429) и (528) – (530), получим

$$\mathcal{U}^{**} \ll X^2 \exp\big(- \sqrt{\log X} \big)\,. \tag{531}$$

Оценка (437) для $\mathcal{U}_1$ является следствием из (505), (507), (519), (520), (522), (527) и (531).

Доказательство Предложения 3 закончено.

Теперь докажем леммы етого параграфа.

Доказательство Леммы 58. Легко проверить, что

$$S_k\Big(\frac{a}{q}+\alpha\Big) = \sum_{\substack{p \le X \\ p+2 \equiv 0 (k)}} (\log p) e\Big(\Big(\frac{a}{q}+\alpha\Big)p^2\Big) \tag{532}$$

$$= \sum_{\substack{m(q)^* \\ m+2 \equiv 0 ((k,q))}} e_q(am^2)\, \mathfrak{B}_{k,q,m}(X) \,+\, \mathcal{O}\big(Q \log X\big)\,,$$

где

$$\mathfrak{B}_{k,q,m}(X) = \sum_{\substack{p \le X \\ p+2 \equiv 0 (k) \\ p \equiv m (q)}} (\log p)\, e(\alpha p^2)\,.$$

Рассмотрим величину $\mathfrak{B}_{k,q,m}(X)$. В силу Леммы 5, если $(m,q)=1$ и $m+2 \equiv 0\ ((k,q))$ то существует $h = h(k,q,m) \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющее $(h,[k,q]) = 1$ и такое, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ сравнение $n \equiv h\ ([k,q])$ еквивалентно системе

$$n \equiv m\,(q)\,, \qquad n+2 \equiv 0\,(k)\,.$$

Используя (90), (498) и Лемму 24, получим

$$\mathfrak{B}_{k,q,m}(X) = \sum_{\substack{p\le X\\ p\equiv h([k,q])}} (\log p) e(\alpha p^2)$$

$$= -\int_0^X \Big(\sum_{\substack{p\le t\\ p\equiv h([k,q])}} \log p\Big) \frac{d}{dt} e(\alpha t^2)\,dt + \Big(\sum_{\substack{p\le X\\ p\equiv h([k,q])}} \log p\Big) e(\alpha X^2)$$

$$= -\int_0^X \Big(\frac{t}{\varphi([k,q])} + \mathcal{O}\big(\Delta^*(X,[k,q])\big)\Big)\frac{d}{dt}e(\alpha t^2)\,dt$$

$$+ \Big(\frac{X}{\varphi([k,q])} + \mathcal{O}\big(\Delta^*(X,[k,q])\big)\Big)e(\alpha X^2)$$

$$= \frac{1}{\varphi([k,q])}\Big(-\int_0^X t\,\frac{d}{dt}e(\alpha t^2)\,dt + Xe(\alpha X^2)\Big) + \mathcal{O}\Big(\Delta^*(X,[k,q])(1+|\alpha|X^2)\Big)$$

$$= \frac{1}{\varphi([k,q])}\int_0^X e(\alpha t^2)\,dt \;+\; \mathcal{O}\,\Big(\,\Delta^*(X,[k,q])\,\big(\,1 + X^2(q\tau)^{-1}\,\big)\,\Big)\,.$$

Теперь воспользуемся (498) и Леммой 57 и получим

$$\mathfrak{B}_{k,q,m}(X) = \frac{M(\alpha)}{\varphi([k,q])} \;+\; \mathcal{O}\,\Big(\,\Delta^*(X,[k,q])\,\big(1 + X^2(q\tau)^{-1}\big)\,\Big)\,. \tag{533}$$

Доказательство леммы следует из (81), (429), (532), (533) и Леммы 10.

□

Доказательство Леммы 59. Из (81), (87) и Леммы 7 (ii), $(viii)$ следует

$$\mathfrak{N}_i(\alpha) \ll |M(\alpha)|\,(\log X)^2 \sum_{k\le X}\frac{\tau^2(k)}{k} \ll |M(\alpha)|\,(\log X)^6\,.$$

Отсюда получаем, что

$$\int_0^1 |\,\mathfrak{N}_i(\alpha)\,|^4\,d\alpha \;\ll\; (\log X)^{24}\,\mathfrak{N}^*\,, \tag{534}$$

где $\mathfrak{N}^* = \int_0^1 |M(\alpha)|^4\,d\alpha$. Далее, используя (496) и Лемму 4 (ii), получим

$$\mathfrak{N}^* = \frac{1}{16}\sum_{\substack{m_1,\dots,m_4\le Y\\ m_1+m_2=m_3+m_4}} (m_1m_2m_3m_4)^{-1/2} \ll \sum_{k\le 2Y}\rho^2(k)\,, \tag{535}$$

где $\rho(k)=\sum_{m_1+m_2=k}(m_1m_2)^{-1/2}$. Очевидно

$$\rho(k)\ll\sum_{\substack{m_1+m_2=k\\ m_1\le k/2}}(m_1m_2)^{-1/2}\ll k^{-1/2}\sum_{m_1\le k}m_1^{-1/2}\ll 1\,. \tag{536}$$

Утверждение леммы является следствием (534) – (536).

□

Доказательство Леммы 61. Сначала докажем мультипликативность функции $t_{\mathbf{k}}(q,n)$ по отношению к q. Пусть $(q_1,q_2)=1$. В силу (82) и Леммы 3 имеем

$$t_{\mathbf{k}}(q_1q_2,n)=\sum_{\substack{a_1(q_1)^*\\ a_2(q_2)^*}}\Big(\prod_{i=1}^{3}s_{k_i}(a_1q_2+a_2q_1,q_1q_2)\Big)\,e_{q_1}(-na_1)\,e_{q_2}(-na_2)\,. \tag{537}$$

Пользуясь (81) и Леммой 3, получим, что при $(q_1,q_2)=(a_1,q_1)=(a_2,q_2)=1$ имеет место тождество

$$s_k(a_1q_2+a_2q_1,q_1q_2)=s_k(a_1,q_1)\,s_k(a_2,q_2)\,. \tag{538}$$

Мультипликативность $t_{\mathbf{k}}(q,n)$ следует из (82), (537) и (538).

Рассмотрим $t_{\mathbf{k}}(2^l,n)$. Используя (3), (81) и предположения для чисел n,k_1,k_2,k_3, получим

$$s_{k_i}(a,2^l)=\varphi(2^l)^{-1}\,T(2^l,a)\,. \tag{539}$$

Тогда (515) следует непосредственно из Леммы 21 (iii).

Рассмотрим $t_{\mathbf{k}}(p^l,n)$ для $p>2$ и $l>1$. Сначала установим, что

$$s_{k_i}(a,p^l)=0\qquad\text{если}\qquad p>2\,,\quad p\nmid a\,,\quad l>1\,. \tag{540}$$

Если $p\nmid k_i$, то из (81) следует $s_{k_i}(a,p^l)=\varphi(p^l)^{-1}\,T(p^l,a)$ и, в силу Леммы 21 (ii), равенство (540) выполнено.

Рассмотрим случай $p\mid k_i$. Тогда $(p^l,k_i)=p$ и, в силу (81) и Леммы 4 (i), имеем

$$s_{k_i}(a,p^l)=\frac{\varphi(p)}{\varphi(p^l)}\sum_{\substack{m(p^l)\\ m+2\equiv 0\,(p)}}e_{p^l}(am^2)\;=\;\frac{1}{p^{l-1}}\sum_{m(p^l)}e_{p^l}(am^2)\,\frac{1}{p}\sum_{h(p)}e_p((m+2)h)$$

$$=\frac{1}{p^l}\sum_{h(p)}e_p(2h)\,U(h)\,,$$

где

$$U(h)=\sum_{m(p^l)}e_{p^l}\big(am^2+hp^{l-1}m\big)\,.$$

Рассмотрим $U(h)$. Если $(n,p)=1$, то обозначим $\overline{n}=\overline{(n)}_{p^l}$. Используя (2), получим

$$U(h)=\sum_{m(p^l)}e_{p^l}\big(a(m^2+\overline{a}\,h\,p^{l-1}\,m)\big)=\sum_{m(p^l)}e_{p^l}\big(a(m+\overline{2}\,\overline{a}\,h\,p^{l-1})^2\big)=S(p^l,a)\,.$$

Отсюда видно, что $U(h)$ не зависит от h. Следовательно, в силу Леммы 4 (i), и в етом случае равенство (540) выполнено. Тогда имеем $t_{\mathbf{k}}(p^l, n) = 0$ если $p > 2$ и $l > 1$.

Нам осталось рассмотреть $t_{\mathbf{k}}(p, n)$ при $p > 2$. Если $p^\nu \parallel k_1k_2k_3$, где $\nu = 0, 1, 2, 3$, то p делит точно ν из чисел k_1, k_2, k_3. Из (3) и (81) следует, что

$$s_{k_i}(a, p) = \begin{cases} \frac{1}{p-1} T(p, a) & \text{если} \quad p \nmid k_i\,, \\ e_p(4a) & \text{если} \quad p \mid k_i\,. \end{cases} \tag{541}$$

Формулы (516) для $t_{\mathbf{k}}(p, n)$ получаются из (82), (541), Леммы 12 (i), Леммы 13 (iii), Леммы 19 (ii), (iii), Леммы 20 (iv), (v), Леммы 21 (ii) и Леммы 23.

