

$$17.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( \frac{2}{\pi} \arccos x \right)}{\ln(1+x)} \quad 17.12. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x}$$

$$17.13. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{4 \sin^2 x - 6 \sin x + 1}{3 \sin^2 x + 5 \sin x - 4} \quad 17.14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 3x^2 + 7x - 5}{x^4 - 5x + 4}$$

$$17.15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x} \quad 17.16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{5x^3 - x} - 2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$17.17. \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\sqrt{x^2 + x - 2}} \quad 17.18. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 7x - 5}{x^3 + 2x^2 - 9x + 6}$$

$$17.19. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sqrt[5]{3 \operatorname{tg}^2 x} - 1}{2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3}$$

$$17.20. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(2m+1)x}{\cos(2n+1)x}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$17.21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x^2}{x \cos x - \sin x} \quad 17.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - x}$$

$$17.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1) \ln(1+x) - x}{e^x - x - 1} \quad 17.24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1+x}{1-x} - 2x}{x - \sin x}$$

$$17.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}, \quad a > 0 \quad 17.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} 3x - 6 \operatorname{tg} x}{3 \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 3x}$$

$$17.27. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - 2x + 1}{x^{30} - 2x + 1} \quad 17.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\ln^3(1+x)}$$

$$17.29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x^2 \arcsin x} \quad 17.30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\arcsin x - \ln(1+x)}$$

$$17.31. \lim_{x \rightarrow 1} [(x^{10} - 10x + 9)/(x-1)^2]$$

$$17.32. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{50} - 50x + 49}{x^{100} - 100x + 99} \quad 17.33. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 9x - 4}{3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$$

$$17.34. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^{\alpha+2} - (\alpha+1)x^{\alpha+1} + x}{(x-1)^2}$$

$$17.35. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha(1-x^\beta) - \beta(1-x^\alpha)}{(1-x^\alpha)(1-x^\beta)}, \quad \alpha\beta \neq 0$$

$$17.36. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x - x^x} \quad 17.37. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x}$$

$$17.38. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2}{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}$$

$$17.39. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\ln \sin x} \quad 17.40. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\operatorname{ctg} x}$$

$$17.41. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{\ln(x - \pi/2)}{\operatorname{tg} x} \quad 17.42. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\ln \operatorname{tg} x}$$

$$17.43. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{3 + \ln x}{2 - 3 \ln \sin x} \quad 17.44. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha \ln^\beta x}{e^{\gamma x}}$$

$$17.45. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \ln \ln x}{\sqrt[3]{2x+3} \sqrt{\ln x}} \quad 17.46. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha \ln^\beta x}$$

$$17.47. \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln \operatorname{ctg} x \quad 17.48. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)$$

$$17.49. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x^3} \quad 17.50. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}) \sqrt{x}$$

$$17.51. \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\pi - 2 \arcsin(x/\sqrt{x^2+1}))$$

$$17.52. \lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha \ln^\beta(1/x), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

$$17.53. \lim_{x \rightarrow +0} (x^x - 1) \ln x \quad 17.54. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$17.55. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad 17.56. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x} \right)$$

$$17.57. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) \quad 17.58. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$17.59. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x^2} \right) \quad 17.60. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{7/8} - x^{6/7} \ln^2 x)$$

$$17.61. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\alpha}{1-x^\alpha} - \frac{\beta}{1-x^\beta} \right), \quad \alpha\beta \neq 0$$

$$17.62. \lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)} \quad 17.63. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x$$

$$17.64. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{1/x} \quad 17.65. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$$

$$17.66. \lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\ln x} \quad 17.67. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(1+x)^{1/x}}{e} \right)^{1/x}$$

$$17.68. \lim_{x \rightarrow +0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x} \quad 17.69. \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{\ln \operatorname{sh} x}}$$

$$17.70. \lim_{x \rightarrow \pi/2-0} (\pi - 2x)^{\cos x} \quad 17.71. \lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x - 1}$$

$$17.72. \lim_{x \rightarrow \pi/2-0} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} \quad 17.73. \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 3^x)^{1/x}$$

$$17.74. \lim_{x \rightarrow +0} |\ln x|^{2x} \quad 17.75. \lim_{x \rightarrow +0} (1/x)^{\sin x}$$

17.76. Показать, что следующие пределы не могут быть вычислены по правилу Лопиталья, и найти эти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin(1/x)}{\sin^2 x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x - \cos x}$$

Так как

$$\sin^2 t = t^2 + o(t^2), \quad \sqrt{1-t} = 1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2),$$

$$\ln\left(1 + \frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$$

при  $t \rightarrow 0$ , то

$$\left(\sqrt{1-t} + \ln\left(1 + \frac{t}{2}\right)\right)^{1/\sin^2 t} = \left(1 - \frac{t^2}{4} + o(t^2)\right)^{1/(t^2 + o(t^2))}$$

откуда следует, что искомый предел равен  $e^{-1/4}$ .  $\blacktriangle$

Пример 9. Найти

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{7/4} (\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x}).$$

$\triangle$  Используя равенство

$$\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x} = x^{1/4} \left( \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt[4]{1 - \frac{1}{x}} - 2 \right)$$

и полагая  $1/x = t$ , получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{7/4} (\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x}) &= \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(1+t)^{1/4} + (1-t)^{1/4} - 2}{t^2}. \end{aligned}$$

Так как

$$(1+t)^{1/4} = 1 + \frac{t}{4} - \frac{3}{32}t^2 + o(t^2),$$

то

$$(1+t)^{1/4} + (1-t)^{1/4} - 2 = -\frac{3}{16}t^2 + o(t^2), \quad t \rightarrow +0,$$

