Об одном варианте задачи Хуа-ло-Кена

А. Киркорян, Д. Толев*

Аннотация

В работе доказано, что почти все натуральные числа n, удовлетворяющие $n \equiv 3 \pmod{24}$, $n \not\equiv 0 \pmod 5$, представимы суммой трех квадратов простых чисел, хотя бы одно из которых можно записать в виде $1 + x^2 + y^2$.

В 1938-ом году Хуа-ло-Кен [8] доказал, что почти все натуральные числа n, для которых выполнены условия

$$n \equiv 3 \pmod{24}, \qquad n \not\equiv 0 \pmod 5 \tag{1}$$

можно представить в виде

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = n, \tag{2}$$

где p_1, p_2, p_3 – простые числа. С тех пор многие математики исследовали разрешимость этого уравнения в простых числах, удовлетворяющих дополнительным условиям. Например, в работе [11] установлено, что почти все n, для которых выполнено (1), можно представить в виде (2), где простые p_j таковы, что каждое из чисел $p_1 + 2$ и $p_2 + 2$ имеет не более 5 простых множителей, а $p_3 + 2$ — не более 8 простых множителей.

В настоящей работе мы рассматриваем уравнение (2) с простыми числами, хотя бы одно из которых можно представить в виде $1 + x^2 + y^2$, где x и y — целые числа. Бесконечность множества простых чисел такого вида установил Ю. В. Линник [2]. Точнее, он доказал ассимптотическую формулу

$$\sum_{p \le x} r(p-1) = \pi \prod_{p>2} \left(1 + \frac{\chi(p)}{p(p-1)}\right) \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x\,(\log\log x)^7}{(\log x)^{1+\theta_0}}\right), \tag{3}$$

где $r(m)$ равно числу решений уравнения $m = x^2 + y^2$ в целых числах, $\chi(d)$ — неглавный характер по модулю 4 и

$$\theta_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e \log 2 = 0.0029\ldots. \tag{4}$$

*При финансовой поддержке Софийского Университета, грант 028/2009

Условное доказательство формулы (3) (с использованием расширенной гипотезы Римана) было ранее предложено Хооли [6]. Доказательство формулы (3) можно найти еще в книгах Линника [3] и Хооли [4].

Наш результат — следующая теорема.

Теорема. *Пусть N — большое число. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество натуральных чисел n, удовлетворяющих (1) и непредставимых суммой трех квадратов простых чисел, хотя бы одно из которых можно записать в виде $1+x^2+y^2$. Пусть $A(N)$ — число элементов из $\mathcal{A}$, непревосходящих N. Тогда имеет место неравенство*

$$A(N) \ll N(\log N)^{-0.0019}. \tag{5}$$

Ранее Матомаки [10] и Толев [12] получили результаты такова типа, связанные с бинарной проблемой Гольдбаха. Толев [13] доказал также, что каждое достаточно большое нечетное число можно представить в виде суммы трех простых чисел, хотя бы два из которых вида $1+x^2+y^2$.

В настоящей работе мы приведем только схему доказательства теоремы, поскольку (довольно длинные) вычисления близки или проводится тем же способом как в других работах, на которые мы ссылаемся в данной работе.

Схема доказательства.

1. Для любого натурального числа $n \le N$ рассмотрим сумму

$$R(n) = \sum_{p_1^2+p_2^2+p_3^2=n} r(p_1-1)(\log p_1)(\log p_2)(\log p_3). \tag{6}$$

Обозначим

$$L = \log N, \qquad X = N^{1/2}, \qquad D = X^{1/2}L^{-1000000}. \tag{7}$$

Наша цель — установить существование величины $M(n) = M_N(n)$ для которой:

1) Если выполнено (1), то для любого $n \le N$ имеем

$$\sqrt{n}(\log L)^{-10} \ll M(n) \ll \sqrt{n}(\log L)^{10}. \tag{8}$$

2) Для суммы

$$E(N) = \sum_{n\le N}{}' \left|R(n) - M(n)\right|, \tag{9}$$

где $\sum'$ означает, что суммирование ведется по натуральным числам, удовлетворяющим (1), имеет место оценка

$$E(N) \ll N^{3/2}L^{-\theta_0+\varepsilon}, \tag{10}$$

где θ_0 определено через (4), а $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое.