Докажем, наконец, оценку (518) Предположим, что $q = 2^l m$, где $2 \nmid m$. Очевидно можем считать, что $l \le 3$ и $\mu^2(m) = 1$, потому что в противном случае (518) выполняется тривиально. Из (511) – (514) следует, что для $p > 2$ имеем

$$|h_0(p, n)| \le 8p^{-1}, \quad |h_1(p, n)| \le 2, \quad |h_2(p, n)| \le 2, \quad |h_3(p, n)| \le p\,. \tag{542}$$

Из етих неравенств и из Леммы 7 (iv) следует

$$\begin{aligned} |t_{\mathbf{k}}(q, n)| \ll |t_{\mathbf{k}}(m, n)| \, &\le \Big(\prod_{\substack{p \mid m \\ p \nmid k_1k_2k_3}} \frac{8}{p} \Big) \Big(\prod_{\substack{p \mid m \\ p \parallel k_1k_2k_3}} 2 \Big) \Big(\prod_{\substack{p \mid m \\ p^2 \parallel k_1k_2k_3}} 2 \Big) \Big(\prod_{\substack{p \mid m \\ p^3 \parallel k_1k_2k_3}} p \Big) \\ &\le 8^{\nu(m)} \Big(\prod_{\substack{p \mid m \\ p \nmid k_1k_2k_3}} \frac{1}{p} \Big) (m, k_1, k_2, k_3) \\ &\le \tau^3(m)\, m^{-1} \, \frac{(m, k_1)\,(m, k_2)\,(m, k_3)\,(m, k_1, k_2, k_3)}{(m, k_1, k_2)\,(m, k_1, k_3)\,(m, k_2, k_3)} \, (m, k_1, k_2, k_3) \\ &\le \tau^3(m)\, m^{-1} \, (m, k_1)\,(m, k_2)\,(m, k_3) \, \ll \, \tau^3(q)\, q^{-1} \, (q, k_1)\,(q, k_2)\,(q, k_3)\,. \end{aligned}$$

□

Доказательство Леммы 62. Из Леммы 3 и (538) следует, что функция $\varpi_{\mathbf{k}}(q)$ мультипликативна по отношению к q.

Пусть $q = 2^l m$, где $2 \nmid m$. Можем считать, что $l \le 3$ и $\mu^2(m) = 1$, потому что в противном случае, в силу (539), (540) и Леммы 21 (iii), будем иметь $\varpi_{\mathbf{k}}(q) = 0$.

Далее, из (541), Леммы 20 (iv), (v) и Леммы 21 (ii) следует, что если $p > 2$ и $p \nmid a$, то имеем

$$|s_{k_i}(a, p)| \le \begin{cases} 2p^{-1/2} & \text{если} \quad p \nmid k_i\,, \\ 1 & \text{если} \quad p \mid k_i\,. \end{cases}$$

Тогда если $p > 2$ и $p^\nu \parallel k_1k_2k_3$, где $\nu = 0,1,2,3$, то имеем $\varpi_{\mathbf{k}}(p) \le 2^6 p^{\nu-2}$. Следовательно

$$\varpi_{\mathbf{k}}(q) \ll \varpi_{\mathbf{k}}(m) \le \tau^6(m) \prod_{\nu=0}^{3} \prod_{\substack{p|m \\ p^\nu \| k_1k_2k_3}} p^{\nu-2}$$

$$= \tau^6(m)\, m^{-2} \left(\frac{(m,k_1)\,(m,k_2)\,(m,k_3)\,(m,k_1,k_2,k_3)}{(m,k_1,k_2)\,(m,k_1,k_3)\,(m,k_2,k_3)} \right)^2$$

$$\times \frac{(m,k_1,k_2)^2\,(m,k_1,k_3)^2\,(m,k_2,k_3)^2}{(m,k_1)\,(m,k_2)\,(m,k_3)\,(m,k_1,k_2,k_3)^3}\,(m,k_1,k_2,k_3)$$

$$= \tau^6(m)\, m^{-2}\,(m,k_1)\,(m,k_2)\,(m,k_3) \ll \tau^6(q)\, q^{-2}\,(q,k_1)\,(q,k_2)\,(q,k_3)\,.$$

□

4.2. **Доказательство Теоремы 2.**

Пусть

(543) $$Q_0 = (\log X)^{0.6}\,, \qquad z_1 = z_2 = X^{0.167}\,, \qquad z_3 = X^{0.116}$$

и пусть Q определено через (429). Рассмотрим множество из простых чисел

$$\mathfrak{R} = \{\, p \ge 11 \;:\; p \nmid n-4 \,\} \cup \{\, p \ge 11 \;:\; p \mid n-4\,,\ p \equiv 1 \pmod 4 \,\}$$

и определим

(544) $$\mathcal{B}_0 = \prod_{3 \le p < Q_0} p\,, \quad \mathcal{P}_0 = \prod_{\substack{Q_0 \le p < Q \\ p \in \mathfrak{R}}} p\,, \quad \mathcal{P}_i = \prod_{Q \le p < z_i} p\,, \quad i = 1,2,3.$$

Рассмотрим сумму

(545) $$\Gamma = \sum_{n \in \mathcal{F}} w(n)\,,$$

где множество $\mathcal{F}$ определено в Теореме 2 и где

(546) $$w(n) = \sum_{\substack{p_1^2+p_2^2+p_3^2=n \\ (p_i+2\,,\,\mathcal{B}_0\mathcal{P}_0\mathcal{P}_i)=1 \\ i=1,2,3}} \log p_1 \log p_2 \log p_3\,.$$

Предположим, что $w(n) > 0$ для некоторого $n \in \mathcal{F}$. Тогда существуют простые числа p_1, p_2, p_3, удовлетворяющие условиям из области суммирования суммы в правой части (546). В силу того, что $n \equiv 3\ (4)$, имеем $2 \nmid p_1p_2p_3$. Для одного из етих простых числах, например p_1, выполнено $(p_1+2, \prod_{p<z_1} p) > 1$, потому что в противном случае мы имели бы $(p_i+2\,, \prod_{p<z_i} p) = 1$ для $i = 1,2,3$, а ето противоречит определениям $\mathcal{F}$ и z_i. Тогда p_1+2 имеет простой делитель p, такой что $p \mid n-4$ и $p \equiv 3\ (4)$. Следовательно $p_2^2 + p_3^2 \equiv 0\ (p)$ и отсюда, в силу

Леммы 13 (iii), получим $p_2 = p_3 = p$. Следовательно $w(n) \ll (\log X)^3 \nu(n-4) \le (\log X)^3\, \tau(n-4)$. Тогда, используя Лемму 7 (i), получим

$$\Gamma \ll (\log X)^3 \sum_{n\le Y} \tau(n-4) \ll X^2 \, (\log X)^4 \,. \tag{547}$$

Теперь воспользуемся векторным решетом, чтобы оценить величину Γ снизу. Сначала освободимся от слагаемых, отвечающих числам n, таких что $n-4$ имеет много разных простых делителей.
Определение: С этого места будем считать, что $\sum^{\#}$ обозначает суммирования по $n \in \mathbb{N}$, такие что $\nu(n-4) \le A \log\log X$.

Нам удобнее просеивать отдельно по простым числам из интервалов $[3, Q_0)$, $[Q_0, Q)$ и $[Q, \infty)$. В силу (545), (546) и Леммы 2 имеем

$$\Gamma \ge \sum_{n\in\mathcal{F}}^{\#} w(n) = \sum_{n\in\mathcal{F}}^{\#} \sum_{p_1^2+p_2^2+p_3^2=n} \log p_1 \log p_2 \log p_3 \; \Phi_1\Phi_2\Phi_3 \; \Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4\Lambda_5\Lambda_6 \,, \tag{548}$$

где

$$\Phi_i = \sum_{d|(p_i+2,\mathcal{B}_0)} \mu(d) \quad \text{для} \quad i = 1,2,3\,; \tag{549}$$

$$\Lambda_i = \sum_{d|(p_i+2,\mathcal{P}_i)} \mu(d) \quad \text{для} \quad i = 1,2,3\,; \qquad \Lambda_i = \sum_{d|(p_{i-3}+2,\mathcal{P}_0)} \mu(d) \quad \text{для} \quad i = 4,5,6\,.$$

Определим

$$\begin{aligned} D_1 = D_2 &= X^{1/2} \exp\Big(-4(\log X)^{0.6}\Big)\,, \\ D_3 &= X^{1/3} \exp\Big(-4(\log X)^{0.6}\Big)\,, \\ D_0 &= \exp\Big((\log X)^{0.6}\Big)\,. \end{aligned} \tag{550}$$

Через $\lambda_i^{\pm}(d)$ обозначим функции Россера порядка D_i, $0 \le i \le 3$ (они определены в § 2.5). Из (92) следует

$$|\lambda_i^{\pm}(d)| \le \mu^2(d)\,, \qquad \lambda_i^{\pm}(d) = 0 \quad \text{если} \quad d \ge D_i\,, \qquad 0 \le i \le 3\,. \tag{551}$$