откуда следует, что искомый предел равен  $-3/16$ .  $\blacktriangle$

Пример 10. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x \operatorname{arctg} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x \arcsin x} \right).$$

$\triangle$  Используя разложения

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4),$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4), \quad \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4),$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin x \operatorname{arctg} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x \arcsin x} &= \frac{\operatorname{tg} x \arcsin x - \sin x \operatorname{arctg} x}{\sin x \operatorname{arctg} x \operatorname{tg} x \arcsin x} = \\ &= \frac{\left(x + \frac{x^3}{3}\right)\left(x + \frac{x^3}{6}\right) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^3}{3}\right) + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)}. \end{aligned}$$

откуда следует, что искомый предел равен 1.  $\blacktriangle$

Найти пределы (19.1—19.18):

$$19.1. \quad 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 2x - 2 \operatorname{sh} x}{x^3}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}, \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}, \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} 3x + \cos 3x - 2}{x^4}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}, \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt[4]{1-x}}{x}.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{x^2}.$$

$$19.2. \quad 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{\operatorname{tg} x - \sin x}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x - \arcsin 2x}{x^3}, \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x} - 1}{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt{1-x}}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x \cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}, \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\ln \cos x}.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos x + \arcsin x - 3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)}.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x^2} - x \operatorname{ctg} x}{x \sin x}.$$

$$19.3. \quad 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e\left(1 - \frac{x}{2}\right)}{x^2}, \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)}{\sin(\sin^2 x)}.$$

$$19.4. \quad 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt[3]{1+3x} + \frac{9}{2}x^2}{x^3}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3) - 2 \sin x + 2x \cos x^2}{\operatorname{arctg} x^3}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{1+\sin x} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - x}{\operatorname{tg}^3 x}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - x \cos x}{\ln^3(1-x)}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x \ln \cos x} - (1+4x)^{1/4} + x - \frac{3}{2}x^2}{x \sin x^2}.$$

$$19.5. \quad 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + \ln(1-x) - 1}{2 - \sqrt{4+x^3}}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} \sin x + \ln \cos x - x}{\sqrt{1-x^3} - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} \operatorname{sh} x + \ln \cos x - x}{1 - \sqrt{1-x^3}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{2x} + \sin x) - 3 \arcsin x + \frac{5}{2} x^2}{\sqrt[3]{8+x^3} - 2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\ln(1+x)}{1+x}\right) - \operatorname{tg}(x - 2x^2)}{\sqrt{4+x^3} - 2}$$

$$19.6. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{\sin x - x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x^3} - \cos x^4}{\operatorname{tg} x - x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{1+\sin x} + \ln(1-x)}{\operatorname{tg} x - \sin x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}}{\operatorname{tg} x - \sin x}$$

$$19.7. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} + \ln(1-x) - 1}{\arcsin x - \sin x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2 \operatorname{tg} x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) \cos x - e^{\operatorname{tg} x} + \sqrt{1+2x^2}}{x - \sin x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\sin x} - \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) - 1}{\operatorname{tg} x - \sin x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - x - \operatorname{ch} x}{\sin x - \operatorname{arctg} x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} + \ln(1-\sin x) - 1}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - e^{\sin x} + \frac{3}{2} x^2}{\arcsin x - \operatorname{tg} x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} \ln(1-x) + \sin(\sin x) + \frac{3}{2} x^2}{\operatorname{tg} x - \arcsin x}$$

$$19.8. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+2x} - x(x+x^2)}{x - \operatorname{arctg} x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \sqrt{1+\sin x} + 1}{\operatorname{sh} x - \operatorname{arctg} x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg}(x/2)} - \sqrt{1+\sin x} - \frac{x^2}{4}}{\arccos x - \operatorname{arctg} x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x+x^2} + \sin \ln(1-x) - e^{-7x^2/6}}{x - \operatorname{arctg} x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sh} 2x} - \cos x - x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} \sin x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-e^{2x}} - \cos 2x + \ln(1+x)}{\sin x - \arcsin \operatorname{tg} x}$$

$$19.9. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{\operatorname{tg} x} - \sin^2 x - x}{x + x^3 - \operatorname{tg} x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^3} - x \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} x^2}{x \cos x - \sin x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-2x} - x}{x^2 \operatorname{tg} x - e^{-x^3} + 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(\sin x + \sqrt{1+x^2})}{\operatorname{tg} x - x \cos^2 x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{e^{x-1}} - \frac{1}{1-x}}{\ln \frac{1+x}{1-x} - 2 \sin x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x) - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{x^2}{6}}{\operatorname{th}(x-x^3) - x}$$

$$19.10. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \operatorname{ch} 2x - 2x}{\operatorname{tg} 2x - 2 \sin x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1+x - \frac{1}{6} x^2\right) - \operatorname{sh} x + \frac{2}{3} x^2}{\sin 2x - 2x \cos x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^{2x} + \ln(1-x^2)}{x \cos x - \sin x} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x + 3 \cos x - 3 \sqrt[3]{1+x}}{1 + \ln(1+x) - e^x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x - \ln(1+x^2) - \arcsin x^3}{x \sin x - x^2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+\operatorname{tg} x} - e^{\sqrt{1+2x}}}{\sin \frac{x^2}{7} - \frac{x}{3} \ln(1-x)}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x+2x^2}}{x + \operatorname{tg} x - \sin 2x} \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \sin x - x \cos x}{e^x + \ln(1-x) - 1}$$