Допустим, что для некоторого $M(n)$ условия (8) и (9) выполнены. Из определений множества $\mathcal{A}$ и суммы $R(n)$ следует, что если $n \in \mathcal{A}$, то $R(n) = 0$. Тогда, если Δ — параметр для которого $1 < \Delta < N$, то используя (8) – (10) получаем

$$N^{3/2}L^{-\theta_0+\varepsilon} \gg E(N) \geq \sum_{\substack{\Delta<n\leq N \\ n\in\mathcal{A}}} |R(n) - M(n)| = \sum_{\substack{\Delta<n\leq N \\ n\in\mathcal{A}}} |M(n)|$$
$$\gg (A(N) - \Delta)\,\Delta^{1/2}(\log L)^{-10}.$$

Отсюда следует, что
$$A(N) \ll \Delta + N^{3/2}L^{-\theta_0+\varepsilon}\Delta^{-1/2}.$$
Выбирая $\Delta = NL^{-2\theta_0/3}$ и используя (4) получаем оценку (5).

2. Итак, займемся определением $M(n)$ и доказательством (8) и (9).

Пользуясь известной формулой $r(m) = 4\sum_{d|m}\chi(d)$ и также (6), представим $R(n)$ в виде
$$R(n) = 4\left(R_1(n) + R_2(n) + R_3(n)\right), \tag{11}$$
где

$$R_1(n) = \sum_{p_1^2+p_2^2+p_3^2=n} \left(\sum_{\substack{d|p_1-1 \\ d\leq D}} \chi(d)\right)(\log p_1)(\log p_2)(\log p_3), \tag{12}$$

$$R_2(n) = \sum_{p_1^2+p_2^2+p_3^2=n} \left(\sum_{\substack{d|p_1-1 \\ D<d<X/D}} \chi(d)\right)(\log p_1)(\log p_2)(\log p_3), \tag{13}$$

$$R_3(n) = \sum_{p_1^2+p_2^2+p_3^2=n} \left(\sum_{\substack{d|p_1-1 \\ d\geq X/D}} \chi(d)\right)(\log p_1)(\log p_2)(\log p_3). \tag{14}$$

Тогда из (9) и (11) следует
$$E(N) \ll E_1(N) + E_2(N) + E_3(N), \tag{15}$$
где
$$E_1(N) = {\sum_{n\leq N}}' \left|4R_1(n) - M(n)\right|, \tag{16}$$

$$E_j(N) = {\sum_{n\leq N}}' \left|R_j(n)\right|, \qquad j = 2, 3. \tag{17}$$

Из (15) следует, что для получения (10) достаточно оценить соответствующим способом величин $E_j(N)$, $j=1,2,3$.

3. Исследование $R_1(n)$ и $R_3(n)$ сводится к рассмотрению суммы

$$I_{l,d;J}(n)=\sum_{\substack{p_1^2+p_2^2+p_3^2=n\\ p_1\equiv l \pmod d\\ p_1\in J}}(\log p_1)(\log p_2)(\log p_3), \tag{18}$$

где d и l — взаимно простые натуральные числа, а $J\subset[1,X]$ — отрезок. Если $J=[1,X]$, то будем писать для простоты $I_{l,d}(n)$.

Для изучения величины $I_{l,d;J}(n)$ применяем круговой метод. Очевидно

$$I_{l,d;J}(n)=\int\limits_0^1 S_{l,d;J}(\alpha)S^2(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha,$$

где, как обычно, $e(\alpha)=\exp(2\pi i\alpha)$ и

$$S_{l,d;J}(\alpha)=\sum_{\substack{p\in J\\ p\equiv l \pmod d}}(\log p)e(\alpha p^2), \qquad S(\alpha)=S_{1,1;[1,X]}(\alpha). \tag{19}$$

Определим множества больших и, соответсвенно, малых дуг через

$$\mathfrak{M}=\bigcup_{q\le Q}\bigcup_{\substack{a=0\\ (a,q)=1}}^{q-1}\left[\frac{a}{q}-\frac{1}{q\tau},\frac{a}{q}+\frac{1}{q\tau}\right], \qquad \mathfrak{m}=\left[-\frac{1}{\tau},1-\frac{1}{\tau}\right]\setminus\mathfrak{M}, \tag{20}$$