Обозначим
(552)

$$\Lambda_i^{\pm} = \sum_{d|(p_i+2,\mathcal{P}_i)} \lambda_i^{\pm}(d) \;\; \text{для} \;\; i = 1,2,3\,; \qquad \Lambda_i^{\pm} = \sum_{d|(p_{i-3}+2,\mathcal{P}_0)} \lambda_0^{\pm}(d) \;\; \text{для} \;\; i = 4,5,6\,.$$

В силу Леммы 31 имеем $\Lambda_i^- \le \Lambda_i \le \Lambda_i^+$ для $1 \le i \le 6$. Теперь воспользуемся (548) и Леммой 30 и получим

$$\Gamma \ge \sum_{i=1}^{6} \Gamma_i \, - \, 5\,\Gamma_7\,, \tag{553}$$

где Γ_i – вклады членов из правой части неравенства Леммы 30. Рассмотрим, например, Γ_1. Имеем

$$\Gamma_1 = \sum_{n\in\mathcal{F}}^{\#} \sum_{p_1^2+p_2^2+p_3^2=n} \log p_1 \log p_2 \log p_3 \; \Phi_1\Phi_2\Phi_3 \; \Lambda_1^-\Lambda_2^+\Lambda_3^+\Lambda_4^+\Lambda_5^+\Lambda_6^+ \,.$$

Используя (549), (552) и меняя порядок суммирования, получим

$$\Gamma_1 = \sum_{n\in\mathcal{F}}^{\#} \sum_{\substack{\nu_i|\mathcal{B}_0\,,\ \delta_i|\mathcal{P}_0\,,\\ d_i|\mathcal{P}_i \quad i=1,2,3}} \mu(\nu_1)\,\mu(\nu_2)\,\mu(\nu_3)\,\lambda_1^-(d_1)\,\lambda_2^+(d_2)\,\lambda_3^+(d_3)\,\lambda_0^+(\delta_1)\,\lambda_0^+(\delta_2)\,\lambda_0^+(\delta_3)\,I_{\mathbf{k}}(n)\,,$$

где $\mathbf{k} = \langle \nu_1\delta_1 d_1,\ \nu_2\delta_2 d_2,\ \nu_3\delta_3 d_3\rangle$ и $I_{\mathbf{k}}(n)$ определено формулой (80).

Используя формулу (85), разделим Γ_1 на две части:

$$\Gamma_1 = \Gamma_1' \,+\, \Gamma_1''\,, \tag{554}$$

где Γ_1' и Γ_1'' – вклады главного члена и, соответственно, остатка в асимптотической формуле (85).

Рассмотрим Γ_1''. Запишем ету величину в виде

$$\Gamma_1'' = \sum_{n\in\mathcal{F}}^{\#} \sum_{\substack{k_i\le\mathcal{B}_0 D_0 D_i\\ i=1,2,3}} \gamma_1(k_1)\,\gamma_2(k_2)\,\gamma_3(k_3)\,\mathfrak{R}_{\mathbf{k}}(n,Q)\,,$$

где $\mathbf{k} = \langle k_1,\ k_2,\ k_3\rangle$,

$$\gamma_1(k) = \sum_{\substack{\nu|\mathcal{B}_0,\ \delta|\mathcal{P}_0,\ d|\mathcal{P}_1\\ \nu\delta d=k}} \mu(\nu)\,\lambda_0^+(\delta)\,\lambda_1^-(d)\,; \qquad \gamma_i(k) = \sum_{\substack{\nu|\mathcal{B}_0,\ \delta|\mathcal{P}_0,\ d|\mathcal{P}_i\\ \nu\delta d=k}} \mu(\nu)\,\lambda_0^+(\delta)\,\lambda_i^+(d)\,, \quad i=2,3\,.$$

Отметим, что, в силу (544) и Леммы 16 (i), имеем $\mathcal{B}_0 \ll \exp\big(2(\log X)^{0.6}\big)$. Тогда из (550), (551) и Предложения 3 следует

$$\Gamma_1'' \ll\, X^3(\log X)^{-A}\,. \tag{555}$$

Рассмотрим Γ_1'. Из (81) и (82) следует, что

$$t_{h_1l_1,h_2l_2,h_3l_3}(q,n) = t_{h_1,h_2,h_3}(q,n) \qquad \text{если} \qquad (l_1l_2l_3,q)=1\,.$$

Отсюда видно, что функция

$$\Phi(m,n) = \sum_{\delta_1,\delta_2,\delta_3|m} \frac{\mu(\delta_1)\mu(\delta_2)\mu(\delta_3)}{\varphi(\delta_1)\varphi(\delta_2)\varphi(\delta_3)} \prod_{p|m}\big(1+t_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}(p,n)\big) \tag{556}$$

мультипликативна по отношению к m. Далее, используя (84), получим, что если $\nu_i \mid \mathcal{B}_0$, $\delta_i \mid \mathcal{P}_0$ и $d_i \mid \mathcal{P}_i$, $i=1,2,3$ и если $\mathbf{k} = \langle \nu_1\delta_1 d_1, \nu_2\delta_2 d_2, \nu_3\delta_3 d_3\rangle$, то

$$\mathfrak{S}_{\mathbf{k}}(n,Q) = 8\prod_{3\le p<Q_0}\big(1+t_{\nu_1,\nu_2,\nu_3}(p,n)\big)\prod_{Q_0\le p<Q}\big(1+t_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}(p,n)\big)\,.$$

Из етих замечаний следует, что

$$\Gamma_1' = 2\pi\sum_{n\in\mathcal{F}}^{\#} n^{1/2}\,\Phi(\mathcal{B}_0,n)\,\mathcal{H}^+(n)\,\mathcal{G}_1^-\,\mathcal{G}_2^+\,\mathcal{G}_3^+\,, \tag{557}$$

где

$$\mathcal{H}^{\pm}(n) = \sum_{\delta_1,\delta_2,\delta_3|\mathcal{P}_0} \frac{\lambda_0^{\pm}(\delta_1)\lambda_0^{+}(\delta_2)\lambda_0^{+}(\delta_3)}{\varphi(\delta_1)\varphi(\delta_2)\varphi(\delta_3)} \prod_{Q_0\le p<Q} \left(1 + t_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}(p,n)\right)\,, \tag{558}$$

$$\mathcal{G}_i^{\pm} = \sum_{d|\mathcal{P}_i} \frac{\lambda_i^{\pm}(d)}{\varphi(d)}\,, \qquad i = 1,2,3\,. \tag{559}$$

Пользуясь (554), (555) и (557), получим асимптотическую формулу для Γ_1.

Мы исследуем суммы Γ_i, $2 \le i \le 7$, тем же способом и получаем аналогичные формулы. Потом воспользуемся (553) и, наконец, получим

(560)

$$\Gamma \ge 2\pi \sum_{n\in\mathcal{F}}^{\#} n^{1/2}\, \Phi(\mathcal{B}_0,n) \Big(3\,\mathcal{H}^{-}(n)\, \mathcal{G}_1^{+}\, \mathcal{G}_2^{+}\, \mathcal{G}_3^{+} \,+\, \mathcal{H}^{+}(n) \big(\mathcal{G}_1^{-}\, \mathcal{G}_2^{+}\, \mathcal{G}_3^{+}$$

$$+\, \mathcal{G}_1^{+}\, \mathcal{G}_2^{-}\, \mathcal{G}_3^{+} \,+\, \mathcal{G}_1^{+}\, \mathcal{G}_2^{+}\, \mathcal{G}_3^{-} \,-\, 5\,\mathcal{G}_1^{+}\, \mathcal{G}_2^{+}\, \mathcal{G}_3^{+} \big) \Big) \,+\, \mathcal{O}\Big(X^3 (\log X)^{-A} \Big)\,.$$

Чтобы продолжить дальше, нам нужны несколько лемм, доказательства которых приведены в конце настоящего параграфа.

Лемма 63. *Выполнены оценки*

$$\mathcal{G}_i^{\pm} \ll \log X\,, \qquad i = 1,2,3\,.$$

□

Лемма 64. *Пусть* $n \equiv 3\,(24)$, $n \not\equiv 0\,(5)$. *Тогда имеем*

$$(\log\log X)^{-22} \ll \Phi(\mathcal{B}_0,n) \ll (\log\log X)^{22}\,.$$

□

Очевидно, что $\frac{\log D_0}{\log Q} \to \infty$ при $X \to \infty$. Следовательно, можно предположить, что суммы $\mathcal{H}^{\pm}(n)$ приближаются через суммы

$$\mathcal{H}_0(n) = \sum_{\delta_1,\delta_2,\delta_3|\mathcal{P}_0} \frac{\mu(\delta_1)\mu(\delta_2)\mu(\delta_3)}{\varphi(\delta_1)\varphi(\delta_2)\varphi(\delta_3)} \prod_{Q_0\le p<Q} \left(1 + t_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}(p,n)\right). \tag{561}$$

Точнее, верна следующая

Лемма 65. *Равномерно по* $n \in \mathcal{F}$, *удовлетворяющих* $\nu(n-4) \le A\log\log X$, *выполнена асимптотическая формула*

$$\mathcal{H}^{\pm}(n) = \mathcal{H}_0(n) \,+\, \mathcal{O}\big((\log X)^{-2A}\big)\,.$$

□

Сумма $\mathcal{H}_0(n)$ уже оценивается легко.