$$19.11. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x \sqrt{1+x} - 1}{\sin x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sin x - x \cos x} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x-x^2} - \ln(1 + \sin x) - 1}{x \cos x - \operatorname{sh} x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln \cos x + x \operatorname{sh} x}{\sin(x^2/2) - \operatorname{sh}(x^2/2)}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} \operatorname{tg} x - x \cos \sin x}{\ln(1+x) - x\sqrt{1-x}} \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - xe^{x^2}}{x\sqrt{1-x^2} - \operatorname{tg} x}$$

$$19.12. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x} + e^{\operatorname{tg} x} - 2}{\frac{\sin x}{x} - \cos x - \frac{x^2}{3}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x - x \ln(1+x)} + \frac{3}{4} \operatorname{tg} x^2 - 1}{xe^x - \arcsin x - x^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 2x + \ln(1 - \sin x) - \sin \ln(1+x)}{(1-2x)^{-1/2} - e^x - x^2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-2x)^{-1/2} - (1+2x)^{-1/2} - \operatorname{arctg} 2x}{e^{-x} + \ln(1 + \arcsin x) - 1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(e^{\sin x} + \ln(1-x) + \frac{x^3}{3}\right)}{\ln \operatorname{ch} x - \frac{x^2}{2}}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x}{e^{\operatorname{sh} x} - (1+2x)^{1/2} - x^2}$$

$$19.13. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - e^{x^2/3}}{\ln(1+3x^2) - 3x^2 \cos x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{1+x^2} - x) + \operatorname{tg} x}{x(\operatorname{ch} x - e^{x^2})}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\ln(e+x)} - e^{x/(3e)} + \frac{x^2}{3e^2}}{x \operatorname{ch} x - \sin x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - \arcsin x}{\operatorname{sh}(x-x^2) - \ln\sqrt{1+2x}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} \frac{2x}{2+x^4} + \cos \frac{2x}{2-x^4} - 2e^{x^4/2}}{\operatorname{tg} \sqrt{1+x^4} - \operatorname{tg} \sqrt{1-x^4}}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+\cos x} - e^{2+x^2} + \frac{3}{2} e^2 \sin x^2}{\ln(1+x^2) - (\operatorname{arctg} x)^2}$$

$$19.14. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x) - 2x + 2x^2}{\frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \arcsin x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{8} x^2 - 1}{e^x - \sqrt{1+2x} - x^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - e^{\operatorname{tg} x} + 6x^3 + x^2}{\ln(1+x) - \operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{2}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} 2x - (1+3x)^{-1/3} - x}{\frac{1}{2} x^2 + \ln(1 + \operatorname{tg} x) - \arcsin x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{x(1-x)} - \operatorname{sh} x - \cos x}{6}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{ch} x - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x + \sqrt{1-3x} - 2\cos x + 1}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x + \cos 2x} - e^{\operatorname{tg} x} + 2x^2}{2\sin x - 2 \ln(1+x) - x^2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} \sin x^3 + \sin \operatorname{sh} x^3}{\frac{x^2}{2} \sqrt{1-x} + \ln(1+x) - x \cos x}$$

$$19.15. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x^2}{e^{\arcsin x} - e^{\sin x} - \frac{1}{2} x^3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x} + \operatorname{ch} \frac{x}{\sqrt{3}} - 1}{\operatorname{sh} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{arctg} \sin x - \operatorname{tg} \operatorname{sh} 3x}{\sqrt{1+x} \sin x^3 - x^2 \ln\left(1 - \frac{16}{9} x\right)}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \sqrt{1+x^3} - \sin 1}{5}}{\sqrt{1-2x} \ln \cos x - 1}$$

$$19.16. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \sqrt{1+2x^2}}{\operatorname{tg}^4 x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \ln(1 - \sin x) - 1}{\sqrt[3]{8-x^4} - 2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)}{e^{-x^2/2} - \cos x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x(1+x)} - \cos(1-e^{-x}) - \operatorname{arctg} x}{x^4}$$

$$19.17. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(xe^x) + \sin(xe^{-x}) - 2x - \frac{2}{3} x^3}{x^5}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \cos x) + x \ln\left(1 + \frac{2}{3} x^2\right) - x}{\sqrt{1+x^5} - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{x^2}{2}} - e^{-x^2/6}}{x^2 \ln(1+x) - (\operatorname{tg} x^2) \cos \operatorname{sh}(x/2)}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + x \sin x) - \frac{x^2}{2} e^x}{\frac{x}{2} \sqrt[3]{1-x} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{3}} - \sin(x/2) - 1}$$

$$19.18. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e^{\sqrt{1-4x^2}}}{\frac{1}{x} \arcsin 2x - 2 \operatorname{ch} x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{1+2x} - \operatorname{tg} x) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2}{xe^{x^2} - \sin x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x} - e^{-x} + x^2 \sqrt{1+x}}{\sin^2 x - \ln \operatorname{ch}^2 x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \frac{1}{2} \operatorname{sh} x^2 - x}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}$$

19.19. Найти числа  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $n \in \mathbb{N}$  такие, чтобы существовал конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x^n} - \cos x^2}{x^n}$$