где

$$Q=L^{20000}, \qquad \tau=X^2L^{-50000}. \tag{21}$$

Тогда имеем

$$I_{l,d;J}(n)=I^{(1)}_{l,d;J}(n)+I^{(2)}_{l,d;J}(n), \tag{22}$$

где

$$I^{(1)}_{l,d;J}(n)=\int\limits_{\mathfrak{M}} S_{l,d;J}(\alpha)S^2(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha,$$
$$I^{(2)}_{l,d;J}(n)=\int\limits_{\mathfrak{m}} S_{l,d;J}(\alpha)S^2(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha. \tag{23}$$

(Как и раньше, если $J=[1,X]$, то будем писать для простоты $I^{(\nu)}_{l,d}(n)$.)

Определим
$$H_J(n)=\frac{1}{8}\sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=n\\ \sqrt{m_1}\in J}}(m_1m_2m_3)^{-1/2}\,.$$
Хорошо известно (см. например [1], гл. 2, Теорема 2.3), что
$$H(n)=H_{[1,X]}(n)=\frac{\pi}{4}\sqrt{n}+O(1) \tag{24}$$

Для каждого n, удовлетворяющего (1), определим мультипликативную по отношению к q функцию $t_{l,d,n}(q)$ следующими равенствами.
$$t_{l,d,n}(2)=1,\quad t_{l,d,n}(4)=2,\quad t_{l,d,n}(8)=4,\quad t_{l,d,n}\left(2^\nu\right)=0\quad \text{для}\quad \nu>3. \tag{25}$$
Если $p>2$ — простое число, то
$$t_{l,d,n}\left(p^\nu\right)=0\qquad \text{для}\qquad \nu>1, \tag{26}$$

$$t_{l,d,n}(p)=\begin{cases}h_0(p,n) & \text{для}\quad p\nmid d,\\ h_1(p,n,l) & \text{для}\quad p\mid d,\end{cases} \tag{27}$$

где
$$h_0(p,n)=\begin{cases}\frac{\left(\frac{-n}{p}\right)p^2+3\left(\left(\frac{n}{p}\right)+\left(\frac{-1}{p}\right)\right)p+1}{(p-1)^3} & \text{если}\quad p\nmid n,\\ \frac{-3\left(\frac{-1}{p}\right)p-1}{(p-1)^2} & \text{если}\quad p\mid n,\end{cases} \tag{28}$$
$$h_1(p,n,l)=\begin{cases}\frac{\left(-2\left(\frac{n-l^2}{p}\right)-\left(\frac{-1}{p}\right)\right)p-1}{(p-1)^2} & \text{если}\quad p\nmid n-l^2,\\ \frac{\left(\frac{-1}{p}\right)p+1}{p-1} & \text{если}\quad p\mid n-l^2\end{cases} \tag{29}$$

и где $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ — символ Лежандра.

Далее, следуя метода работы [11] (см. стр. 81–84), получим
$$I^{(1)}_{l,d;J}(n)=I^*_{l,d;J}(n)+O\left(L^{200000}\sum_{q\le Q}\Delta\left(X,[d,q]\right)\right)+O\left(X\tau^4(d)d^{-1}L^{-1000}\right), \tag{30}$$
где
$$I^*_{l,d;J}(n)=\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{q\le Q}t_{l,d,n}(q)H_J(n), \tag{31}$$
через $[d,q]$ обозначено наименьшее общее кратное d и q, $\varphi(d)$ — функция Эйлера, $\tau(d)$ — число положительных делителей d и
$$\Delta(x,h)=\max_{y\le x}\max_{(l,h)=1}\Bigg|\sum_{\substack{p\le y\\ p\equiv l \pmod h}}\log p-\frac{y}{\varphi(h)}\Bigg|.$$

4. Рассмотрим сначала $E_3(N)$. В силу того, что

$$\sum_{\substack{d|p_1-1\\ d\geq X/D}}\chi(d)=\sum_{\substack{m|p_1-1\\ m\leq (p_1-1)D/X}}\chi\left(\frac{p_1-1}{m}\right)=\sum_{j=\pm 1}\chi(j)\sum_{\substack{m|p_1-1\\ m\leq (p_1-1)D/X\\ \frac{p_1-1}{m}\equiv j \pmod 4}}1$$

из (14) и (18) следует

$$R_3(n)=\sum_{\substack{m\leq D\\ 2|m}}\sum_{j=\pm 1}\chi(j)I_{1+jm,4m;J_m}(n),$$

где $J_m=[1+mX/D,X]$. Следовательно из (22) получаем

$$R_3(n)=R_3^{(1)}(n)+R_3^{(2)}(n), \tag{32}$$

где

$$R_3^{(\nu)}(n)=\sum_{\substack{m\leq D\\ 2|m}}\sum_{j=\pm 1}\chi(j)I^{(\nu)}_{1+jm,4m;J_m}(n), \qquad \nu=1,2. \tag{33}$$

Тогда из (17) и (32) следует

$$E_3(N)\ll E_3^{(1)}(N)+E_3^{(2)}(N), \tag{34}$$

где

$$E_3^{(\nu)}(N)={\sum_{n\leq N}}'\left|R_3^{(\nu)}(n)\right|, \qquad \nu=1,2. \tag{35}$$

Рассмотрим $E_3^{(2)}(N)$. В силу (23) и (33) имеем

$$R_3^{(2)}(n)=\int\limits_{\mathfrak{m}}K(\alpha)S^2(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha,$$

где

$$K(\alpha)=\sum_{\substack{m\leq D\\ 2|m}}\sum_{j=\pm 1}\chi(j)\ S_{1+jm,4m;J_m}(\alpha).$$

Тогда, применяя неравенства Коши и Бесселя, получим

$$
\begin{aligned}
E_3^{(2)}(N) &\ll X\left(\sum_{n\le N}\left|\int\limits_{\mathfrak{m}} K(\alpha)S^2(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha\right|^2\right)^{1/2} \\
&\ll X\left(\int\limits_{\mathfrak{m}} \left|K^2(\alpha)S^4(\alpha)\right| d\alpha\right)^{1/2} \\
&\ll X\sup_{\mathfrak{m}}|S(\alpha)|\left(\int\limits_0^1 \left|K^4(\alpha)\right| d\alpha\right)^{1/4}\left(\int\limits_0^1 \left|S^4(\alpha)\right| d\alpha\right)^{1/4}. \qquad (36)
\end{aligned}
$$

Сумму $S(\alpha)$, определенную через (19), можно оценить на множество малых дуг методом И.М.Виноградова. Пользуясь, например, результатом работы [7] и имея ввиду (20) и (21) получаем

$$\sup_{\mathfrak{m}}|S(\alpha)| \ll XL^{-500}. \qquad (37)$$

Хорошо известно также, что

$$\int\limits_0^1 \left|S^4(\alpha)\right| d\alpha \ll X^2L^7. \qquad (38)$$

Далее, используя тот же метод, как и в работе [11] (см. стр. 67–69), получаем

$$\int\limits_0^1 \left|K^4(\alpha)\right| d\alpha \ll X^2L^{1200}. \qquad (39)$$

Тогда из (7), (36) – (39) следует

$$E_3^{(2)}(N) \ll N^{3/2}L^{-10}. \qquad (40)$$

Рассмотрим теперь $E_3^{(1)}(N)$. Из (30), (31), (33) и (35) следует, что

$$R_3^{(1)}(n) = R^* + O\left(L^{200000}\sum_{m\le M}\sum_{q\le Q}\Delta\left(X,[4m,q]\right)\right) + O\left(XL^{-100}\right), \qquad (41)$$

где

$$R^* = \sum_{\substack{m\le D\\ 2|m}}\varphi(4m)^{-1}\sum_{j=\pm1}\chi(j)\sum_{q\le Q}t_{1+jm,4m,n}(q)\,H_{J_m}(n).$$

Используя (25) – (29), нетрудно проверить, что выражение $t_{1+jm,4m,n}(q)$ не зависит от j. Тогда имеем $\sum_{j=\pm 1}\chi(j)t_{1+jm,4m,n}(q)=0$, откуда следует, что $R^*=0$.

Далее, как в работе [11], стр. 82–83, используем теорему Бомбьери–Виноградова и имея ввиду (7) устанавливаем, что первый остаточный член в правой части (41) дает в $E_3^{(1)}$ вклад $O\left(X^3L^{-10}\right)$. Таким образом получаем

$$E_3^{(1)}(N)\ll N^{3/2}L^{-10}. \tag{42}$$

Тогда, в силу (34), (40) и (42), имеем

$$E_3(N)\ll N^{3/2}L^{-10}. \tag{43}$$

5. Рассмотрим теперь сумму $E_2(N)$. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество простых чисел $p\le X$ таких, что $p-1$ имеет делитель, находяшийся на отрезке $[D,X/D]$. Используя неравенство Коши и также (13), получаем

$$\begin{aligned}E_2(N)^2&\le N\sum_{n\le N}|R_2(n)|^2\\ &\ll NL^6\sum_{\substack{p_1,\dots,p_6\le X\\ p_1^2+p_2^2+p_3^2=p_4^2+p_5^2+p_6^3}}\left|\sum_{\substack{d|p_1-1\\ D<d<X/D}}\chi(d)\right|\left|\sum_{\substack{t|p_4-1\\ D<t<X/D}}\chi(t)\right|\\ &\ll NL^6\sum_{\substack{p_1,\dots,p_6\le X\\ p_1^2+p_2^2+p_3^2=p_4^2+p_5^2+p_6^3\\ p_4\in\mathcal{F}}}\left|\sum_{\substack{d|p_1-1\\ D<d<X/D}}\chi(d)\right|^2.\end{aligned}$$

Слагаемые в последнем выражении, для которых $p_1=p_4$, дают вклад $O\left(N^{5/2+\varepsilon}\right)$. Следовательно

$$E_2(N)^2\ll N^{5/2+\varepsilon}+NL^6\,\Sigma_0, \tag{44}$$

где

$$\Sigma_0=\sum_{p_1\le X}\left|\sum_{\substack{d|p_1-1\\ D<d<X/D}}\chi(d)\right|^2\sum_{\substack{p_4\le X\\ p_4\in\mathcal{F}\\ p_4\ne p_1}}\ \sum_{\substack{p_2,p_3,p_5,p_6\le X\\ p_2^2+p_3^2-p_5^2-p_6^2=p_4^2-p_1^2}}1.$$

Далее, изпользуем, что равномерно по h удовлетворяющим $1\le|h|\le N$, число решений уравнения $p_1^2+p_2^2-p_3^2-p_4^2=h$ в простых числах $p_1,p_2,p_3,p_4\le X$ оценивается сверху величиной $O\left(NL^{-4}\right)$. Доказательство этого утверждения можно получить, пользуясь методом работы [5]. Вычисления аналогичны (и намного проще) и по этой причине мы их не приводим. Таким образом получаем

$$\Sigma_0 \ll NL^{-4}\, \Sigma'\, \Sigma'', \tag{45}$$

где

$$\Sigma' = \sum_{p \le X} \left| \sum_{\substack{d|p-1 \\ D<d<X/D}} \chi(d) \right|^2, \qquad \Sigma'' = \sum_{\substack{p \le X \\ p \in \mathcal{F}}} 1.$$

Суммы очень похожие на Σ' и Σ'' оцецены в [4], гл. 5. Работая тем же способом, получим

$$\Sigma' \ll XL^{-1}(\log L)^7, \qquad \Sigma'' \ll XL^{-1-2\theta_0}(\log L)^3, \tag{46}$$

где θ_0 определено через (4). Из (44) – (46) следует

$$E_2(N) \ll N^{3/2}L^{-\theta_0}(\log L)^5. \tag{47}$$

6. Рассмотрим наконец сумму $E_1(N)$. В силу (12), (16), (18) и (22) имеем

$$E_1(N) \ll E_1^{(1)}(N) + E_1^{(2)}(N), \tag{48}$$

где

$$E_1^{(1)}(N) = \sum_{n \le N}{}' \left| 4 \sum_{d \le D} \chi(d) I_{1,d}^{(1)}(n) - M(n) \right|,$$

$$E_1^{(2)}(N) = \sum_{n \le N}{}' \left| \sum_{d \le D} \chi(d) I_{1,d}^{(2)}(n) \right|.$$

Сумму $E_1^{(2)}(N)$ оцениваем тем же способом как $E_3^{(2)}(N)$ и получаем

$$E_1^{(2)}(N) \ll N^{3/2}L^{-10}. \tag{49}$$

Рассмотрим $E_1^{(1)}(N)$. Сначала, чтобы получить приближенное значение для $I_{1,d}^{(1)}(n)$, воспользуемся формулой (30). Вклад остатков в правой части (30) оцениваем тем же методом как при рассмотрении $E_3^{(1)}(N)$. Используем также (24) и получаем

$$E_1^{(1)}(N) \ll E^* + N^{3/2}L^{-10}, \tag{50}$$

где

$$E^* = \sum_{n \le N}{}' \left| \pi\sqrt{n} \sum_{d \le D} \frac{\chi(d)}{\varphi(d)} \sum_{q \le Q} t_{1,d,n}(q) - M(n) \right|.$$

Заменим теперь сумму по q в последней формуле произведением

$$P = 8 \prod_{2<p\le Q} (1 + t_{1,d,n}(p))$$

и, воспользовавшись опять методом работы [11] (см. стр. 85–86), оценим вклад возникающих остатков. Далее, в силу (27), величину P можно записать в виде

$$P = 8\, \xi_n\, \theta(d),$$

где

$$\xi_n = \xi_{n,Q} = \prod_{2<p\le Q} (1 + h_0(p,n)), \qquad \theta(d) = \theta_{n,Q}(d) = \prod_{\substack{2<p\le Q\\ p|d}} \frac{1 + h_1(p,n,1)}{1 + h_0(p,n)}. \tag{51}$$

Отметим, что в силу (21), (28) и (51) имеем

$$(\log L)^{-2} \ll \xi_n \ll (\log L)^2. \tag{52}$$

Таким образом, получаем

$$E^* \ll E^{**} + N^{3/2} L^{-10}, \tag{53}$$

где

$$E^{**} = {\sum_{n\le N}}' \left| 8\pi \sqrt{n}\, \xi_n\, \Sigma(n) - M(n) \right|, \tag{54}$$

и

$$\Sigma(n) = \Sigma_Q(n) = \sum_{d\le D} f(d), \qquad f(d) = f_{n,Q}(d) = \chi(d)\varphi(d)^{-1}\theta(d). \tag{55}$$

Осталось найти ассимптотическую формулу для $\Sigma(n)$ и определить $M(n)$ таким образом, чтобы сумма E^{**} была возможно наименьшей. Используя (28), (29) и (51), нетрудно проверить, что равномерно по $n \le N$ имеет место оценка.

$$f(d) \ll (\log\log d)^{10}\, d^{-1} \tag{56}$$

Тогда бесконечный ряд

$$\Phi(s) = \Phi_{n,Q}(s) = \sum_{d=1}^{\infty} f(d) d^{-s}$$

абсолютно сходится в полуплоскости $Re(s) > 0$. Используя формулу Перрона (см. [9], гл. 1) и имея ввиду (56) после некоторых вычислений получаем

$$\Sigma(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{10}-iX}^{\frac{1}{10}+iX} \frac{D^s}{s} \Phi(s)\, ds + O\left(N^{-1/100}\right), \tag{57}$$

Функция $f(d)$ мультипликативна по отношению к d. Следовательно, применяя тождество Эйлера и имея ввиду (55) находим

$$\Phi(s) = L(s+1,\chi)\,\mathcal{N}(s), \tag{58}$$

где $L(s,\chi)$ — ряд Дирихле, соответствоющий характером χ и

$$\mathcal{N}(s) = \mathcal{N}_{n,Q}(s) = \prod_p \left(1 + \frac{\chi(p)\,(p\theta_n(p) - p + 1)}{p^{s+1}(p-1)}\right). \tag{59}$$

Пользуясь известными свойствами L–рядов Дирихле и также определением (51) для $\theta(d)$ видим, что функция $\Phi(s)$ имеет аналитическое продолжение в полуплоскости $Re(s) > -1$. Хорошо известно, что $L(s+1,\chi) \ll 1 + |Im(s)|^{1/6}$ если $Re(s) \geq -1/2$. Кроме того, из (28), (29), (51) и (59) следует, что $\mathcal{N}(s) \ll N^{\varepsilon}$ если $Re(s) \geq -1/2$. Следовательно из (58) следует, что

$$\Phi(s) \ll N^{\varepsilon} X^{1/6} \qquad \text{если} \qquad Re(s) \geq -1/2, \quad |Im(s)| \leq X. \tag{60}$$

Применяя теорему вычетов видим, что интеграл в правой части (57) равен

$$2\pi i\,\Phi(0) + \int\limits_{\gamma} \frac{D^s}{s}\Phi(s)\,ds, \tag{61}$$

где γ — ломанная линия определена точками $\frac{1}{10} - iX$, $-\frac{1}{2} - iX$, $-\frac{1}{2} + iX$, $\frac{1}{10} + iX$. Используя (7) и (60) видим, что вклад интеграла из (61) оценивается величиной $O\left(N^{-1/100}\right)$. Таким образом получаем

$$\Sigma(n) = \frac{\pi}{4}\mathcal{N}(0) + O\left(N^{-1/100}\right). \tag{62}$$

Заметим, что из (28), (29), (51) и (59) следует

$$(\log L)^{-5} \ll \mathcal{N}(0) \ll (\log L)^5. \tag{63}$$

Тогда, если определим

$$M(n) = 2\pi^2\sqrt{n}\,\xi_n\,\mathcal{N}(0), \tag{64}$$

то в силу (48), (49), (50), (53), (54) и (62) имеем

$$E_1(N) \ll N^{3/2}L^{-10}. \tag{65}$$

7. Итак, из (52), (63) и (64) получаем неравенство (8). С другой стороны, в силу (15), (43), (47) и (65), выполнена оценка (10).

С етим заканчивается доказательство теоремы.

Список литературы

[1] Р.Вон, *Метод Харди-Литтлвуда*, Москва, „Мир“, 1985.

[2] Ю.В.Линник, *Асимптотическая формула в аддитивной проблеме Гарди–Литтльвуда*, Изв. АН СССР, сер. матем. 24 (1960), 629–706.

[3] Ю.В.Линник, *Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах*, Ленинград, Изд. ЛГУ, 1961.

[4] К.Хооли, *Применения методов решета в теории чисел*, Москва, „Наука“, 1987.

[5] J. Brüdern, E. Fouvry, *Lagrange's Four Squares Theorem with almost prime variables*, J. Reine Angew. Math. 454 (1994), 59–96.

[6] C.Hooley, *On the representation of a number as the sum of two squares and a prime*, Acta Math. 97 (1957), 189–210.

[7] A. Ghosh, *The distribution of αp^2 modulo 1*, Proc. London Math. Soc. (3) 42 (1981), 252–269.

[8] L.K.Hua, *Some results in the additive prime number theory*, Quart. J. Math., 9 (1938), 68-80.

[9] A.A.Karatsuba *Complex Analysis in Number Theory*, CRC Press, 1995.

[10] K.Matomäki, *The binary Goldbach problem with one prime of the form $p = k^2 + l^2 + 1$*, J. Number Theory, 128, (2008), 1195-1210.

[11] D.I.Tolev, *Additive problems with prime numbers of special type*, Acta Arith. 96, 11 (2000), 53–88. Corrigendum: Acta Arith. 105, 2, (2002), 205.

[12] D.I.Tolev, *The binary Goldbach problem with arithmetic weights attached to one of the variables*, Acta Arith., (в печати).

[13] D.I.Tolev, *The ternary Goldbach problem with arithmetic weights attached to two of the variables*, J. Number Theory, (в печати).

Факультет Математики и Информатики,
СУ „Св. Климент Охридский“,
ул. „Дж. Баучер“ 5,
1164 София, Болгария

logaritym@abv.bg
dtolev@fmi.uni-sofia.bg