Лемма 66. *Имеет место оценка*

$$(\log\log X)^{-30} \ll \mathcal{H}_0(n) \ll (\log\log X)^{30}\,.$$

$\square$

Используя (560) и Леммы 63 – 65, получим

$$\Gamma \geq 2\pi \sum_{n\in\mathcal{F}}^{\#} n^{1/2}\, \Phi(\mathcal{B}_0, n)\, \mathcal{H}_0(n)\, \mathfrak{N} \;+\; \mathcal{O}\Big(\, X^3(\log X)^{-A} \Big)\,. \tag{562}$$

где

$$\mathfrak{N} \;=\; \mathcal{G}_1^-\,\mathcal{G}_2^+\,\mathcal{G}_3^+ \;+\; \mathcal{G}_1^+\,\mathcal{G}_2^-\,\mathcal{G}_3^+ \;+\; \mathcal{G}_1^+\,\mathcal{G}_2^+\,\mathcal{G}_3^- \;-\; 2\,\mathcal{G}_1^+\,\mathcal{G}_2^+\,\mathcal{G}_3^+\,.$$

Величину $\mathfrak{N}$ оцениваем снизу следующим образом:

Лемма 67. *Имеем*

$$\mathfrak{N} \gg (\log\log X)^3\,(\log X)^{-3}\,.$$

$\square$

Следовательно, используя (562), Лемму 64, Лемму 66 и Лемму 67, получим

$$\Gamma \geq (\log X)^{-5} \sum_{n\in\mathcal{F}}^{\#} n^{1/2} \;+\; \mathcal{O}\Big(\, X^3(\log X)^{-A} \Big)\,.$$

Из последней оценки и (547) следует

$$\sum_{n\in\mathcal{F}}^{\#} n^{1/2} \ll X^3(\log X)^{5-A}\,. \tag{563}$$

Обозначим $\mathcal{Y}^{\#}(Y) = \sum_{n\in\mathcal{F}}^{\#} 1$. Используя (563), получим

$$\mathcal{Y}^{\#}(Y) \;=\; \sum_{\substack{n\in\mathcal{F}\\ n>X^2(\log X)^{-A/2}}}^{\#} 1 \;+\; \mathcal{O}(X^2(\log X)^{-A/2})$$

$$\ll \sum_{n\in\mathcal{F}}^{\#} \Big(n\, X^{-2}(\log X)^{A/2} \Big)^{1/2} \;+\; X^2(\log X)^{-A/2} \;\ll\; X^2(\log X)^{-A/2}\,.$$

Осталось отметить, что в силу Леммы 28, имеем

$$\mathcal{Y}(Y) - \mathcal{Y}^{\#}(Y) \;\ll\; 1 \;+ \sum_{\substack{n\leq Y\\ \nu(n)\geq(A-1)\log\log Y}} 1 \;\ll\; X^2\,(\log X)^{-A}\,.$$

Следовательно

$$\mathcal{Y}(Y) \;\ll\; X^2\,(\log X)^{-A/2}\,.$$

Поскольку постоянная A сколь угодно большая, то Теорема 2 доказана.

Теперь докажем наши леммы.

Доказательство Леммы 63. В силу (543), (544), (551), Леммы 9 и Леммы 16 (*iii*) имеем

$$|\,\mathcal{G}_i^{\pm}| \leq \sum_{d|\mathcal{P}_i} \frac{1}{\varphi(d)} = \prod_{p|\mathcal{P}_i} \Big(1 + \frac{1}{p-1}\Big) \ll \prod_{p\leq X} \Big(1 + \frac{1}{p}\Big) \ll \log X\,.$$

$\square$

Доказательство Леммы 64. Из (556) следует, что

$$
\oplus(p,n) = 1 + t_{1,1,1}(p,n) - \frac{3}{p-1}\big(1 + t_{p,1,1}(p,n)\big) + \frac{3}{(p-1)^2}\big(1 + t_{p,p,1}(p,n)\big) - \frac{1}{(p-1)^3}\big(1 + t_{p,p,p}(p,n)\big)\,. \tag{564}
$$

Используя (81), (82) и Лемму 4 (i), получим

$$
\begin{aligned}
1 + t_{1,1,1}(p,n) &= 1 + \frac{1}{(p-1)^3}\sum_{a(p)^*}\ \sum_{m_1,m_2,m_3(p)^*} e_p\big(\,a(m_1^2+m_2^2+m_3^2-n)\,\big) \\
&= \frac{1}{(p-1)^3}\sum_{m_1,m_2,m_3(p)^*}\ \sum_{a(p)} e_p\big(\,a(m_1^2+m_2^2+m_3^2-n)\,\big) \\
&= \frac{p}{(p-1)^3}\sum_{\substack{m_1,m_2,m_3(p)^* \\ m_1^2+m_2^2+m_3^2\equiv n\,(p)}} 1\,.
\end{aligned} \tag{565}
$$

Аналогично

$$
1 + t_{p,1,1}(p,n) = \frac{p}{(p-1)^2}\sum_{\substack{m_1,m_2,m_3(p)^* \\ m_1^2+m_2^2+m_3^2\equiv n\,(p) \\ m_1\equiv -2\,(p)}} 1 \tag{566}
$$

и также

$$
1 + t_{p,p,1}(p,n) = \frac{p}{p-1}\sum_{\substack{m_1,m_2,m_3(p)^* \\ m_1^2+m_2^2+m_3^2\equiv n\,(p) \\ m_1\equiv m_2\equiv -2\,(p)}} 1\,, \tag{567}
$$

$$
1 + t_{p,p,p}(p,n) = p\sum_{\substack{m_1,m_2,m_3(p)^* \\ m_1^2+m_2^2+m_3^2\equiv n\,(p) \\ m_1\equiv m_2\equiv m_3\equiv -2\,(p)}} 1 = \begin{cases} p & \text{если}\ \ n\equiv 12\,(p)\,, \\ 0 & \text{если}\ \ n\not\equiv 12\,(p)\,. \end{cases} \tag{568}
$$

Из (564) – (568) легко получается, что

$$
\Phi(p,n) = \frac{p}{(p-1)^3}\sum_{\substack{m_1,m_2,m_3(p)^* \\ m_1^2+m_2^2+m_3^2\equiv n\,(p) \\ m_1,m_2,m_3\not\equiv -2\,(p)}} 1\,.
$$

Теперь, пользуясь арифметическими условиями, наложенными на n, устанавливаем простым подсчитыванием, что

$$
10^{-6} < \Phi(p,n) < 100 \qquad \text{если} \qquad 2 < p < 22\,.
$$

Далее, используя (516), (542) и (564), получим, что

$$1-\frac{22}{p}<\Phi(p,n)<1+\frac{22}{p}\qquad\text{если}\qquad p>22\,. \tag{569}$$

Осталось воспользоваться мультипликативностью $\Phi(m,n)$ по отношению к m, Леммой 16 (iii) и определением (544) для $\mathcal{B}_0$.

□

Доказательство Леммы 65. Рассмотим, например, сумму $\mathcal{H}^+(n)$. Имеем

$$\mathcal{H}^+(n)=\mathcal{H}'+\mathcal{H}''\,, \tag{570}$$

где в $\mathcal{H}'$ суммирование ведется по $\delta_1,\delta_2,\delta_3\mid\mathcal{P}_0$, таким что

$$(\delta_1,\delta_2),(\delta_1,\delta_3),(\delta_2,\delta_3)\le(\log X)^{6A}\,.$$

Сумма $\mathcal{H}''$ является вкладом из других слагаемых.
Для $\delta_1,\delta_2,\delta_3\mid\mathcal{P}_0$ обозначим

$$\Pi=\Pi_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}(n)=\prod_{Q_0\le p<Q}\big(1+t_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}(p.n)\big)\,. \tag{571}$$

Используя (516), (542), Лемму 7 (iv), (v) и Лемму 16 (iii), получим

$$\Pi\ll(\log X)^8\tau^2(\delta_1)\tau^2(\delta_2)\tau^2(\delta_3)(\delta_1,\delta_2,\delta_3)\,.$$

Далее, в силу етой оценки, Леммы 7 $(viii)$ и (551) имеем

$$\mathcal{H}''\ll(\log X)^9\sum_{\substack{\delta_1,\delta_2,\delta_3\mid\mathcal{P}_0\\(\delta_1,\delta_2)>(\log X)^{6A}}}\frac{\tau^2(\delta_1)\,\tau^2(\delta_2)\,\tau^2(\delta_3)\,(\delta_1,\delta_2,\delta_3)}{\delta_1\,\delta_2\,\delta_3}$$

$$=(\log X)^9\sum_{\substack{t\mid\mathcal{P}_0\\t>(\log X)^{6A}}}\ \sum_{\substack{\delta_1,\delta_2\mid\mathcal{P}_0\\(\delta_1,\delta_2)=t}}\frac{\tau^2(\delta_1)\,\tau^2(\delta_2)}{\delta_1\,\delta_2}\sum_{\delta_3\mid\mathcal{P}_0}\frac{\tau^2(\delta_3)\,(t,\delta_3)}{\delta_3}\,.$$

В силу (83), (544), Леммы 7 (iv), Леммы 9 и Леммы 16 (iii) имеем

$$\sum_{\delta\mid\mathcal{P}_0}\frac{\tau^2(\delta)\,(t,\delta)}{\delta}\le\prod_{p<Q}\Big(1+\frac{4(t,p)}{p}\Big)\ll\tau^3(t)\,\log X\,.$$

Следовательно, используя Лемму 7 (v), Лемму 8 (iii), Лемму 9 и Лемму 16 (iii), получим

$$
\begin{aligned}
(572) \qquad \mathcal{H}'' &\ll (\log X)^{10} \sum_{\substack{t|\mathcal{P}_0 \\ t>(\log X)^{6A}}} \tau^3(t) \sum_{\substack{\delta_1,\delta_2|\mathcal{P}_0 \\ \delta_1,\delta_2\equiv 0\,(t)}} \frac{\tau^2(\delta_1)\,\tau^2(\delta_2)}{\delta_1\,\delta_2} \\
&\ll (\log X)^{10} \sum_{\substack{t|\mathcal{P}_0 \\ t>(\log X)^{6A}}} \frac{\tau^7(t)}{t^2} \Big(\sum_{l|\mathcal{P}_0} \frac{\tau^2(l)}{l} \Big)^2 \ll (\log X)^{11} \sum_{t>(\log X)^{6A}} t^{-3/2} \\
&\ll (\log X)^{-2A}\,.
\end{aligned}
$$

Теперь рассмотрим $\mathcal{H}'$. Из (511) следует, что $1+h_0(p,n)>0$ для $p \ge Q_0$. Соответственно, из (512), (544) и Леммы 13 (iii) следует, что $1+h_1(p,n)>0$ для $p \mid \mathcal{P}_0$. Определим

$$
(573) \qquad \xi = \xi(n) = \prod_{Q_0 \le p < Q} \big(1+h_0(p,n)\big)\,,
$$

$$
(574) \qquad \omega_i(k) = \omega_i(k,n) = \prod_{\substack{p|k \\ p>2}} \frac{1+h_i(p,n)}{1+h_0(p,n)}\,, \qquad i=1,2,3\,,
$$

$$
(575) \qquad \omega(k) = \omega(k,n) = \begin{cases} k\,\omega_1(k)\,\varphi(k)^{-1} & \text{если} \quad (k, 2\mathcal{B}_0)=1\,, \\ 0 & \text{в противном случае}\,. \end{cases}
$$

Тогда, в силу (571) и Леммы 61, имеем

$$
(576) \qquad \Pi = \xi\,\Pi_1\,\Pi_2\,\Pi_3\,,
$$

где

$$
\Pi_i = \prod_{p^i \,\|\, \delta_1\delta_2\delta_3} \omega_i(p)\,, \qquad i=1,2,3\,.
$$

Пусть $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \mid \mathcal{P}_0$ и

$$
(577) \qquad (\delta_1,\delta_2)=l_3\,, \qquad (\delta_1,\delta_3)=l_2\,, \qquad (\delta_2,\delta_3)=l_1\,.
$$

В етом случае выполнено $(\delta_1,\delta_2,\delta_3)=(l_1,l_2,l_3)$ и тогда имеем

(578)

$$
\Pi_1 = \frac{\omega_1(\delta_1)\,\omega_1(\delta_2)\,\omega_1(\delta_3)\,\omega_1\big((\delta_1,\delta_2,\delta_3)\big)^3}{\omega_1\big((\delta_2,\delta_3)\big)^2\,\omega_1\big((\delta_1,\delta_3)\big)^2\,\omega_1\big((\delta_1,\delta_2)\big)^2} = \frac{\omega_1(\delta_1)\,\omega_1(\delta_2)\,\omega_1(\delta_3)\,\omega_1\big((l_1,l_2,l_3)\big)^3}{\omega_1(l_1)^2\,\omega_1(l_2)^2\,\omega_1(l_3)^2}\,.
$$

Далее, выполнено

$$\Pi_2 = \omega_2\Big(\frac{l_1}{(l_1,l_2,l_3)}\Big)\,\omega_2\Big(\frac{l_2}{(l_1,l_2,l_3)}\Big)\,\omega_2\Big(\frac{l_3}{(l_1,l_2,l_3)}\Big)\,, \qquad \Pi_3 = \omega_3\big((l_1,l_2,l_3)\big)\,. \tag{579}$$

Следовательно, в силу (576) – (579), имеем

$$\Pi = \xi\,\omega_1(\delta_1)\,\omega_1(\delta_2)\,\omega_1(\delta_3)\,\widetilde{\kappa}(l_1,l_2,l_3)\,, \tag{580}$$

где функция $\widetilde{\kappa}$ определена для $h_1,h_2,h_3 \mid \mathcal{P}_0$ формулой

$$\widetilde{\kappa}(h_1,h_2,h_3) = \frac{\omega_1\big((h_1,h_2,h_3)\big)^3\,\omega_3\big((h_1,h_2,h_3)\big)}{\omega_1(h_1)^2\,\omega_1(h_2)^2\,\omega_1(h_3)^2}$$

$$\times\ \omega_2\Big(\frac{h_1}{(h_1,h_2,h_3)}\Big)\,\omega_2\Big(\frac{h_2}{(h_1,h_2,h_3)}\Big)\,\omega_2\Big(\frac{h_3}{(h_1,h_2,h_3)}\Big)\,.$$

Из (511) – (514) и из определения для $\omega_i(k)$ легко получить, что для $h_1,h_2,h_3 \mid \mathcal{P}_0$ имеем

$$\widetilde{\kappa}(h_1,h_2,h_3) \ll (h_1h_2h_3)^{10}\,. \tag{581}$$

В действительности, можно получить гораздо лучшую оценку, но для наших целей ето бесполезно.

В силу (575) и (580) имеем

$$\mathcal{H}' = \xi \sum_{\substack{\delta_1,\delta_2,\delta_3\mid\mathcal{P}_0\\ (\delta_i,\delta_j)\le(\log X)^{6A}\\ 1\le i<j\le 3}} \widetilde{\kappa}\big(\,(\delta_2,\delta_3)\,,\,(\delta_1,\delta_3)\,,\,(\delta_1,\delta_2)\,\big)\ \prod_{\nu=1}^{3}\Big(\lambda_0^+(\delta_\nu)\frac{\omega(\delta_\nu)}{\delta_\nu}\Big)\,,$$

$$= \xi \sum_{\substack{l_1,l_2,l_3\mid\mathcal{P}_0\\ l_1\,,\,l_2\,,\,l_3\le(\log X)^{6A}}} \widetilde{\kappa}(l_1,l_2,l_3) \sum_{\substack{\delta_1\,,\,\delta_2\,,\,\delta_3\mid\mathcal{P}_0\\ (\delta_2,\delta_3)=l_1\ ,\ \ (\delta_1,\delta_3)=l_2\\ (\delta_1,\delta_2)=l_3}} \prod_{\nu=1}^{3}\Big(\lambda_0^+(\delta_\nu)\frac{\omega(\delta_\nu)}{\delta_\nu}\Big)\,.$$

Используя Лемму 2, получим

$$\mathcal{H}' = \xi \sum_{\substack{l_1,l_2,l_3\mid\mathcal{P}_0\\ l_1\,,\,l_2\,,\,l_3\le(\log X)^{6A}}} \widetilde{\kappa}(l_1,l_2,l_3) \sum_{\substack{\delta_1\,,\,\delta_2\,,\,\delta_3\mid\mathcal{P}_0\\ \delta_1\equiv 0\ ([l_2,l_3])\ ,\ \ \delta_2\equiv 0\ ([l_1,l_3])\\ \delta_3\equiv 0\ ([l_1,l_2])}} \prod_{\nu=1}^{3}\Big(\lambda_0^+(\delta_\nu)\frac{\omega(\delta_\nu)}{\delta_\nu}\Big)$$

$$\times\ \Big(\sum_{h_1\mid\left(\frac{\delta_2}{l_1},\frac{\delta_3}{l_1}\right)} \mu(h_1)\Big)\ \Big(\sum_{h_2\mid\left(\frac{\delta_1}{l_2},\frac{\delta_3}{l_2}\right)} \mu(h_2)\Big)\ \Big(\sum_{h_3\mid\left(\frac{\delta_1}{l_3},\frac{\delta_2}{l_3}\right)} \mu(h_3)\Big)\,.$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{H}' = \xi \sum_{\substack{l_1,l_2,l_3|\mathcal{P}_0\\ l_1\,,l_2\,,l_3\le(\log X)^{6A}}} \widetilde{\kappa}(l_1,l_2,l_3) \sum_{\substack{h_i|\frac{\mathcal{P}_0}{l_i}\\ i=1,2,3}} \mu(h_1)\,\mu(h_2)\,\mu(h_3)\,\widetilde{\mathcal{D}_1}\,\widetilde{\mathcal{D}_2}\,\widetilde{\mathcal{D}_3}\,, \tag{582}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{D}_i} = \sum_{\substack{\delta|\mathcal{P}_0\\ \delta\equiv 0\ (\rho_i)}} \lambda_0^+(\delta)\frac{\omega(\delta)}{\delta}\,, \qquad i=1,2,3$$

и где

$$\rho_1=[l_2h_2,l_3h_3]\,,\qquad \rho_2=[l_1h_1,l_3h_3]\,,\qquad \rho_3=[l_1h_1,l_2h_2]\,. \tag{583}$$

Для рассмотрения сумм $\widetilde{\mathcal{D}_i}$ воспользуемся Леммой 32. Сначала докажем, что существует постоянная $c=c(A)$ такая, что для всех чисел $n\in\mathcal{F}$, удовлетворяющих $\nu(n-4)\le A\log\log X$, и для всех $w_2,w_2\in\mathbb{R}$, таких что $2\le w_1<w_2$, выполнена оценка

$$\prod_{w_1\le p<w_2}\Big(1-\frac{\omega(p)}{p}\Big)^{-1}\le\frac{\log w_2}{\log w_1}\Big(1+\frac{c}{\log w_1}\Big)\,. \tag{584}$$

Отметим, что только в етом месте в доказательстве мы будем пользоватся ограничением на $\nu(n-4)$.

Сначала рассмотрим случай $Q_0\le w_1<w_2$. Из (511), (512), (574), (575) и Леммы 13 (iii) следует, что при $p\in[w_1,w_2)$ имеем

$$\omega(p)=\begin{cases}1+\mathcal{O}(p^{-1}) & \text{если}\quad p\nmid n-4\,,\\ 2+\mathcal{O}(p^{-1}) & \text{если}\quad p\mid n-4\quad\text{и}\quad p\equiv 1\,(4)\,,\\ 0 & \text{если}\quad p\mid n-4\quad\text{и}\quad p\equiv 3\,(4)\,.\end{cases} \tag{585}$$

Следовательно, пользуясь формулой Тейлора, Леммой 8 (iii) и Леммой 16 (ii), получим

$$\log\prod_{w_1\le p<w_2}\Big(1-\frac{\omega(p)}{p}\Big)^{-1} = -\sum_{w_1\le p<w_2}\log\Big(1-\frac{\omega(p)}{p}\Big) = \sum_{w_1\le p<w_2}\Big(\frac{\omega(p)}{p}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{p^2}\Big)\Big)$$

$$= \sum_{\substack{w_1\le p<w_2\\ p\nmid n-4}}\frac{1}{p} + 2\sum_{\substack{w_1\le p<w_2\\ p|n-4\\ p\equiv 1\,(4)}}\frac{1}{p} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{w_1}\Big)$$

$$\le \sum_{w_1\le p<w_2}\frac{1}{p} + \frac{2\nu(n-4)}{w_1} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{w_1}\Big)$$

$$= \log\Big(\frac{\log w_2}{\log w_1}\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{\nu(n-4)}{w_1}\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\log w_1}\Big)\,.$$

Осталось отметить, что в силу условия $w_1 \geq Q_0$ имеем

$$\frac{\nu(n-4)}{w_1} \ll \frac{\log\log X}{w_1} \ll \frac{1}{\log w_1}\,.$$

Итак, если $Q_0 \leq w_1 < w_2$, то для подходящей постоянной $c = c(A) > 0$ неравенство (584) выполнено.

Если $w_1 < w_2 \leq Q_0$, то произведение в левой части (584) равно единице и неравенство верно.

Если $w_1 < Q_0 < w_2$, то имеем

$$\prod_{w_1 \leq p < w_2} \Big(1 - \frac{\omega(p)}{p}\Big)^{-1} = \prod_{Q_0 \leq p < w_2} \Big(1 - \frac{\omega(p)}{p}\Big)^{-1}$$
$$\leq \frac{\log w_2}{\log Q_0}\Big(1 + \frac{c}{\log Q_0}\Big) \leq \frac{\log w_2}{\log w_1}\Big(1 + \frac{c}{\log w_1}\Big)\,.$$

Таким образом, формула (584) доказана.

Продолжим с доказательством леммы. В силу (83) и (550) имеем $\frac{\log D_0}{\log Q} \geq (\log X)^{0.5}$. Следовательно, используя Лемму 32, получим

$$\widetilde{\mathcal{D}_i} = \widetilde{\mathcal{E}_i} + \mathcal{O}\Big(\tau(\rho_i)\,\exp\big(-(\log X)^{0.4}\big)\Big)\,, \qquad i = 1,2,3\,, \tag{586}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{E}_i} = \sum_{\substack{\delta \mid \mathcal{P}_0 \\ \delta \equiv 0\ (\rho_i)}} \mu(\delta)\,\frac{\omega(\delta)}{\delta}\,, \qquad i = 1,2,3\,.$$

В силу (83), (543), (544), (551), (585), Леммы 7 (iv), (v), Леммы 9 и Леммы 16 (iii) имеем

$$|\widetilde{\mathcal{D}_i}|\,,\ |\widetilde{\mathcal{E}_i}| \leq \sum_{\substack{\delta \mid \mathcal{P}_0 \\ \delta \equiv 0\,(\rho_i)}} \frac{\tau^2(\delta)}{\delta} \leq \frac{\tau^2(\rho_i)}{\rho_i} \sum_{l \mid \mathcal{P}_0} \frac{\tau^2(l)}{l} \ll \frac{\tau^2(\rho_i)}{\rho_i}\,\log X\,. \tag{587}$$

Теперь из (586) и (587) следует

(588)

$$\widetilde{\mathcal{D}_1}\widetilde{\mathcal{D}_2}\widetilde{\mathcal{D}_3} - \widetilde{\mathcal{E}_1}\widetilde{\mathcal{E}_2}\widetilde{\mathcal{E}_3} = (\widetilde{\mathcal{D}_1} - \widetilde{\mathcal{E}_1})\widetilde{\mathcal{D}_2}\widetilde{\mathcal{D}_3} + \widetilde{\mathcal{E}_1}(\widetilde{\mathcal{D}_2} - \widetilde{\mathcal{E}_2})\widetilde{\mathcal{D}_3} + \widetilde{\mathcal{E}_1}\widetilde{\mathcal{E}_2}(\widetilde{\mathcal{D}_3} - \widetilde{\mathcal{E}_3})$$
$$\ll \exp\big(-(\log X)^{0.3}\big)\,\tau^3(\rho_1)\,\tau^3(\rho_2)\,\tau^3(\rho_3)\,\Big(\frac{1}{\rho_1\rho_2} + \frac{1}{\rho_1\rho_3} + \frac{1}{\rho_2\rho_3}\Big)\,.$$

Заменим произведение $\widetilde{\mathcal{D}_1}\,\widetilde{\mathcal{D}_2}\,\widetilde{\mathcal{D}_3}$ из правой части (582) произведением $\widetilde{\mathcal{E}}_1\,\widetilde{\mathcal{E}}_2\,\widetilde{\mathcal{E}}_3$ и обозначим новую сумму через $\mathcal{H}^*$. Пользуясь (581) и (588), получим

(589)

$$\mathcal{H}' - \mathcal{H}^* \ll \exp\big(-(\log X)^{0.3}\big) \sum_{\substack{l_1,l_2,l_3|\mathcal{P}_0\\ l_1,l_2,l_3\le(\log X)^{6A}}} (l_1l_2l_3)^{10} \sum_{\substack{h_i|\frac{\mathcal{P}_0}{l_i}\\ i=1,2,3}} \frac{\tau^3(\rho_1)\,\tau^3(\rho_2)\,\tau^3(\rho_3)}{\rho_1\,\rho_2}$$

$$\ll \exp\big(-(\log X)^{0.2}\big)\,\mathcal{Q}(Q)\,,$$

где величина $\mathcal{Q}(\lambda)$ определена в Лемме 51 и Q определено через (83). Тогда из Леммы 51 следует

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}^* + \mathcal{O}\big(\exp\big(-(\log X)^{0.1}\big)\big)\,.$$

Воспользуемся также (570) и (572) и получим

$$\mathcal{H}^+(n) = \mathcal{H}^* + \mathcal{O}\big((\log X)^{-2A}\big)\,.$$

Для рассмотрения суммы $\mathcal{H}^*$ проведем все ети действия в обратном порядке и получим

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H}_0(n) + \mathcal{O}\big((\log X)^{-2A}\big)\,.$$

Асимптотическая формула для $\mathcal{H}^+(n)$ доказана. Доказательство для $\mathcal{H}^-(n)$ проводится тем же способом.

Лемма 65 доказана.

□

Доказательство Леммы 66. В силу (544), (556), (561) и Леммы 61, имеем

$$\mathcal{H}_0(n) = \Phi(\mathcal{P}_0, n) \prod_{\substack{Q_0\le p<Q\\ p\nmid\mathcal{P}_0}} \big(1 + h_0(p,n)\big)\,.$$

Осталось воспользоваться мультипликативностью функции $\Phi(m,n)$ по отношению к m, (429), (542), (544), (569) и Леммой 16 (iii).

□

Доказательство Леммы 67. Представим выражение $\mathfrak{N}$ в виде

(590) $\quad \mathfrak{N} = (\mathcal{G}_1^- - 2\theta_1\mathcal{G}_1^+)\,\mathcal{G}_2^+\,\mathcal{G}_3^+ + (\mathcal{G}_2^- - 2\theta_2\mathcal{G}_2^+)\,\mathcal{G}_1^+\,\mathcal{G}_3^+ + (\mathcal{G}_3^- - 2\theta_3\mathcal{G}_3^+)\,\mathcal{G}_1^+\,\mathcal{G}_2^+\,,$

где постоянные $\theta_1,\theta_2,\theta_3>0$ удовлетворяют $\theta_1+\theta_2+\theta_3=1$. Обозначим

$$\mathcal{F}_i = \prod_{Q\le p<z_i}\Big(1-\frac{1}{p-1}\Big)\,, \qquad s_i = \frac{\log D_i}{\log z_i}\,, \qquad i=1,2,3\,.$$

В силу Леммы 31 имеем

(591) $$\mathcal{F}_i \le \mathcal{G}_i^+ \le \mathcal{F}_i\Big(F(s_i) + \mathcal{O}\big((\log X)^{-1/3}\big)\Big)\,,$$

(592) $$\mathcal{F}_i \ge \mathcal{G}_i^- \ge \mathcal{F}_i\Big(f(s_i) + \mathcal{O}\big((\log X)^{-1/3}\big)\Big)\,,$$

где $f(s)$ и $F(s)$ – функции линейного решета, которые определены в § 2.5. Следовательно

$$\mathcal{G}_i^- - 2\theta_i \mathcal{G}_i^+ \geq \mathcal{F}_i \Big(f(s_i) - 2\theta_i F(s_i) + \mathcal{O}\big((\log X)^{-1/3} \big) \Big) . \tag{593}$$

Используя (543) и (550), получим

$$s_1 = s_2 = (0,334)^{-1} + \mathcal{O}\big((\log X)^{-1/3} \big) , \qquad s_3 = (0,348)^{-1} + \mathcal{O}\big((\log X)^{-1/3} \big) .$$

Тогда имеем $2 < s_1, s_2, s_3 < 3$. Выберем $\theta_1 = \theta_2 = 0,345$, $\theta_3 = 0,31$. Используя (93) легко проверить, что

$$f(s_i) - 2\theta_i F(s_i) > 10^{-6} , \qquad i = 1,2,3 . \tag{594}$$

Осталось отметить, что в силу (83), (543) и Леммы 16 (iii) имеем

$$\mathcal{F}_i \asymp \frac{\log\log X}{\log X} , \qquad i = 1,2,3 .$$

и доказательство Леммы 67 следует из (590) – (594).

$\square$

4.3. **Доказательство Следствия.**

Предположим, что $N \in \mathbb{N}$ – достаточно большое и удовлетворяет $N \equiv 5\,(24)$. Рассмотрим следующие множества из простых чисел

$$\mathcal{A} = \{ \, p \, \leq \, 0,5\sqrt{N} \;\; : \;\; p \equiv 11 \,(\mathrm{mod}\ 30) \ , \ p+2 = \mathrm{P}_2 \, \} ,$$

$$\mathcal{A}' = \{ \, p \, \leq \, 0,5\sqrt{N} \;\; : \;\; p \equiv 17 \,(\mathrm{mod}\ 30) \ , \ p+2 = \mathrm{P}_2 \, \}$$

и обозначим их мощности соответственно через $|\mathcal{A}|$ и $|\mathcal{A}'|$. Применяя дословно рассуждения в доказательстве теоремы Чена (см., например, [40] гл.11), получим

$$|\mathcal{A}| \gg \sqrt{N}\,(\log N)^{-2} , \qquad |\mathcal{A}'| \gg \sqrt{N}\,(\log N)^{-2} . \tag{595}$$

Предположим сначала, что $N \not\equiv 2\,(5)$. В етом случае рассмотрим множество

$$\mathfrak{K} = \{ \, N - p^2 - q^2 \;\; : \;\; p, \ q \in \mathcal{A} \, \} .$$

Пусть $|\mathfrak{K}|$ обозначает число разных елементов из $\mathfrak{K}$. Оценим $|\mathfrak{K}|$ снизу.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\varkappa(k) = \sum_{\substack{p,q \in \mathcal{A} \\ N - p^2 - q^2 = k}} 1.$$

Очевидно

$$|\mathfrak{K}| = \sum_{\substack{k \leq N \\ \varkappa(k) > 0}} 1 . \tag{596}$$

Рассмотрим сумму

$$S(N) = \sum_{k \leq N} \varkappa(k) ,$$

для которой, в силу (595), имеем

$$S(N) = \sum_{k\le N} \sum_{\substack{p,q\in\mathcal{A}\\ N-p^2-q^2=k}} 1 = \sum_{p,q\in\mathcal{A}} 1 = |\mathcal{A}|^2 \gg N(\log N)^{-4}\,. \tag{597}$$

Рассмотрим также сумму

$$T(N) = \sum_{k\le N} \varkappa^2(k)$$

и оценим ее сверху при помощи Леммы 7 (iii):

$$T(N) = \sum_{k\le N} \sum_{\substack{p,\,q,\,p_1,\,q_1\in\mathcal{A}\\ N-p^2-q^2=N-p_1^2-q_1^2=k}} 1 \le \sum_{n\le N} r^2(n) \ll N\log N\,. \tag{598}$$

Наконец, используя (596) и Лемму 1, получим

$$S(N)^2 \le |\mathfrak{K}|\; T(N)\,. \tag{599}$$

Из (597) – (599) следует, что

$$|\mathfrak{K}| \ge \frac{S(N)^2}{T(N)} \gg N\,(\log N)^{-9}\,. \tag{600}$$

Осталось отметить, что из определения множества $\mathcal{A}$ и из условия $N \not\equiv 2\,(5)$ следует, что для каждого $k\in\mathfrak{K}$ имеем $k\equiv 3\,(24)$ и $k\not\equiv 0\,(5)$. Тогда из Теоремы 2 следует, что для некоторых $p,q\in\mathcal{A}$ число $k = N-p^2-q^2\in\mathfrak{K}$ представимо в виде $p_1^2+p_2^2+p_3^2 = k$, где p_1,p_2,p_3 простые числа, удовлетворяющие

$$p_1+2=\mathrm{P}_5\,,\qquad p_2+2=\mathrm{P}'_5\,,\qquad p_3+2=\mathrm{P}_8\,.$$

Или в случае $N\not\equiv 2\,(5)$ следствие доказано.

Если $N\equiv 2\,(5)$, то мы рассматриваем множество

$$\{\;N-p^2-q^2\;\;:\;\;p\in\mathcal{A}\,,\;q\in\mathcal{A}'\;\}$$

и доказываем следствие как в предыдущем случае.

$\square$

Список литературы

[1] Архипов Г.И., Житков, *Теорема Варинга с нецелым показателем*, Изв. АН СССР, Сер. Матем., **48** (1984).

[2] Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н., *Теория кратных тригономерических сумм*, „Наука", Москва, 1987.

[3] Виноградов И.М., *Представление нечетного числа суммой трех простых чисел,* ДАН СССР, **15** (1937), 6–7.

[4] Виноградов И.М., *Избранные труды,* Изд. АН СССР, Москва, 1952.

[5] Виноградов И.М., *Медод тригонометрических сумм в теории чисел,* „Наука", Москва, 1980.

[6] Виноградов И.М., *Особые варианты метода тригонометрических сумм*, „Наука", Москва, 1976.

[7] Виноградов И.М., *Основы теории чисел*, „Наука", Москва, 1981.

[8] Воронин С.М., Карацуба А.А., *Дзета–функция Римана*, „Физматлит", Москва, 1994.

[9] Гриценко С.А., *Об одной задачи И.М. Виноградова*, Матем. заметки, **39**, 5, (1986), 625–640.

[10] Гриценко С.А., *Тернарная проблема Гольдбаха и проблема Гольдбаха–Варинга с простыми числами, лежащими в промежутков специального вида*, Успехи матем. наук, **43**, 4, (1988), 203–204.

[11] Зигмунд А., *Тригонометрические ряды, I, II,* „Мир", Москва, 1965.

[12] Карацуба А.А., *Основы аналитической теории чисел*, „Наука", Москва, 1983.

[13] Кауфман Р.М., *О распределении* $\{\sqrt{p}\}$, Матем. заметки, **26**, 4, (1979), 497–504.

[14] Линник Ю.В., *Об одной теореме теории простых чисел*, ДАН СССР, **47**, 1, (1945), 7–8.

[15] Малышев А.В., *О представлении целых чисел положительными квадратичными формами,* Труды матем. инст. им. В.А.Стеклова, **65**, 1962.

[16] Марджинашвили К.К., *Оценка одной арифметической суммы,* ДАН СССР, **22**, 7, (1939), 391–393.

[17] Плаксин В.А., *Асимптотическая формула числа решений нелинейного уравнения с простыми числами,* Изв. АН СССР, Сер. Матем., **45**, 2, (1981), 321–397.

[18] Прахар К., *Распределение простых чисел,* „Мир", Москва, 1967.

[19] Пятецкий–Шапиро И.И., *Об одном варианте проблемы Варинга–Гольдбаха,* Матем. сборник, **30**, 1, (1952), 105–120.

[20] Пятецкий–Шапиро И.И., *О распределении простых чисел в последовательностях вида* $[f(n)]$, Матем. сборник, **33**, 3, (1953), 559–566.

[21] Сегал Б.И., *Теорема Варинга для степеней с дробными иррациональными показателями,* Труды матем. инст. им. В.А.Стеклова, **5**, (1933).

[22] Чубариков В.Н., *Об одновременном представлении натуральных чисел суммами степеней простых чисел,* ДАН СССР, **286**, 4, (1986), 828–832.

[23] Чудаков Н.Г., *О плотности совокупности четных чисел непредставимых как суммы двух нечетных простых*, Изв. АН СССР, Сер. Матем. **2**, (1938), 25–40.