Найти пределы (19.20—19.42):

$$19.20. 1) \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - x)^{1/x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ch} x)^{1/\sin^2 x} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\operatorname{ch} 3x} \right)^{1/x^2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{x^2}}{\operatorname{ch} 3x} \right)^{1/x^2} \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \ln(e+x) - \frac{x}{e} \right)^{1/\sin^2 x} \quad ? \quad \left( \frac{1}{n} \right)$$

$$19.21. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)^{1/x^2} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(\sqrt{1+x^2} + x)}{x} \right)^{1/x^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{\arcsin x} \right)^{1/x^2} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{arctg} x} \right)^{1/x^2}$$

$$19.22. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{2(\sqrt{1+x} - 1)} \right)^{\operatorname{ctg} x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}}{\ln \operatorname{ch} x} \right)^{1/x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} e^{x/(1+x)} - \frac{1}{\sin x} \right)^{1/\operatorname{arctg} x} \quad ?$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} 3x + \cos 4x - \cos 2x}{\ln \sqrt{1+3x} - \ln \sqrt{1-3x}} \right)^{1/\sin x}$$

$$19.23. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + 6 \frac{x - \sin x}{x^2} \right)^{2 \operatorname{ch} x - 1/x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^2 - (1+2x)^{1/x}}{2xe^2} \right)^{1/x} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{2\sqrt{1+2x} - 2\sqrt[3]{1+3x}} \right)^{1/x}$$

$$19.24. 1) \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+\operatorname{tg} 2x} + \ln(1-x))^{1/x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg}(x/3) + 2 - \sqrt[3]{1+x})^{\operatorname{ctg}^2 x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( e^{\frac{1}{3} \sin x} + \sqrt[3]{1-\operatorname{tg} x} - 1 \right)^{1/\ln(1+x^2)}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e} (1+x)^{1/x} + \frac{2x}{4+5x} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$$

$$19.25. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{arctg} x}{e^x - 1 - \frac{x^2}{2}} \right)^{1/x^2} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x \operatorname{sh} x}{\ln(1+x^2)} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 \cos x + x}{2\sqrt{1+x}} \right)^{1/x^2} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x \sin x}{2 \operatorname{ch} x - 2} \right)^{1/x^2}$$

$$19.26. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\operatorname{sh} x} \right)^{1/\sin^2 x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+x^2 - \sqrt{1+x^2}}{\operatorname{ch} x - 1} \right)^{1/x^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{\cos x}}{e^x - \ln(1+x)} \right)^{1/x^2} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x^2}} \right)^{1/x^2}$$

$$19.27. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(\arcsin x)^2 - x^2}{\sin^2(x^2/\sqrt{3})} \right)^{1/\sin^2 x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{arctg} \frac{2x}{2-x^2} - x}{x \sin(x^2/6)} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 - (\operatorname{arctg} x)^2}{x^2 \sin \frac{2}{3} x^2} \right)^{1/x^2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3 \arccos(1-2x^2) - 6x}{x^3} \right)^{1/x^2} \quad a, \delta, \epsilon$$

$$19.28. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2e^{x-x^2} - 2}{2x - x^2} \right)^{(\sin x)/x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+x} - \frac{1}{2} \operatorname{sh} x} \right)^{1/\arcsin x^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sh}(x + \sin x)}{\sin x + \arcsin x} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$$

$$19.29. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{x}{\ln(e^2 - xe^2)} \right)^{1/x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin 5x - \arcsin 3x - \operatorname{arctg} x}{x} \right)^{1/\ln \cos 3x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sh}(2x + x^3) - \operatorname{sh}(x + 2x^3)}{x} \right)^{1/(2\ln(1+x^3) - \ln^2(1+x))}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg}(2x + x^3) - \operatorname{th}(x + 2x^3)}{x} \right)^{1/(\sqrt[3]{1+x^3} - \sqrt{1+x^2})}$$

$$19.30. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \cos 2x + \frac{xe^x}{1-x} - x \right)^{1/x^3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt[3]{1+2x+x^3} - \frac{2x}{2x+3} \right)^{1/x^3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2x}{x-2} + \ln(e + xe^{x+1}) \right)^{1/x^3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2-x}{2+x} + \sin \ln(1+x) \right)^{1/x^3}$$

$$19.31. 1) \lim_{x \rightarrow 0} (x - \ln(1+x) + \cos(xe^{-x}))^{1/x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (e^{\sin x} - e^{2x-x^2} + e^{\operatorname{tg} x})^{1/x^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \operatorname{arctg} x \right)^{1/\arcsin x^3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - x}{\sqrt{1+x^2} - \ln(1+x^3)} \right)^{1/x^3}$$

$$19.32. 1) \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{8+x^3} - \cos x^2)^{1/\arcsin x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - x + e^{\operatorname{arctg} x} - 1)^{1/\sin^3 x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3}{2} x^2 + \sqrt[3]{1+3 \sin x} + \ln(1-x) \right)^{1/\operatorname{sh}^3 x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt[3]{1-3x \cos 2x} + 4x^2 + \frac{x}{1+3x} \right)^{1/(\arcsin x)^3}$$

$$19.33. 1) \lim_{x \rightarrow 0} (e^{\operatorname{tg} x} + \ln(1-x))^{\operatorname{ctg} x^3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt{1+\sin x} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{8} x^2 \right)^{\operatorname{ctg} x^3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1-2x+3x^2} + x(1-\operatorname{sh} x))^{\operatorname{ctg}^3 x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( e^{\sin x} - \frac{x^2}{2} + \cos x - \sqrt{1+2x} \right)^{1/\operatorname{tg} x^3}$$

$$19.34. 1) \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1-x) + e^{x \cos x})^{1/(x^2(\sqrt{1+3x}-1))}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\pi} \arccos x + \sin \frac{2x}{\pi} \right)^{1/(\sqrt{1+2x^3}-1)}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \operatorname{th}(xe^x) + \frac{1}{2} \ln(1-2x) \right)^{1/x^3}$$

$$19.35. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( e^{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{1-x} + \cos x + x^2 \right)^{1/\sin x^3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \operatorname{arctg} x - \operatorname{sh} 2x)^{1/\ln^3(1-x)}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( e^{\sin x} - \frac{x^2}{2} - x \cos x \right)^{1/\ln^2(1-\frac{x}{2})}$$

$$19.36. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt[3]{1+\operatorname{tg} x} - \frac{x}{3} e^{-x/3} \right)^{1/(x \ln \cos x)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{-x}}{1-x} + \frac{1}{2} (\ln \sqrt{1+2x} - \operatorname{tg} x) \right)^{1/(x(\cos x - 1))}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( e^{x-x^2} - x \sqrt[3]{1-\frac{3}{2}x} \right)^{1/(\operatorname{tg} x - x)}$$

$$19.37. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt{1+2 \operatorname{tg} x} + \frac{x^2}{2} - \sin x \right)^{1/(\operatorname{sh} x - \operatorname{arctg} x)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x + \operatorname{arctg} x)^{1/(\operatorname{sh} x - \sin x)}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \sqrt{1-x} \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \right)^{1/(\operatorname{tg} x - \operatorname{sh} x)}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \cos(\sin x) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + 4x^3 \right)^{1/(\operatorname{tg} x - \operatorname{sh} x)}$$

$$19.38. 1) \lim_{x \rightarrow 0} (e^{\sin 2x} - 2x - 2x^2)^{1/\sin x^4}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( e^{\sin x} + \ln(1-x) + \frac{x^3}{3} \right)^{1/x^4}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x + \sin x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} \right)^{1/x^4}$$

$$19.39. 1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x \arcsin x - x^2 e^{x^2})^{1/\sin^2 x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x \operatorname{arctg} x - x^2 \operatorname{ch}^2 x)^{1/(1-\cos x)^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \operatorname{th} x \ln \frac{1+x}{1-x} - 2x^2 \cos x^2 \right)^{1/x^4}$$

$$19.40. 1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{sh} x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x^2 \cos x^2)^{1/x^4}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \cos \sin x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 \right)^{1/\sin x^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{ch} x + 2 \cos x}{3} + \frac{x^2}{6(1+x^2)} \right)^{1/\operatorname{arctg} x^4}$$

$$19.41. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2x}{\sin 2x} - \frac{2}{3} x^2 \right)^{x^2/(x^2 - \operatorname{arctg} x^2)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \cos x + x^2 \sqrt{x + \frac{1}{4}} \right)^{(x+e)/\operatorname{arcsin} x^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt[3]{1+3x} - \operatorname{tg} \sin x + x^2 \right)^{1/(\operatorname{arctg} x - x \cos x)}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{(1+x^2)^{1/x^2} - e^{\cos x}}{e} \right)^{1/(\sqrt{\operatorname{ch} 2x} - e^{x^2})}$$

$$19.42. 1) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x+x^2) + 2 \operatorname{arcsin}(xe^x) - 2x)^{\operatorname{ctg}^2 x + \frac{1}{3x^2}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{arcsin} x^3)^{e^x/(x\sqrt{\cos x} - \sin x + \operatorname{tg}^3 x)}$$

19.43. Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/x^3} (\operatorname{arccos} \operatorname{sh} x + x)^{\operatorname{ctg} x^2} = e^{-2/(3\pi)}$$

Найти пределы (19.44—19.60):

$$19.44. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 \ln(1+x)}{x^2} - \frac{2}{(x+1) \operatorname{sh} x} \right)^{\operatorname{ctg} x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{6}{\ln(1+3 \sin^2 x)} - \frac{4}{\ln(2-\cos 2x)} \right)^{1/x^2}$$

$$19.45. 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{ch} x)^{x^2(\operatorname{tg}(1/x) - \operatorname{arctg}(1/x))}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2/3} \left( \frac{x}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \right)^{x^4} \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^4 - x^2 - 1} \right)^{x^4 \sin^2(1/x)}$$

$$19.46. 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x^2-x}}{x} + \frac{1}{4} \sin \frac{2}{x} \right)^{x^2 + \sin 3x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \ln(1+x) - x \ln x + \operatorname{arctg} \frac{1}{2x} \right)^{x^2 \operatorname{arctg} x}$$

$$19.47 \lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{sh} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}))^{1/\ln x}$$

$$19.48. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left( \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x \right)^{\operatorname{tg} x}$$

$$19.49. 1) \lim_{x \rightarrow 1} (e^{x-1} - \ln x)^{1/(\sin(x-1) + \cos(x-1) - x)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} (e^{\sin(x-1)} - \ln x)^{\operatorname{ctg}^2(x-1)}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln x \right)^{1/(\cos^2 x \sin^2(1-x))}$$

$$19.50. 1) \lim_{x \rightarrow 1} (x - \ln x)^{1/(\cos^2 x \sin^2(1-x))}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} (2^{x-1} - x^x \ln 2)^{1/(\sin(x-1) - \cos(1-x) + x)}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1+0} (\ln(x^2-x) - \ln(x-1) + e^{1-x})^{1/\operatorname{arcsin}(x-1)^2}$$

$$19.51. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x^2-1} \right)^{1/\sin(x-1)}$$

$$19.52. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{(x-1)/x} - \sqrt[4]{4x-3}}{\operatorname{ch}(x-1) - \cos 2(x-1)}$$

$$19.53. 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\sqrt[3]{x} - \operatorname{arcsin}(x-1) - 3 \cos(x-1)}{e^{x-1} - 1 - \ln x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - \sin(x-1) - 2 \cos(x-1)}{\operatorname{arctg}(x-1) - \ln x}$$