[24] Baker R., Harman G., *Diophantine approximation by prime numbers*, J. London Math. Soc., **25**, (1982), 201–215.

[25] Balog A., *On the fractional parts of* p^θ, Arch. Math. (Basel), **40**, (1983), 434–440.

[26] Balog A., Friedlander J., *A hybrid of theorems of Vinogradov and Piatetski–Shapiro*, Pacific J. Math., **156**, (1992), 45–62.

[27] Bombieri E., *On the large sieve*, Mathematica, **12**, (1965), 201–225.

[28] Bombieri E., Iwaniec H., *On the order of* $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, Ann. Scuola Norm. Sup. – Pisa, Ser. 4, **8**, 3, (1986), 449–472.

[29] Brun V., *Le crible d'Eratostène et le théorème de Goldbach*, C. R. Acad. Sci., Paris, **168** (1919), 544–546.

[30] Brüdern J., Fouvry E., *Lagrange's Four Squares Theorem with almost prime variables*, J. Reine Angew. Math., **454** (1994), 59–96.

[31] Brüdern J., Fouvry E., *Le crible à vecteurs*, Compos. Math., **102** (1996), 337–355.

[32] Cai Y.C., *On a diophantine inequality involving prime numbers*, Acta Math. Sinica, **39**, (1996), 733–742.

[33] Cai Y.C., *On a diophantine inequality involving prime numbers III*, Acta Math. Sinica, English Series, **15**, (3), (1999), 387–394.

[34] Chen J.-R., *On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes*, Sci. Sinica, **16** (1973), 157–176.

[35] Davenport H., *Multiplicative Number Theory*, Sec. ed., Springer, 1980, (revised by H.L. Montgomery).

[36] Deshouillers, *Probleme de Waring avec exposants non entiers*, Bull. Soc. Math. France, **101** (1973).

[37] Estermann T., *A new application of the Hardy–Littlewood–Kloosterman method*, Proc. London Math. Soc., **12** (1962), 425–444.

[38] Estermann T., *On Kloosterman's sum*, Mathematika, **8**, (1961), 83–86.

[39] Greaves G., *On the representation of a number in the form* $x^2 + y^2 + p^2 + q^2$ *where* p *and* q *are odd primes*, Acta Arithmetica, **29**, (1976), 257–274.

[40] Halberstam H., Richert H.–E., *Sieve Methods*, Academic Press, London, 1974.

[41] Hall R.R., Tenenbaum G., *Divisors*, Cambridge Univ. Press, 1988.

[42] Hardy G.H., Littlewood J.E., *A new solution of Waring's problem*, Quart. J. Math., **48**, (1919), 272–293.

[43] Hardy G.H., Littlewood J.E., *Some problems of "Partitio Numerorum": I A new solution of Waring's problem*, Göttingen Nachrichten, (1920), 33–54.

[44] Hardy G.H., Littlewood J.E., *Some problems of "Partitio Numerorum": III On the expression of a number as a sum of primes*, Acta. Math., **44**, (1923) 1–70.

[45] Hardy G.H., Littlewood J.E., *Some problems of "Partitio Numerorum": V A further contribution to the study of Goldbach's problem*, Proc. Lond. Math. Soc., (2) **22**, (1923) 46–56.

[46] Hardy G.H., Wright E.M., *An introduction to the theory of numbers*, Fifth ed., Oxford Univ. Press, 1979.

[47] Harman G., *On the distribution of* $\sqrt{p}$ *modulo one*, Mathematica, **30**, (1983), 104–116.

[48] Heath-Brown D.R., *The square sieve and consecutive square–free numbers*, Math. Annalen, **226** (1984), 251–259.

[49] Heath-Brown D.R., *Prime numbers in short intervals and a generalized Vaughan identity*, Canad. J. Math., **34** (1982), 1365–1377.

[50] Heath-Brown D.R., *The circle method and diagonal cubic forms*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, **356**, (1998), 673–699.

[51] Hilbert D., *Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl enter Potenzen (Waringsche Problem)*, Math. Annalen, **67**, (1909), 281–300.

[52] Hua L.–K., *Some results in the additive prime number theory*, Quart. J. Math., **9**, (1938), 68–80.

[53] Hua L.–K., *Additive Theory of Prime Numbers*, Amer. Math. Soc., Providence, 1965.

[54] Hua L.–K., *Introduction to number theory*, Springer, 1982.

[55] Iwaniec H., *On sums of two norms from cubic fields*, Journées de théorie additive des nombres, Université de Bordeaux I, (1977), 71–89.

[56] Iwaniec H., *Rosser's sieve*, Acta Arithmetica, **36**, (1980), 171–202.

[57] Iwaniec H., *A new form of the error term in the linear sieve*, Acta Arithmetica, **37**, (1980), 307–320.

[58] Jia C.–H., *On the Piatetski–Shapiro prime number theorem*, Acta Arithmetica, **73**, (1995), 1–28.

[59] Kamke E., *Verallgemeinenerungen des Waring–Hilbertschen Satzes*, Math. Annalen, **83**, (1921), 85–112.

[60] Kloosterman H.D., *On the representation of numbers in the form* $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$, Acta Math., **49** (1926), 407–464.

[61] Kumchev A., *On the distribution of prime numbers of the form* $[n^c]$, Glasgow Math. J., **41**, (1999), 85–102.

[62] Kumchev A., *A diophantine inequality involving prime powers*, Acta Arithmetica, **89**, (1999). 311–330.

[63] Kumchev A., Nedeva T., *On an equation with prime numbers*, Acta Arithmetica, **83**, 2, (1998), 117–126.

[64] Leung M.–C., Liu M.–C., *On generalized quadratic equations in three prime variables*, Monatsh. Math., **115** (1993), 113–169.

[65] Montgomery H.L., Vaughan R.C., *The exceptional set in Goldbach's problem*, Acta Arithmetica, **27**, (1975), 353–370.

[66] Montgomery H.L., *The analytic principle of the large sieve*, Bull. Amer. Math. Soc., **84**, 4, (1978), 547–567.

[67] Peneva T., *On the ternary Goldbach problem with primes p_i such that $p_i + 2$ are almost-primes*, Acta Math. Hungar., **86**, (4), (2000), 305–318.

[68] Schwarz W., *Zur Darstellung von Zahlen durch Summen von Primzahlpotenzen, II*, J. Reine Angew. Math., **206** (1961), 78–112.

[69] Shields P., *Some applications of sieve methods in number theory*, Thesis, University of Wales 1979.

[70] Van der Corput J. G., *Über Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten*, Math. Annalen., **116** (1939), 1–50.

[71] Vaughan R.C., *The Hardy–Littlewood method*, Sec. ed., Cambridge Univ. Press, Second edition, 1997.

[72] Weil A., *On some exponential sums*, Proc. Nat. Acad. of Sci., **34**, (1948), 204–207.

[73] Wirsing E., *Thin subbases*, Analysis, **6**, (1986), 285–308.

[74] Толев Д.И., *Диофантовы неравенства с простыми числами,* Кандидатская диссертация, МГУ, Москва, 1990.

[75] Толев Д.И., *Диофантовы приближения с простыми числами, близкими к квадратам,* Матем. заметки, **50**, 3, (1991), 129–134.

[76] Лапорта М., Толев Д.И., *Об одном уравнении с простыми числами,* Матем. заметки, **57**, 6, (1995), 926–929.

[77] Tolev D.I., *On the simultaneous distribution of the fractional parts of different powers of prime numbers*, Journ. Number Theory, **37**, 3, (1991), 298–306.

[78] Tolev D.I., *On a diophantine inequality involving prime numbers*, Acta Arithmetica, **61**, 3, (1992), 289–306.

[79] Tolev D.I., *On a diophantine inequality with prime numbers II*, Plovdiv University, Scientific Works – Mathematics, **30**, 3, (1993), 63 – 76.

[80] Tolev D.I., *On a system of two diophantine inequalities with prime numbers*, Acta Arithmetica., **69**, 4, (1995), 387–400.

[81] Tolev D.I., *On a theorem of Bombieri–Vinogradov type for prime numbers from a thin set*, Acta Arithmetica, **81**, 1, (1997), 57–68.

[82] Tolev D.I., *On the number of representations of an odd integer as a sum of three primes, one of which belongs to an arithmetic progression*, Труды матем. инст. им. В.А.Стеклова, **218**, (1997), 415–432.

[83] Tolev D.I., *Arithmetic progressions of prime–almost–prime twins*, Acta Arithmetica, **88**, 1, (1999), 67–98.

[84] Tolev D.I., *Representations of large integers as sums of two primes of special type*, Proceedings of the Conference on Algebraic Number Theory and Diophantine Analysis, (Graz 1998), de Gruyter, 2000, 485–495.

[85] Tolev D.I., *Additive problems with prime numbers of special type*, Acta Arithmetica, **96**, 1, (2000), 53–88.

[86] Kumchev A., Tolev D.I., *An additive problem with prime numbers from a thin set*, Acta Math. Hungar., **76**, (1–2), (1997), 31–43.

[87] Peneva T., Tolev D.I., *An additive problem with primes and almost-primes*, Acta Arithmetica, **83**, 2, (1998), 155–169.

[88] Heath-Brown D.R., Tolev D.I., *Lagrange's four squares theorem with one prime and three almost–prime variables*, (в печати).