$$19.54. 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sin \pi x)}{\ln(1+\ln x)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{\pi x - 2x^2}}{\cos x} \quad 3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{ctg} x + 2x - \frac{\pi}{2}}{(1 - \operatorname{tg} x)^3}$$

$$19.55. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x(1-x^2)^{1/2} - \cos x \ln(1+x)}{\ln \sin x - \ln x}$$

$$19.56. 1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{\operatorname{arcsin} x} \right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \operatorname{tg} x} \right) \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{(x+1) \operatorname{sh} x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right)$$

$$19.57. 1) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( 1 - x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( (2e)^{1/x} + e^{1/x} - 2 \right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^3 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - x^2 + \frac{x}{2} \right)$$

$$19.58. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{x^6+x^5} + \sqrt[6]{x^6-x^5} - 2x}{x \ln(1+x) - x \ln x - x \sin(1/x)}$$

$$19.59. 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{1/x}(x^2-x+2) - \sqrt{x^4+x^2+1})$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \left( x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1 \right) e^{1/x} - \sqrt{x^{12} - x^9 + 2} \right)$$

18.42. 1) 5,027. 2) 3,019. 3) 3,017. 4) 1,396. 5) 0,996. 6) 0,309. 7) 0,262. 8) 0,675.

18.43. 1)  $e/(n+1)!$ . 2)  $1/7!$ . 3)  $1/(2^8 8!)$ . 4)  $2 \cdot 10^{-6}$ . 5)  $2 \cdot 10^{-8}$ . 6)  $1,5 \cdot 10^{-3}$ .

18.44. 1) 2,7182818. 2) 3,162. 3) 0,017452. 4) 0,99619. 5) 3,1072. 6) 1,0414.

### § 19. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

19.1. 1)  $-1/2$ . 2) 1. 3)  $1/2$ . 4)  $1/24$ . 5)  $27/4$ . 6)  $1/2$ . 7)  $4/3$ . 8) 0. 19.2. 1)  $-2$ . 2)  $-1$ . 3)  $-1$ . 4)  $8/15$ . 5)  $-1$ . 6)  $-2$ . 7)  $7/6$ . 8) 0. 19.3. 1)  $-e/2$ . 2) 1. 3)  $11e/24$ . 4)  $\pi/4$ . 19.4. 1)  $3/2$ . 2)  $4/3$ . 3)  $-1/8$ . 4)  $-1/2$ . 5)  $-4$ . 19.5. 1) 2. 2)  $7/8$ . 3)  $1/8$ . 4)  $44/5$ . 5)  $40/3$ . 19.6. 1) 0. 2) 3. 3)  $-11/12$ . 4)  $-13/12$ . 19.7. 1)  $-1$ . 2) 2. 3)  $-4$ . 4)  $1/8$ . 5) 3. 6)  $-1/4$ . 7)  $-10/8$ .  $-1$ . 19.8. 1)  $-3$ . 2)  $1/8$ . 3)  $-1/6$ . 4)  $5/2$ . 5)  $7/5$ . 6)  $11/4$ . 19.9. 1)  $3/4$ . 2)  $-1$ . 3)  $1/4$ . 4)  $1/8$ . 5)  $-1/6$ . 6)  $-1/8$ . 19.10. 1)  $4/9$ . 2)  $-1$ . 3)  $-6$ . 4)  $7/6$ . 5)  $-6$ . 6)  $21e/20$ . 7)  $2/5$ . 8)  $-4$ . 19.11. 1)  $7/4$ . 2)  $3/2$ . 3)  $3/2$ . 4)  $13/15$ . 5) 4. 6) 1. 19.12. 1)  $15/2$ . 2)  $3/4$ . 3)  $3/7$ . 4)  $23$ . 5)  $9/2$ . 6) 5. 19.13. 1)  $1/18$ . 2)  $-1$ . 3)  $5/(12e^3)$ . 4)  $1/7$ . 5)  $-\frac{11}{12} \cos^2 1$ . 6)  $-2e^2$ . 19.14. 1)  $-32/3$ . 2)  $9/16$ . 3) 9. 4)  $28/3$ . 5)  $-72/5$ .

6)  $1/4$ . 7)  $-1$ . 8)  $24/7$ . 19.15. 1) 2. 2) 0. 3)  $-27/5$ . 4)  $\frac{5}{2} \cos 1$ . 19.16. 1) 1. 2)  $1/2$ . 3)  $1/2$ . 4)  $7/24$ . 19.17. 1)  $-7/5$ . 2)  $7/45$ . 3)  $1/12$ . 4)  $72/5$ . 19.18. 1)  $5e/8$ . 2)  $1/7$ . 3)  $14/3$ . 4)  $4/3$ . 19.19.  $\alpha = -1/2$ ,  $n = 4$ . 19.20. 1)  $e^{-1/2}$ . 2)  $e^{-1/2}$ . 3)  $e^{1/2}$ . 4)  $e^{-5}$ . 5)  $e^{-7/2}$ . 6) Не существует. 19.21. 1)  $e^{1/6}$ . 2)  $e^{-1/6}$ . 3)  $e^{-1/6}$ . 4)  $e^{2/3}$ . 19.22. 1)  $e^{1/4}$ . 2)  $e^{7/3}$ . 3)  $e^{-2/3}$ . 4)  $e^{-2}$ . 19.23. 1)  $e$ . 2)  $e^{-7/3}$ . 3)  $e^{1/4}$ . 19.24. 1)  $e^{-1/4}$ . 2)  $e^{1/9}$ . 3)  $e^{-1/18}$ . 4)  $e^{-1/6}$ . 19.25. 1)  $e^{-1/2}$ . 2)  $e^{2/3}$ . 3)  $e^{1/6}$ . 4)  $e^{-1/4}$ . 19.26. 1)  $e^{-1/24}$ . 2)  $e^{1/6}$ . 3)  $e^{-5/4}$ . 4)  $e^{-3/4}$ . 19.27. 1)  $e^{8/15}$ . 2)  $e^{1/10}$ . 3)  $e^{-23/30}$ . 4)  $e^{9/20}$ . 19.28. 1)  $e^{-5/6}$ . 2)  $e^{-1/8}$ . 3)  $e^{7/12}$ . 4)  $e^{7/12}$ . 2)  $e^{23/4}$ . 3)  $e^{-5/2}$ . 4)  $e^{-4}$ . 19.30. 1)  $e^{5/2}$ . 2)  $e^{43/81}$ . 3)  $e^{-5/12}$ . 4)  $e^{-1/12}$ . 19.31. 1)  $e^{2/3}$ . 2)  $e^{7/6}$ . 3)  $e^{2/3}$ . 4)  $e^{7/6}$ . 19.32. 1)  $e^{1/12}$ . 2)  $e^{-1/6}$ . 3)  $e^{7/6}$ . 4)  $e^{28/3}$ . 19.33. 1)  $e^{1/6}$ . 2)  $e^{-3/16}$ . 3)  $e$ . 4)  $e^{-1/2}$ . 19.34. 1)  $e^{-4/9}$ . 2)  $e^{-(\pi^2+4)/(32\pi^2)}$ . 3)  $e^{-7/8}$ . 19.35. 1)  $e^{1/6}$ . 2)  $e^2$ . 3)  $e^{-4}$ . 19.36. 1)  $e^{-25/81}$ . 2)  $e^{-3/3}$ . 3)  $e^{-7/4}$ . 19.37. 1)  $e^2$ . 2)  $e^{1/8}$ . 3)  $e^{-13/4}$ . 4)  $e^{24}$ . 19.38. 1)  $e^{-2}$ . 2)  $e^{-3/8}$ . 3)  $e^{-1/15}$ . 19.39. 1)  $e^{-1}$ . 2)  $e^{-4}$ . 3) 1. 19.40. 1)  $e^{1/2}$ . 2)  $e^{5/24}$ . 3)  $e^{-1/8}$ . 19.41. 1)  $e^{14/15}$ . 2)  $e$ . 3)  $e^9$ . 4)  $e^{1/6}$ . 19.42. 1)  $e^{-8/9}$ . 2)  $e$ . 19.44. 1)  $e^{-1}$ . 2)  $e^{-5/6}$ . 19.45. 1)  $e^{2/3}$ . 2)  $e^{13/90}$ . 3)  $e^4$ . 19.46. 1)  $e^{-1/6}$ . 2)  $e^{\pi/6}$ . 19.47. 1)  $e^3$ . 19.48. 1) 19.49. 1)  $e^{-2}$ . 2)  $e$ . 3)  $e^{1/(n+1)}$ . 19.50. 1)  $e^{1/(2 \cos^2 1)}$ . 2) Предел не существует. 3)  $e^{1/6}$ . 19.51.  $e^{-1/3}$ . 19.52.  $2/5$ . 19.53. 1)  $7/6$ . 2)  $3/2$ . 19.54. 1)  $-\pi$ . 2)  $-\pi$ . 3)  $1/6$ . 19.55.  $-3$ . 19.56. 1) 0. 2) 0. 3)  $1/3$ . 4)  $-1/2$ . 19.57. 1)  $1/2$ . 2)  $2 + \ln 2$ . 3)  $1/3$ . 19.58.  $5/18$ . 19.59. 1) 1. 2)  $17/12$ . 19.60. 1)  $2/5$ . 2)  $11/6$ . 3)  $-4/3$ . 4)  $1/2$ .

### § 20. Исследование функций

20.1. 1)  $(-\infty; 1/2)$ ,  $(3; +\infty)$  — интервалы возрастания,  $(1/2; 3)$  — интервал убывания. 2)  $(-\infty; 6)$  — интервал возрастания,  $(6; +\infty)$  — интервал убывания. 3)  $(-\infty; 1)$ ,  $(3; +\infty)$  — интервалы возрастания,  $(1; 3)$  — интервал убывания. 4)  $(-\infty; -3/2)$ ,  $(-1/2; +\infty)$  — интервалы возрастания,  $(-3/2; -1/2)$  — интервал убывания.

20.2. 1)  $(-\infty; 1/3)$  — интервал возрастания,  $(1/3; +\infty)$  — интервал убывания. 2)  $(-\infty; 0)$ ,  $(0; 1)$  — интервалы убывания,  $(1; +\infty)$  — интервал возрастания. 3)  $(-\infty; -1)$ ,  $(0; 1)$  — интервалы возрастания,  $(-1; 0)$ ,  $(1; +\infty)$  — интервалы убывания. 4)  $(0; \alpha)$  — интервал возрастания,  $(\alpha; +\infty)$  — интервал убывания. 5)  $(0; \sqrt{5})$  — интервал убывания,  $(\sqrt{5}; +\infty)$  — интервал возрастания. 6)  $(0; 1/\sqrt{e})$  — интервал убывания,  $(1/\sqrt{e}; +\infty)$  — интервал возрастания. 7)  $(0; 1)$ ,  $(1; e)$  — интервалы убывания,  $(e; +\infty)$  — интервал возрастания. 8)  $(-\infty; 3)$ ,  $(3; +\infty)$  — интервалы убывания. 9)  $(0; +\infty)$  — интервал убывания.

10)  $(2k - \frac{3}{4}; 2k + \frac{1}{4})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , — интервалы возрастания,  $(2k + \frac{1}{4}; 2k + \frac{5}{4})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , — интервалы убывания.

20.3. 1)  $(-\infty; -2)$ ,  $(-2; -\sqrt{2})$ ,  $(\sqrt{2}; +\infty)$  — интервалы возрастания,  $(-\sqrt{2}; -1)$ ,  $(-1; \sqrt{2})$  — интервалы убывания. 2)  $(-\infty; -1)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(1; +\infty)$  — интервалы убывания. 3)  $(-\infty; -3)$ ,  $(3; +\infty)$  — интервалы убывания,  $(-3; -\sqrt{3})$ ,  $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ ,  $(\sqrt{3}; 3)$  — интервалы возрастания. 4)  $(-\infty; 0)$ ,  $(2; +\infty)$  — интервалы убывания,  $(0; 2)$  — интервал возрастания.

20.4. 1)  $(-\infty; -50)$ ,  $(-50; 25)$  — интервалы возрастания,  $(25; +\infty)$  — интервал убывания. 2)  $(-2\sqrt{2}; -2)$ ,  $(0; 2)$  — интервалы возрастания,  $(-2; 0)$ ,  $(2; 2\sqrt{2})$  — интервалы убывания. 3)  $(-\frac{9}{2}; -3)$ ,  $(0; +\infty)$  — интервалы возрастания,  $(-3; 0)$  — интервал убывания. 4)  $(-1; -2/5)$  — интервал убывания,  $(-2/5; +\infty)$  — интервал возрастания. 5)  $(-\infty; -\sqrt{3})$ ,  $(\sqrt{3}; +\infty)$  — интервалы возрастания,  $(-\sqrt{3}; -1)$ ,  $(-1; 1)$ ,  $(1; \sqrt{3})$  — интервалы убывания. 6)  $(-\infty; -1)$ ,  $(1; +\infty)$  — интервалы возрастания. 7)  $(-\infty; -1)$ ;  $(0; +\infty)$  — интервалы возрастания.

20.5. 1)  $(-2; 0)$  — интервал возрастания,  $(-\infty; -2)$ ,  $(0; +\infty)$  — интервалы убывания. 2)  $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , — интервалы возрастания,  $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , — интервалы убывания.

20.6. 1)  $(-\infty; 0)$  — интервал возрастания,  $(0; +\infty)$  — интервал убывания. 2)  $(0; 1)$  — интервал возрастания,  $(1; +\infty)$  — интервал убывания.

20.7.  $(-\infty; -e^{-2})$  — интервал возрастания,  $(-e^{-2}; 0)$  — интервал убывания.

20.8. 1)  $a < 0$ . 2)  $a \leq -3$ ,  $a \geq 1$ . 3)  $a \geq 1$ . 4)  $a \geq 5$ . 5)  $a \geq 6$ . 6)  $-1 \leq a \leq 7$ .

20.11. Нет, не следует; контрпример  $f(x) = x + \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

20.13. 1)  $x = 0$  — точка максимума,  $x = 8/3$  — точка минимума.

2)  $x = (3 - \sqrt{17})/4$  и  $x = 3$  — точки минимума,  $x = (3 + \sqrt{17})/4$  — точка максимума. 3)  $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$  — точки максимума,  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$  — точки минимума,  $k \in \mathbb{Z}$ . 4)  $x = (2 + \sqrt{7})/3$  — точка максимума,  $x = (2 - \sqrt{7})/3$  — точка минимума. 5)  $x = 4$  — точка минимума. 6)  $x = 1/2$  — точка минимума. 7)  $x = 1$  — точка максимума,  $x = 2$  — точка минимума. 8)  $x = -5/4$  — точка максимума.

20.14.  $x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ . 20.15.  $x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ .

20.16. 1) Максимум  $y = 12$  при  $x = 0$ , минимум  $y = -4$  при  $x = \pm 2$ . 2) Максимум  $y = 2$  при  $x = 0$ . 3) Максимум  $y = 1$  при  $x = 2$ , минимумы  $y = 3/4$  при  $x = 1$  и  $x = 3$ . 4) Минимум  $y = 4$  при  $x = 1$ . 5) Минимум  $y = -324$  при  $x = 1$ , максимум  $y = 0$  при  $x = -5$ . 6) Минимум  $y = -108$  при  $x = 0$ , максимум  $y = 0$  при  $x = -2$ .

20.17. 1) Максимум  $y = -4$  при  $x = 1/2$ . 2) Минимум  $y = -1/4$  при  $x = -2$ , максимум  $y = 1/4$  при  $x = 2$ . 3) Максимум  $y = -8$  при  $x = 3$ , минимум  $y = 0$  при  $x = 1$ . 4) Максимум  $y = -27/4$  при  $x = 5$ . 5) Минимум  $y = 0$  при  $x = 0$ , минимум  $y = 32/3$  при  $x = 4$ , максимум  $y = 1/4$  при  $x = -1$ . 6) Минимум  $y = 0$  при  $x = 0$ , максимум  $y = -256/27$  при  $x = 1$ .

20.18. 1) Минимумы  $y = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$  при  $x = 2\pi k - \frac{\pi}{3}$ , максимумы  $y = \frac{3\sqrt{3}}{4}$  при  $x = 2\pi k + \frac{\pi}{3}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 2) Максимумы  $y = 1$  при  $x = 2\pi k$  и  $x = 2\pi k + \pi$ , минимумы  $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  при  $x = 2\pi k + \frac{5\pi}{4}$ , минимумы  $y = 1$  при  $x = 2\pi k + \frac{3\pi}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .