Специализиран научен съвет по математика и механика при ВАК

Първан Евтимов Първанов

ОЦЕНКИ НА ГРЕШКАТА НА ЗАПАЗВАЩИ ФОРМАТА ПРИБЛИЖЕНИЯ

Д И С Е Р Т А Ц И Я

за присъждане на образователна и научна степен
"Доктор"

Научен ръководител:
проф. дмн Камен Иванов

София 1999

Съдържание

Увод.

Теорията на апроксимациите (ТА) е една от основните части на съвременната математика. Необходимостта да се представят сложни математически обекти чрез по-прости е проблем не само на чисто теоретическата математика, но и на някои конкретни математически изчисления. Нещо повече, ТА има особено значение не само като основа на числения анализ, но също така в математическото програмиране, теорията на управлението и други раздели на математиката и нейните приложения.

Исторически началото на ТА поставя задачата на руския математик П. Л. Чебишов за равномерното приближение на непрекъснати функции с алгебрични полиноми. Множеството $C(\Delta)$ на непрекъснатите функции в даден интервал Δ става метрично като се вземе метриката

$$\|f - g\| = \max_{x \in \Delta} \{|f(x) - g(x)|\}.$$

Като апарат за приближение се използва $H_n \subset C(\Delta)$, koето е множеството от всички алгебрични полиноми от степен, не надвишаваща n. "Близостта"между функцията f от $C(\Delta)$ и приближаващия я полином P от H_n се дава с $\|f - P\|$. Така, ако $\|f - P\| < \epsilon$, то по стойността на $P(x)$ можем да възстановим $f(x)$ с грешка, която не надвишава ϵ.

От друга страна, съгласно класическата теорема на К. Вайерщрас за всяка $f \in C(\Delta)$ и всяко $\epsilon > 0$ съществуват n и $P \in H_n$ такива, че $\|f - P\| < \epsilon$. Едно от най-красивите доказателства на този факт е с помощта на полиномите на С. М. Бернщайн

$$B_n(f, x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x),$$

където $PP_{n,k}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}$, а $\Delta = [0, 1]$.

На основата на тези полиноми по-късно се появяват много техни модификации, които запазват някои свойства на B_n, а други подобряват. Така съответствието между функцията и построения по нея полином поражда оператор (в повечето случаи линеен и положителен), изследването на който е задача на ТА. Най-важният момент в тези изследвания е оценката на грешката на приближението.

В глава първа се разглежда именно такъв оператор U_n, дефиниран за реално значни функции от класа $L_\infty[0,1]$ по следния начин

$$U_n(f,x) = f(0)P_{n,0}(x) + f(1)P_{n,n}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} P_{n,k}(x) \int_0^1 (n-1)P_{n-2,k-1}(t)f(t)dt,$$

където $P_{n,k}(x)$ са същите базисни полиноми.

Операторът U_n е въведен и изследван от T. N. T. Goodman и A. Sharma в [5] и [6]. В тези статии са доказани редица негови свойства.

H. Berens и Y. Xu разглеждат в [2] фамилията от оператори

$$M_n^{\alpha,\beta}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) \frac{\int_0^1 \mu_{\alpha,\beta}(t)P_{n,k}(t)f(t)dt}{\int_0^1 \mu_{\alpha,\beta}(t)P_{n,k}(t)dt},$$

където $\mu_{\alpha,\beta}(t) = t^\alpha(1-t)^\beta$ и $\alpha,\beta > -1$. При операторите $M_n^{\alpha,\beta}$, коефициенти пред базисните полиноми $P_{n,k}$ за $k = 0,\ldots,n$ са нормираните скаларни произведения с тегло $\mu_{\alpha,\beta}$ на функцията f и $P_{n,k}$.

Операторът U_n е граничен случай на $M_n^{\alpha,\beta}$ при $\alpha,\beta \to -1$ $\alpha,\beta > -1$ за непрекъснатите в 0 и 1 функции. В [2] този оператор не е разгледан.

Някои свойства, доказани в дисертацията за U_n, са граничен аналог при $\alpha,\beta \to -1$ $\alpha,\beta > -1$ на свойствата на $M_n^{\alpha,\beta}$ от в [2]. Интересното, съгласно [5] и [6], за разгледания в глава първа оператор U_n е, че са в сила и свойствата на класическия оператор на Бернщайн: запазване линейните функции и ако функцията е изпъкнала, то $U_n f \geq U_{n+1} f \geq f$. (Последните не са в сила за $M_n^{\alpha,\beta}$.) Освен това U_n е самоспрегнат. Притежаването на всички тези свойства е уникално за оператор от тип на Бернщайн.

В глава първа е получена оценка на грешката на приближението с оператора U_n в термините на следния K-функционал

$$K(f,t)_\infty = K\left(f,t;L_\infty,W_\infty^2(\varphi)\right) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{g\in W_\infty^2(\varphi)} \left\{\|f-g\|_\infty + t\|\varphi g''\|_\infty\right\},$$

където

$$W_\infty^2(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in AC[0,1] \mid f' \in AC_{loc}[0,1],\ \ \varphi f'' \in L_\infty[0,1]\},$$

а $\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} x(1-x)$. Оценката е получена при подходящо избран в зависимост от n аргумент t на K-функционала.

Основният резултат в глава първа е следната еквивалентност на грешката и разглеждания К-функционал: $\|f - U_n f\|_\infty \sim K\left(f, n^{-1}\right)_\infty$, т.е. следната

Теорема 1.1.1 *Съществуват две абсолютни константи c_1 и c_2 такива, че*

$$c_1\|f - U_n f\|_\infty \leq K\left(f, n^{-1}\right)_\infty \leq c_2\|f - U_n f\|_\infty$$

за всяка функция от $f \in L_\infty[0,1]$.

Доказателството на тази теорема е базирано на схемата за доказателство на прави и обратни теореми за оценка на грешката на приближението на функция с линеен положителен оператор в термините на К-функционали, предложени в [4] от Z. Ditzian и K. Ivanov. Използвана е и терминологията от [4]. По тази терминология доказаната тук обратна теорема е от силен тип. В [2] са доказани също права и обратна теорема за $M_n^{\alpha,\beta}$, но обратното неравенство е от слаб тип. Правото неравенство в горната теорема е

Теорема 1.2.3 *За всяка функция $f \in L_\infty[0,1]$ е в сила*

$$\|U_n f - f\|_\infty \leq 2K\left(f, n^{-1}\right)_\infty.$$

Тази теорема е пряко следствие от следната теорема доказана в параграф 1.2 за по-общ клас от оператори

Теорема 1.2.1 *Нека $f_2(x) = x^2$, а L е произволен линеен положителен оператор, запазващ линейните функции и такъв, че $f \leq Lf$ за всяка изпъкнала функция f. Тогава за всяка функция $f \in W^2_\infty(\varphi)$ е в сила*

$$\|Lf - f\|_\infty \leq \|\varphi f''\|_\infty \|\varphi(\cdot)^{-1}\left(L(f_2, \cdot) - (\cdot)^2\right)\|_\infty.$$

С помощта на тази теорема, резултати подобни на тези в Теорема 1.2.3 могат да се получат директно за такива оператори, стига да се знае как те приближават функцията $f_2(x) = x^2$.

Наред с това в хода на доказателството на основния резултат се получават и други важни и хубави свойства. Едно от тях (Лема 1.3.1) е аналог на свойство получено в [2] при тегла $\mu_{\alpha,\beta}(t)$ с $\alpha, \beta > -1$. Там, обаче дори при формален граничен преход в получения резултат, се получава по-слабо твърдение поради наложените от метода на работа (редове на Якоби) редица ограничения върху функциите. Тук твърдението е за възможно най-широкия клас от функции.

Лема 1.3.1 *За всяка функция $f \in L_\infty[0,1]$ е в сила*

$$U_{n-1}(f,x) - U_n(f,x) = \frac{\varphi(x)}{n(n-1)} U_n''(f,x).$$

Използва се следното означение:

$$W_\infty^2(\varphi)\{0;1\} \overset{\text{def}}{=} \left\{ f \in W_\infty^2(\varphi) \ \mid \ \lim_{x\to 0+0} \varphi(x) f''(x) = \lim_{x \to 1-0} \varphi(x) f''(x) = 0 \right\}.$$

Лема 1.3.2 *За всяка функция $f \in W_\infty^2(\varphi)\{0;1\}$ е в сила*

$$\varphi(x) U_n''(f,x) = U_n(\varphi f'', x),$$

т.е. U_n комутира с диференциалния оператор D зададен чрез $Df \overset{\text{def}}{=} \varphi f''$.

С помощта на тези две нови свойства на разглеждания оператор U_n, се намира възможно най-добрата оценката в неравенството на Jackson (Теорема 1.3.1) и се доказва по-късно в параграф 1.4 и обратна теорема от силен тип в термините на разглеждания K-функционал (Теорема 1.4.1).

Теорема 1.3.1 *За всяка функция $f \in W_\infty^2(\varphi)$ е в сила*

$$\|U_n f - f\|_\infty \le \frac{1}{n} \|\varphi f''\|_\infty$$

като константата 1 *е точна.*

Теорема 1.4.1 *За всяка функция $f \in L_\infty[0,1]$ и за всяко $n \in \mathbb{N}$ е в сила*

$$K\left(f, n^{-1}\right)_\infty \le (6 + 2\sqrt{2}) \|f - U_n f\|_\infty.$$

За всяка функция $f \in L_\infty[0,1]$ се дефинира

$$\tau_r(f, \psi(t))_{\infty[0,1]} \overset{\text{def}}{=} \left\| \sup_{0 \le |h| \le \psi(t,x)} \left\{ |\Delta_{h,[0,1]}^r f(\cdot)| \right\} \right\|_{\infty[0,1]},$$

където

$$\Delta_{h,[0,1]}^r f(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \Delta_h^r f(x) & x, x+rh \ \in [0,1]; \\ 0 & x \ or \ x+rh \ \notin [0,1], \end{cases}$$

$\Delta_h^r f(x) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f(x+ih)$, и $\psi(t,x) \overset{\text{def}}{=} t\sqrt{\varphi(x)} + t^2$.

Наличието на еквивалентност между К-функционал и модул на гладкост в много от задачите на ТА, позволява да се използва първия като работен инструмент за получаване на оценки на грешката на някои приближения в термините на подходящи модули. Така е и в случая на разглеждания в глава първа оператор.

В [10] е доказана следната връзка

Теорема 1.1.2 *За всяка функция от $f \in L_\infty[0,1]$ и всяко $t > 0$ е изпълнено*

$$\tau_2(f, \psi(t))_{\infty[0,1]} \sim K\left(f, t^2\right)_\infty .$$

Тогава е в сила и следната

Теорема 1.1.3 *За всяка функция от $f \in L_\infty[0,1]$ е изпълнено*

$$\|f - U_n f\|_\infty \sim \tau_2\left(f, \psi\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right)_{\infty[0,1]} .$$

В глава втора са получени права и обратна теореми за грешката на едностраното приближение отдолу за ограничена отдолу функция. Като работен инструмент отново се използва К-функционал (вече с ограничение). Отново както и в глава първа се използват междинно резултати, получени за изпъкналите функции. Постигнатите резултати представляват многомерно обобщение на резултатите от [7] на Вл. Христов и К. Иванов отнасящи се за едномерния случай. Използвани са някои от идеите, предложени от същите двама автори в [8] и [9].

Разглеждат се измерими реалнозначни и ограничени (съответно отдолу и отгоре) функции, дефинирани във всяка точка на паралелепипеда $\Omega = \Pi[\mathbf{-1}; \mathbf{1}]$, където

$$\Pi[\mathbf{a}; \mathbf{b}] \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid x_i \in [\min\{a_i, b_i\}, \max\{a_i, b_i\}] \;\; \forall \;\; i = 1, \ldots, d\right\}.$$

$\mathbb{R}^d$ се разглежда като нормирано векторно пространство с елементи
$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$, и норма дефинирана по следния начин $\|\mathbf{x}\| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_d|\}$.
С $\mathbf{1}$ и $\mathbf{-1}$ се означават съответно $(1, ..., 1)$ и $(-1, ..., -1)$.

Нека X е измеримо подмножество на Ω. Разглеждат се следните пространства

$$L_p(X) = \left\{f \;\mid\; \|f\|_{p(X)} = \left\{\int_X |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty\right\},$$

за $p \in [1, \infty)$ (с d$\mathbf{x}$ се означава лебеговата мярка в X) и

$$L_\infty(X) = \left\{ f \ \mid \ \|f\|_{\infty(X)} = \sup_{\mathbf{x} \in X} \{|f(\mathbf{x})|\} < \infty \right\},$$

за $p = \infty$.

Нека α, β са мултииндекси. Ако $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_d)$, $\alpha_s \geq 0$ за всяко $s = 1, ..., d$, то се използват следните означения: $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ за дължина на α, $\alpha \geq \beta$ за това, че $\alpha_s \geq \beta_s$ за всяко $s = 1, ..., d$, $\alpha! = \Pi_{s=1}^d \alpha_s!$ и $\binom{\alpha}{\beta} = \Pi_{s=1}^d \binom{\alpha_s}{\beta_s}$.

Нека r е естествено число. С $W_p^r(X)$ се означава следното пространство на Соболев

$$W_p^r(X) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \ \mid \ \sum_{|\alpha|=r} \|D^\alpha f\|_{p(X)} < \infty \right\},$$

където $D^\alpha = \prod_{i=1}^d \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}$.

Нека $\psi(t, v) \stackrel{\text{def}}{=} t\sqrt{1 - v^2} + t^2$, ако $v \in [-1, 1]$ и $t > 0$. За $\mathbf{x} \in \Omega$ се дефинират функциите $\Psi(t, \mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{s=1}^d \psi(t, x_s)$ и $\Psi^\alpha(t, \mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{s=1}^d \psi(t, x_s)^{\alpha_s}$. $\Psi(t, \mathbf{x})$-околност на точката $\mathbf{x} \in \Omega$ се дефинира по следния начин

$$U(t, \mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{y} \in \Omega \ \mid \ |x_s - y_s| \leq \psi(t, x_s) \ \forall \ \ s = 1, ..., d\}.$$

Навсякъде в глава втора c означава положително число, което може и да зависи от r и d. В различните случаи c-тата може да са различни числа. Ако някоя константа c, зависи и от някой друг параметър, това се показва като се използват индекси.

Нека H_n е множеството от всички алгебрични полиноми в $\mathbb{R}^d$ от сумарна степен не по-висока от n. Най-доброто приближение с алгебрични полиноми се означава с

$$E(f, H_n)_{p(X)} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{Q \in H_n} \left\{ \|f - Q\|_{p(X)} \right\},$$

а най-доброто приближение с алгебрични полиноми отдолу и отгоре съответно с

$$E^-(f, H_n)_{p(X)} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{Q \in H_n,\, Q \leq f} \left\{ \|f - Q\|_{p(X)} \right\}$$

и

$$E^+(f, H_n)_{p(X)} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{Q \in H_n,\, Q \geq f} \left\{ \|f - Q\|_{p(X)} \right\},$$

като тук се иска f да е ограничена съответно отдолу и отгоре.

Нека $l = \max\left\{\left[\frac{d}{p}\right]+1\ ,\ r\right\}$ ($[\cdot]$ е цялата част). Изследват се К функционалите

$$\begin{aligned}
K_r^-(f,t)_p &= K^-\left(f,\Psi(t);L_p,W_p^r,W_p^l\right)\\
&\stackrel{\text{def}}{=} \inf_{g\le f,\ g\in W_p^l(\Omega)}\left\{\|f-g\|_{p(\Omega)}+\sum_{|\alpha|=r,l}\|\Psi^\alpha(t)D^\alpha g\|_{p(\Omega)}\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_r^+(f,t)_p &= K^+\left(f,\Psi(t);L_p,W_p^r,W_p^l\right)\\
&\stackrel{\text{def}}{=} \inf_{g\ge f,\ g\in W_p^l(\Omega)}\left\{\|f-g\|_{p(\Omega)}+\sum_{|\alpha|=r,l}\|\Psi^\alpha(t)D^\alpha g\|_{p(\Omega)}\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_r(f,t)_p &= K\left(f,\Psi(t);L_p,W_p^r\right)\\
&\stackrel{\text{def}}{=} \inf_{g\in W_p^r(\Omega)}\left\{\|f-g\|_{p(\Omega)}+\sum_{|\alpha|=r}\|\Psi^\alpha(t)D^\alpha g\|_{p(\Omega)}\right\}
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
K_{r,l}(f,t)_p &= K\left(f,\Psi(t);L_p,W_p^r,W_p^l\right)\\
&\stackrel{\text{def}}{=} \inf_{g\in W_p^l(\Omega)}\left\{\|f-g\|_{p(\Omega)}+\sum_{|\alpha|=r,l}\|\Psi^\alpha(t)D^\alpha g\|_{p(\Omega)}\right\}.
\end{aligned}$$

В параграф 2.4 се доказват следните прави и обратни неравенства за най-добрите алгебрични приближения с ограничения в термините на К функционала.

Теорема 2.1.1 *Нека r и n са естествени числа, $1\le p\le\infty$, $*=-$, $\vee$ $+$ и нека $f\in L_p(\Omega)$ е ограничена съответно отдолу и отгоре. Тогава*

$$\begin{aligned}
&(d) \qquad E^*(f,H_{n-1})_{p(\Omega)} \le cK^*\left(f,\Psi(n^{-1});L_p,W_p^r,W_p^l\right);\\
&(i) \qquad K^*\left(f,\Psi(n^{-1});L_p,W_p^r,W_p^l\right)\\
&\qquad\qquad \le c\left(E^*(f,H_{n-1})_{p(\Omega)}+K\left(f,\Psi(n^{-1});L_p,W_p^r\right)\right).
\end{aligned}$$

Тези неравенства са в основата на следващите изследвания в глава втора.

Основният резултат в глава втора, а именно Теорема 2.1.5 е характеризацията за $r=1$ и $r=2$ на К-функционала $K_r^-(f,t)_p$ с помощта на подходящи модули. Тогава, като следствие, се получава и характеризация на най-добрите алгебрични приближения отдолу в термините на тези модули. Същите резултати за K-функционала $K_r^+(f,t)_p$ и за най-добрите алгебрични приближения отгоре се получават като следствие от $E^+(f) = E^-(-f)$ и $K^+(f) = K^-(-f)$ (при едни и същи стойности на параметрите).

Като междинна стъпка при характеризацията на K-функционала $K_r^-(f,t)_p$ в параграф 2.5 е доказана следната еквивалентност между K-функционала и една характеристика, базирана на най-добрите локални алгебрични приближения отдолу.

Теорема 2.1.2 *Нека $f \in L_p(\Omega)$ ($p \in [1,\infty]$) е ограничена отдолу и нека r е естествено число. Тогава*

$$K_r^-(f,t)_p \sim \|\Psi(t,\cdot)^{-\frac{1}{p}} E^-(f, H_{r-1})_{p(U(t,\cdot))}\|_{p(\Omega)} \quad \forall \quad t \in (0,1].$$

Нека $U \subset \mathbb{R}^d$ е изпъкнало тяло. Дефинира се

$$\omega_r(f,U)_p \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d} \left\{ \|\Delta_{\mathbf{h},U}^r f(\cdot)\|_{p(U)} \right\}, \tag{1}$$

където

$$\Delta_{\mathbf{h},U}^r f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \Delta_{\mathbf{h}}^r f(\mathbf{x}), & \mathbf{x}, \mathbf{x}+r\mathbf{h} \in U; \\ 0, & \mathbf{x} \vee \mathbf{x}+r\mathbf{h} \notin U \end{cases}$$

и

$$\Delta_{\mathbf{h}}^r f(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f(\mathbf{x}+i\mathbf{h}).$$

В хода на изследванията на най-добрите локални алгебрични приближения отдолу за $r=1$ и $r=2$ са използвани следните характеристика

$$\tau_r^-(f,U)_p = \left\| \sup_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d} \left\{ \Lambda_{\mathbf{h},U}^r f(\cdot) \right\} \right\|_{p(U)} \tag{2}$$

и усреднен модул на ограничена отдолу функция

$$\tau_r^-(f,\Psi(t))_{p(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \sup_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d} \{ \Lambda_{\mathbf{h},U(t,\cdot)}^r f(\cdot) \} \right\|_{p(\Omega)}, \tag{3}$$

където

$$\Lambda_{\mathbf{h},U}^1 f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -\Delta_{\mathbf{h}}^1 f(\mathbf{x}), & \mathbf{x},\ \mathbf{x}+\mathbf{h} \in U; \\ 0, & \mathbf{x} \vee \mathbf{x}+\mathbf{h} \notin U \end{cases}$$

и

$$\Lambda^2_{\mathbf{h},U} f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -\Delta^2_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}-\mathbf{h}), & \mathbf{x}-\mathbf{h},\ \mathbf{x}+\mathbf{h} \in U; \\ 0, & \mathbf{x}-\mathbf{h}\ \vee\ \mathbf{x}+\mathbf{h}\ \notin U. \end{cases}$$

Характеристики (1) и (2) се използват в следната теорема от тип на Whitney.

Теорема 2.1.3 *Нека* $f \in L_p(\Pi)$ $(\Pi = \Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}],\ \ p \in [1,\infty])$ *е ограничена отдолу . Тогава*

$$\begin{array}{ll} (I) & E^-(f,H_0)_{p(\Pi)} = \tau_1^-(f,\Pi)_p; \\ (II) & E^-(f,H_1)_{p(\Pi)} \sim \omega_2(f,\Pi)_p + \tau_2^-(f,\Pi)_p. \end{array}$$

Тази теорема е доказана в параграф 2.6, като за доказателството на по-трудния случай при $r = 2$ се доказват и използват редица допълнителни факти, свързани с изпъкналите функции. Използването на последните е удобно поради факта, че за тях най-доброто приближение и най-доброто приближение отдолу са еквивалентни. Този факт се съдържа в твърдението на

Лема 2.6.3 *Нека* f *е изпъкнала функция в* $\Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}]$. *Тогава*

$$E^-(f,H_1)_{p(\Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}])} \le c\, E(f,H_1)_{p(\Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}])}.$$

Фактът, че най-доброто приближение (без ограничение) е по-малко или равно на най-доброто приближение отдолу е ясен от дефинициите.

За да се използва твърдението на Лема 2.6.3 в доказателството на Теорема 2.1.3, по дадена ограничена отдолу функция се построява така наречената "най-голяма изпъкнала миноранта". Нека $U \subset \mathbb{R}^d$ е политоп (т.е. изпъкнала комбинация на краен брой точки) и $f \in L_p(U)$ $(p \in [1,\infty)$) е ограничена отдолу.

Дефинира се

$$C_U f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i f(\mathbf{x}_i) \right\}, \tag{4}$$

където инфимумът е взет по всички $\mathbf{x}_i \in U$, $i = 1, ..., d+1$, за които $\mathbf{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i \mathbf{x}_i$, където $\alpha_i \ge 0$, $i = 1, ..., d+1$ и $\displaystyle\sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i = 1$.

Разликата между ограничена отдолу функция и нейната най-голяма изпъкнала миноранта (4) се оценява в следната

Лема 2.6.5 *Нека* $\Pi = \Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}]$ *и* $f \in L_p(\Pi)$ ($p \in [1,\infty)$) *е ограничена отдолу. Тогава*

$$\|f - C_\Pi f\|_{p(\Pi)} \le \tau_2^-(f,\Pi)_p.$$

Дефиниция Нека $U \subset \mathbb{R}^d$ е изпъкнало тяло. Функцията $f\ :\ U \to \mathbb{R}$ се нарича *средно изпъкнала* в точката $\mathbf{x}$, ако за всяко $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ такова, че $\mathbf{x}-\mathbf{h}$, $\mathbf{x}+\mathbf{h} \in U$ е изпълнено $2f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x}-\mathbf{h}) + f(\mathbf{x}+\mathbf{h})$.

Като следствие от Лема 2.6.5 се получава и един интересен резултат от теорията на изпъкналите функции, който поне автора на настоящата работа не успя да открие като известен в съответната научна литература. Този резултат се съдържа в следната теорема.

Теорема 2.1.7 *Нека функция* $f\ :\ \Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ *е почти навсякъде средно изпъкнала. Тогава* f *съвпада почти навсякъде с изпъкнала функция* g*, като освен това* $f \ge g$.

Нека $U \subset \mathbb{R}^d$ $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ и $t > 0$. Въвеждат се означенията
$U + \mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\ \mid\ \mathbf{x}-\mathbf{y} \in U\}$ и $tU \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\ \mid\ t^{-1}\mathbf{x} \in U\}$.

Използва се следната усреднена характеристика на функция $f \in L_p(\Pi)$.

$$\tau_r(f,\pi)_{p,p(\Pi)} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \int_\Pi \frac{1}{\mu(\pi)} \int_\pi |\Delta^r_{\mathbf{v},\Pi} f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{v} d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{5}$$

Тук с $\mu(V)$ се бележи мярката на Лебег на измеримото множество V. Връзката между $\omega_r(f,\Pi)_p$ (виж (1)) и $\tau_r(f,\pi)_{p,p(\Pi)}$ (виж (5)), която се доказва в параграф 2.3, е

Теорема 2.1.4 *Нека* $\Pi = \Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}]$ *и* $\pi = \Pi[\mathbf{c};\mathbf{d}]$ *са такива, че* $\pi \subseteq \left(\Pi - \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}\right) \subseteq R.\pi$ *за* $R \ge 1$ *и* $f \in L_p(\Omega)$ $(p \in [1,\infty])$. *Тогава*

$$c\tau_r(f,\pi)_{p,p(\Pi)} \le \omega_r(f,\Pi)_p \le cR^{d+r}\tau_r(f,\pi)_{p,p(\Pi)}.$$

Нека

$$B(t,\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d\ \mid\ |y_s| \le \psi(t,x_s)\ \forall\ \ s = 1,...,d\right\}.$$

В глава втора се използва следния усреднен модул на гладкост, дефиниран от К. Иванов в [13] :

$$\tau_r(f,\Psi(t))_{p,p(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \int_\Omega \Psi(t,\mathbf{x})^{-1} \int_{B(t,\mathbf{x})} |\Delta^r_{\mathbf{v},\Omega} f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{v} d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{6}$$

Като се използват резултатите от Теорема 2.1.2, Теорема 2.1.3 и Теорема 2.1.4, в параграф 2.7 се получава характеризацията за $r=1$ и $r=2$ на К-функционала $K_r^-(f,t)_p$ с помощта на модулите (3) и (6).

Теорема 2.1.5

$$\begin{aligned} K^-(f,\Psi(t),L_p,W_p^1,W_p^{l_1}) &\sim \tau_1^-(f,\Psi(t))_{p(\Omega)}; \\ K^-(f,\Psi(t),L_p,W_p^2,W_p^{l_2}) &\sim \tau_2^-(f,\Psi(t))_{p(\Omega)} + \tau_2(f,\Psi(t))_{p,p(\Omega)}, \end{aligned}$$

където съответно $l_1 = \left[\frac{d}{p}\right] + 1$ *и* $l_2 = \max\left\{2, \left[\frac{d}{p}\right] + 1\right\}$.

Като се комбинират резултатите на Теорема 2.1.1 и на Теорема 2.1.5 се получава характеризация на най-добрите алгебрични приближения отдолу в многомерен случай в термините на модулите на гладкост (3) и (6).

Теорема 2.1.6

$$E^-(f,H_{n-1})_{p(\Omega)} \le c\tau_1^-(f,\Psi(n^{-1}))_{p(\Omega)};$$

$$E^-(f,H_{n-1})_{p(\Omega)} \le c\{\tau_2^-(f,\Psi(n^{-1}))_{p(\Omega)} + \tau_2(f,\Psi(n^{-1}))_{p,p(\Omega)}\}$$

и за $r=1$ *и* $r=2$

$$\tau_r^-(f,\Psi(n^{-1}))_{p(\Omega)} \le c\{E^-(f,H_{n-1})_{p(\Omega)} + \tau_r(f,\Psi(n^{-1}))_{p,p(\Omega)}\}.$$

Последната теорема е основния резултат на глава втора. Опитите да бъдат получени резултати подобни на горните за по-големи r се натъкват на непреодолими трудности дори и за едномерния случай.

Глава трета е посветена на монотонно нарастващото приближение.

Нека за $1 \le p < \infty$ $L_p[0,1]$ е пространството от измерими функции, чиято p-та степен е интегруема. С $L_\infty[0,1]$ се означава пространството от измерими и ограничени функции. По дадена функция $f \in L_p[0,1]$ се дефинира нейния r-ти L_p-модул на гладкост

$$\omega_r(f,h)_{p[0,1]} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0\le t\le h} \left\{\|\Delta_{t,[0,1]}^r f(\cdot)\|_{p[0,1]}\right\}, \tag{7}$$

където

$$\Delta_{t,[0,1]}^r f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i}\binom{r}{i} f(x+it), & x, x+rt \in [0,1]; \\ 0, & ako\ x \vee x+rt \notin [0,1]. \end{cases}$$

Със $S(r,n)(r \geq 1)$ се означава пространството от всички сплайни от ред r с $n+1$ равноотдалечени възли $\left\{\frac{i}{n}\right\}_{i=0}^{n}$, т.е. $s \in S(r,n)$, ако s е полином от степен $\leq r-1$ във всеки интервал $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ и $s^{(r-2)}$ е непрекъсната функция в интервала $[0,1]$. При $r=1$ s е стъпаловидна функция, която може и да не е непрекъсната във възлите.

За монотонно ненамаляваща функция $f \in L_p[0,1]$ се използва следното означение за грешката на най-доброто приближение с монотонно ненамаляващи сплайни с равноотдалечени възли в $L_p[0,1]$-норма $(1 \leq p \leq \infty)$.

$$E_n^{\uparrow}(f,r)_{p[0,1]} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{s \in S(r,n)\ ,\ s\ \uparrow} \left\{ \|f-s\|_{p[0,1]} \right\}.$$

Символа $\uparrow$ се използва в смисъл "ненамалява".

В [15] D. Leviatan и H. N. Mhaskar са доказали следните теореми:

Теорема 3.1.1 *Нека f притежава непрекъсната неотрицателна производна f' в [0,1]. Тогава съществува константа $c(r)$ зависеща само от $r \geq 2$ такава, че*

$$E_n^{\uparrow}(f,r)_{\infty[0,1]} \leq c(r) n^{-1} \omega_{r-1}(f', n^{-1})_{\infty[0,1]}.$$

Теорема 3.1.2 *Нека $1 \leq p < \infty$ и f е ненамаляваща функция, която е втора примитивна на функция $f'' \in L_p[0,1]$. Тогава съществува константа $c(r)$ зависеща само от $r \geq 3$ такава, че*

$$E_n^{\uparrow}(f,r)_{p[0,1]} \leq c(r) n^{-2} \omega_{r-2}(f'', n^{-1})_{p[0,1]}.$$

Нека функцията f, дефинирана в интервала $[0,1]$, е ограничена. Като локален модул на гладкост от ред r в точка $x \in [0,1]$ (виж Дефиниция 1.4 от [22]) се дефинира следната функция:

$$\omega_r(f,x;\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t,t+rh \in \left[x-\frac{r\delta}{2}, x+\frac{r\delta}{2}\right]} \left\{ |\Delta_{h,[0,1]}^r f(t)| \right\}$$

Нека $1 \leq p \leq \infty$. Използва се r-ти усреднен модул на гладкост, дефиниран за ограничена и измерима в интервала $[0,1]$ функция f от В. Попов и Бл. Сендов по следния начин (виж Дефиниция 1.5 от [22])

$$\tau_r(f,\delta)_{p[0,1]} \stackrel{\text{def}}{=} \|\omega_r(f,\cdot;\delta)\|_{p[0,1]}. \tag{8}$$

В сила е следното важно свойство на усреднения модул τ_r (виж съответно Теорема 1.5 от [22]):

Нека $1 \leq p \leq \infty$ и функцията f е примитивна на $f' \in L_p[0,1]$. Тогава съществува константа $c(r)$, зависеща само от $r \geq 2$ такава, че

$$\tau_r(f,\delta)_{p[0,1]} \leq c(r)\delta\omega_{r-1}(f',\delta)_{p[0,1]}. \tag{9}$$

Основният резултат в глава трета е следната по-силна оценка на грешката на най-доброто монотонно приближение със сплайни, която обобщава и обединява резултатите на Теорема 3.1.1 и Теорема 3.1.2.

Теорема 3.1.3 *Нека* $1 \leq p \leq \infty$ *и ненамаляващата функция* f *е примитивната на измерима и ограничена в интервала* $[0,1]$ *функция* f'. *Тогава съществува константа* $c(r)$, *зависеща само от* $r \geq 2$ *такава, че*

$$E_n^{\uparrow}(f,r)_{p[0,1]} \leq c(r)n^{-1}\tau_{r-1}(f',n^{-1})_{p[0,1]}.$$

Може да се отбележи, че при $p = \infty$ Теорема 3.1.3 съвпада с Теорема 3.1.1, защото усреднения модул $\tau_r(f,\delta)_{\infty[0,1]}$ (виж (8)) съвпада с $\omega_r(f,\delta)_{\infty[0,1]}$ (виж (7)). Също така Теорема 3.1.2 е следствие от Теорема 3.1.3, поради свойство (9).

Номерацията в дисертацията X.Y.Z е обща, като X е номера на главата, Y - номера на параграфа и Z - вътрешния номер в параграфа. Тя е отделна за теоремите, лемите и цитираните редове.

Резултатите от дисертацията са докладвани на семинара по теория на апроксимациите с ръководител акад. Бл. Сендов. Основната част от тях е публикувана в [17], [18], [19] и [20].

* * *

Приятно ми е да изразя най-сърдечна благодарност на научния си ръководител проф. дмн Камен Иванов за предложените интересни задачи, постоянното внимание към моята работа над тях и оказаната помощ.

Глава 1. Оценка на грешката на един оператор от тип на Бернщайн с помощта на К функционал.

Разглежданият тук оператор U_n се задава с:

$$U_n(f,x) = f(0)P_{n,0}(x) + f(1)P_{n,n}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} P_{n,k}(x) \int_0^1 (n-1)P_{n-2,k-1}(t)f(t)dt.$$

Интересното за този оператор е, че са налице едновременно следните две свойства: оператори с различни индекси n комутират помежду си и оператора запазва линейните функции. Това е рядкост при операторите от тип на Бернщайн.

Този оператор е въведен и разгледан от T.N.T. Goodman и A. Sharma в [5] и [6]. В тези статии са разгледани редица негови свойства. Същият оператор може да се разглежда и като граничен аналог при $\alpha, \beta \to -1$ $\alpha, \beta > -1$ на фамилията от оператори, разгледани от H. Berens и Y. Xu в [2]. Там $f\left(\frac{k}{n}\right)$ от оператора на Бернщайн за $k = 0, ..., n$ е заменено с нормираното скаларно произведение с тегло $\mu_{\alpha,\beta}(t) = t^\alpha(1-t)^\beta$ на функцията f и $P_{n,k}$. В [2], обаче този граничен случай на оператор с тегла на Якоби не е разгледан.

В тази глава основната цел е да се оцени грешката при приближение на функция от $L_\infty[0,1]$ с помощта на U_n и да се изследва характера на поведението на тази грешка.

Основният резултат е доказаната еквивалентност (Теорема 1.1.1) между грешката и К функционала (1.1.2). Наред с това в хода на доказателството на основния резултат се получават и други важни и хубави свойства. Едно от тях (Лема 1.3.1) е аналог на свойство получено в [2] за $\alpha, \beta > -1$. Там, обаче дори при формален граничен преход в получения резултат се получава по-слабо твърдение поради наложените от метода на работа (редове на Якоби) редица ограничения върху функциите. Тук доказателството е за възможно най-широкия клас от функции.

Доказателството на основния резултат в глава 1 е базирано на схемата за доказателство на прави и обратни теореми между грешки при приближение с линейни положителни оператори и К функционали предложени в [4] от Z. Ditzian и K. Ivanov. Използвана е и терминологията от [4]. По тази терминология доказаната тук обратна теорема е от силен тип (тип А). Тук е получена също така и точната (минималната) константа в неравенството от тип на Джексън за U_n.

§1.1 Постановка на задачата.

Ще разглеждаме реалнозначни функции от класа $L_\infty[0,1]$. За тях дефинираме

$$U_n(f,x) \stackrel{\text{def}}{=} f(0)P_{n,0}(x) + f(1)P_{n,n}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} P_{n,k}(x) \int_0^1 (n-1)P_{n-2,k-1}(t)f(t)dt, \quad (1.1.1)$$

където

$$P_{n,k}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Целта ни в тази глава е да разгледаме връзката между скоростта на приближение с U_n за функции от $L_\infty[0,1]$ (т.е. грешката $\|f - U_n f\|_\infty$) и K функционала

$$K(f,t)_\infty = K\left(f, t; L_\infty, W^2_\infty(\varphi)\right) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{g \in W^2_\infty(\varphi)} \left\{ \|f-g\|_\infty + t\|\varphi g''\|_\infty \right\}, \quad (1.1.2)$$

където

$$W^2_\infty(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \in AC[0,1] \ | \ f' \in AC_{loc}[0,1] \ , \ \ \varphi f'' \in L_\infty[0,1] \} \, , \quad a \quad \varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} x(1-x)$$

при подходящо избран, в зависимост от n, аргумент t на K функционала.

Основният резултат в тази глава е следната еквивалентност:

$$\|f - U_n f\|_\infty \sim K\left(f, n^{-1}\right)_\infty \quad (1.1.3)$$

т.е. следната

Теорема 1.1.1 *Съществуват две абсол?тни положителни константи c_1 и c_2 такива, че*

$$c_1 \|f - U_n f\|_\infty \le K\left(f, n^{-1}\right)_\infty \le c_2 \|f - U_n f\|_\infty \quad (1.1.4)$$

за всяка функция от $f \in L_\infty$.

Да отбележим, че тук дясното неравенство в (1.1.4) е обратна теорема от силен тип (тип A) съгласно терминологията от [4].

За всяка функция $f \in L_\infty$ дефинираме

$$\tau_r(f, \psi(t))_{\infty[0,1]} \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \sup_{0 \le |h| \le \psi(t,x)} \left\{ |\Delta^r_{h,[0,1]} f(\cdot)| \right\} \right\|_{\infty[0,1]},$$

където

$$\Delta_{h,[0,1]}^r f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \Delta_h^r f(x) & x, x+rh \in [0,1]; \\ 0 & x \vee x+rh \notin [0,1], \end{cases}$$

$\Delta_h^r f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f(x+ih)$ и $\psi(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} t\sqrt{\varphi(x)} + t^2$.

Понеже в [10] е доказана следната връзка

Теорема 1.1.2 *За всяка функция от $f \in L_\infty$ е изпълнено*

$$\tau_2(f, \psi(t))_{\infty[0,1]} \sim K\left(f, t^2\right)_\infty .$$

Тогава е в сила и следната

Теорема 1.1.3 *За всяка функция от $f \in L_\infty$ е изпълнено*

$$\|f - U_n f\|_\infty \sim \tau_2\left(f, \psi\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right)_{\infty[0,1]} .$$

От [5] и [6] имаме следните свойства на U_n:

(1.1.5) U_n *е линеен и положителен оператор;*

(1.1.6) $U_n(1,x) = 1 \ , \ U_n(t,x) = x;$

(1.1.7) $U_n(t^2,x) = x^2 + \dfrac{2}{n+1}\varphi(x);$

(1.1.8) $\|U_n f\|_\infty \le \|f\|_\infty;$

(1.1.9) $f \le U_n f \le U_k f$ *за изпъкнала функция* f *и естествени* $k \le n$*;*

(1.1.10) $U_k U_n f = U_n U_k f$ *т.е.* U_n *комутира с* U_k*;*

§1.2 Неравенство от тип на Whitney и права теорема.

За да докажем права теорема, т.е. лявото неравенство в (1.1.4), ние ще докажем три помощни леми. В тях резултата ще е в сила за оператор L удовлетворяващ условията:

(1.2.1) $\quad$ *L е линеен и положителен оператор;*

(1.2.2) $\quad$ $L(1,x) = 1 \;\;,\;\; L(t,x) = x;$

(1.2.3) $\quad$ *$f \le Lf$ за изпъкнала функция f;*

Лема 1.2.1 *Нека функцията $K_y(x)$ е дефинирана така:*

$$K_y(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} y(x-1) & 0 \le y \le x \le 1; \\ x(y-1) & 0 \le x \le y \le 1, \end{cases}$$

$f \in W^2_\infty(\varphi)$, а L удовлетворява (1.2.1), (1.2.2) и (1.2.3). Тогава е в сила равенството

$$L(f,x) - f(x) = \int_0^1 \left(L(K_y,x) - K_y(x)\right) f''(y)dy.$$

Доказателство. Тук ще приложим идеята от доказателството на Лема 1 от [11]. Имаме, че

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^1 K_y(x) f''(y)dy &= \int_0^x y(x-1)f''(y)dy + \int_x^1 x(y-1)f''(y)dy \\ &= f(x) - (1-x)f(0) - xf(1); \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^1 L(K_y,x))f''(y)dy &= L(f,x) - L(1-t,x)f(0) - L(t,x)f(1) \\ &= L(f,x) - (1-x)f(0) - xf(1). \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Изваждайки (1.2.4) от (1.2.5) получаваме твърдението на Лема 1.2.1.

□

Лема 1.2.2 *Нека $f_0(x) = x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$ и L е удовлетворяващ (1.2.1), (1.2.2) и (1.2.3) оператор. Тогава за всяка функция $f \in W^2_\infty(\varphi)$ е в сила*

$$\|Lf - f\|_\infty \le \|\varphi f''\|_\infty \|Lf_0 - f_0\|_\infty.$$

Доказателство. Функцията $K_y(x)$ е изпъкнала и отрицателна. Тогава от условия (1.2.1) и (1.2.3) следва, че $L(K_y,x) - K_y(x) \ge 0$. От друга страна Лема 1.2.1 ни дава

$$L(f,x) - f(x) = \int_0^1 \frac{L(K_y,x) - K_y(x)}{\varphi(y)} f''(y)\varphi(y)dy$$

и вземайки равномерна норма от двете страни на горното равенство получаваме

$$\|Lf - f\|_\infty \le \|\varphi f''\|_\infty \max_{x\in[0,1]} \left| L\left(\int_0^1 \frac{K_y(x)}{\varphi(y)}dy, x\right) - \int_0^1 \frac{K_y(x)}{\varphi(y)}dy \right|. \tag{1.2.6}$$

Да видим грешката на коя функция стои в дясната страна на (1.2.6).

$$\int_0^1 \frac{K_y(x)}{\varphi(y)}dy = \int_0^x \frac{y(x-1)}{y(1-y)}dy + \int_x^1 \frac{x(y-1)}{y(1-y)}dy = f_0(x). \tag{1.2.7}$$

Като следствие от (1.2.6) и (1.2.7) получаваме

$$\|Lf - f\|_\infty \le \|\varphi f''\|_\infty \max_{x\in[0,1]} |L(f_0, x) - f_0(x)| = \|\varphi f''\|_\infty \|Lf_0 - f_0\|_\infty,$$

което е и твърдението на Лема 1.2.2.

$\square$

Лема 1.2.3 *Нека $f_0(x) = x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$ и L е удовлетворяващ (1.2.1), (1.2.2) и (1.2.3) оператор. Тогава е в сила*

$$\|Lf_0 - f_0\|_\infty \le \|\varphi^{-1}(\cdot) L\left((t-\cdot)^2, \cdot\right)\|_\infty.$$

Доказателство. Непосредствено от дефиницията на функцията f_0 и свойство (1.2.1) на оператора L имаме

$$\begin{aligned} L(f_0, x) - f_0(x) &= L\left(t\ln t + (1-t)\ln(1-t), x\right) \\ &\quad - L(1-t, x)\ln(1-x) - L(t,x)\ln x \\ &= L\left((1-t)\ln(1-t) - (1-t)\ln(1-x), x\right) + L\left(t\ln t - t\ln x, x\right). \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Развивайки $\ln((x+t)-x)$ по формулата на Тейлър в точката x получаваме $\ln t = \ln x + \dfrac{t-x}{x} - \displaystyle\int_x^t \frac{t-u}{u^2}du$. Сега като използваме последното равенство и очевидното неравенство $\displaystyle\int_x^t \frac{t-u}{u^2}du \ge 0$ имаме, че

$$(1-t)\ln(1-t) - (1-t)\ln(1-x) \le \frac{(1-t)(x-t)}{1-x}; \tag{1.2.9}$$

$$t\ln t - t\ln x \le \frac{t(x-t)}{x}. \tag{1.2.10}$$

Сега като заместим резултатите от (1.2.9) и (1.2.10) в (1.2.8) и използваме свойства (1.2.1), (1.2.2) и (1.2.3) получаваме, че

$$\begin{aligned} 0 \leq L(f_0, x) - f_0(x) &\leq L\left(\frac{(1-t)(x-t)}{1-x} + \frac{t(x-t)}{x}, x\right) \\ &\leq L\left(\frac{t^2 - 2tx + x^2}{\varphi(x)}, x\right) \\ &\leq \frac{1}{\varphi(x)} L((t-x)^2, x). \end{aligned}$$

Като вземем равномерна норма в последното неравенство получаваме

$$\|Lf_0 - f_0\|_\infty \leq \|\varphi^{-1}(\cdot) L\left((t-\cdot)^2, \cdot\right)\|_\infty.$$

Лема 1.2.3 е доказана.

□

От горните леми непосредствено се получава

Теорема 1.2.1 *Нека L е удовлетворяващ (1.2.1) оператор. Тогава за всяка функция $f \in W^2_\infty(\varphi)$ е в сила*

$$\|Lf - f\|_\infty \leq \|\varphi f''\|_\infty \|\varphi^{-1}(\cdot) L\left((t-\cdot)^2, \cdot\right)\|_\infty.$$

Да отбележим, че съгласно свойства (1.1.5), (1.1.6) и (1.1.9) за оператора U_n са изпълнени свойства (1.2.1), (1.2.2) и (1.2.3) т.е. е в сила и Теорема 1.2.1. Понеже от (1.1.6) и (1.1.7) за U_n имаме

$$\frac{1}{\varphi(x)} U_n((t-x)^2, x) = \frac{U_n(t^2, x) - x^2}{\varphi(x)} = \frac{2}{n+1},$$

то е изпълнена следната

Теорема 1.2.2 *За всяка функция $f \in W^2_\infty(\varphi)$ е в сила*

$$\|U_n f - f\|_\infty \leq \frac{2}{n+1} \|\varphi f''\|_\infty$$

Това е неравенството от тип на Whitney за оператора U_n.

Теорема 1.2.2 ще използваме в

Теорема 1.2.3 *За всяка функция* $f \in L_\infty$ *е в сила*

$$\|U_n f - f\|_\infty \leq 2K\left(f, n^{-1}\right)_\infty.$$

Доказателство. Нека g е произволна функция такава, че $g \in W^2_\infty(\varphi)$. Тогава прибавяме и изваждаме g и $U_n g$ в $\|U_n f - f\|_\infty$, прилагаме неравенството на триъгълника за норми и получаваме

$$\|U_n f - f\|_\infty \leq \|U_n f - U_n g\|_\infty + \|U_n g - g\|_\infty + \|g - f\|_\infty.$$

Като приложим свойство (1.1.8) (т.е. ограничеността на оператора) и Теорема 1.2.2 получаваме

$$\|U_n f - f\|_\infty \leq 2\|f - g\|_\infty + \frac{2}{n+1}\|\varphi g''\|_\infty \leq 2\left(\|f - g\|_\infty + \frac{1}{n}\|\varphi g''\|_\infty\right).$$

Тук вземаме инфимум по всички $g \in W^2_\infty(\varphi)$ и доказваме Теорема 1.2.3.

$\square$

§1.3 Две важни свойства на оператора U_n.

Тук ще докажем две нови свойства на разглеждания от нас оператор, с чиято помощ ще подобрим до възможно най-добра оценката в неравенството на Jackson и ще докажем по-късно и обратна теорема в термините на разглеждания K функционал.

Лема 1.3.1 *За всяка функция* $f \in L_\infty[0,1]$ *е в сила:*

$$U_{n-1}(f, x) - U_n(f, x) = \frac{\varphi(x)}{n(n-1)} U''_n(f, x).$$

Доказателство. За оператора U_n е в сила представянето
$U_n(f,x) = A_n(f,x) + D_n(f,x)$, където

$$\begin{aligned}
A_n(f,x) &= f(0)P_{n,0}(x) + f(1)P_{n,n}(x),\\
D_n(f,x) &= \sum_{k=1}^{n-1} P_{n,k}(x)\int_0^1 (n-1)P_{n-2,k-1}(t)f(t)dt.
\end{aligned}$$

Нека представим $D_{n-1}(f,x)$ като линейна комбинация на $P_{n,k}(x)$.

$$\begin{aligned}
&D_{n-1}(f,x) = \sum_{k=1}^{n-2} P_{n-1,k}(x)\int_0^1 (n-2)P_{n-3,k-1}(t)f(t)dt\\
&= \sum_{k=1}^{n-2} P_{n-1,k}(x)\int_0^1 (n-2)\binom{n-3}{k-1}t^k(1-t)^{n-k-2}f(t)dt\\
&+ \sum_{k=1}^{n-2} P_{n-1,k}(x)\int_0^1 (n-2)\binom{n-3}{k-1}t^{k-1}(1-t)^{n-k-1}f(t)dt\\
&= \sum_{k=2}^{n-1} P_{n-1,k-1}(x)\int_0^1 (n-2)\binom{n-3}{k-1}t^{k-1}(1-t)^{n-k-1}f(t)dt\\
&+ \sum_{k=1}^{n-2} P_{n-1,k}(x)\int_0^1 (n-2)\binom{n-3}{k-1}t^{k-1}(1-t)^{n-k-1}f(t)dt\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} P_{n,k}(x)\int_0^1 (n-1)P_{n-2,k-1}(t)f(t)dt\left(\frac{1}{x}\frac{k(k-1)}{n(n-1)} + \frac{1}{1-x}\frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}\right).
\end{aligned}$$

Тогава за разликата $D_{n-1}(f,x) - D_n(f,x)$ получаваме

$$\begin{aligned}
D_{n-1}(f,x) - D_n(f,x) &= \sum_{k=1}^{n-1} P_{n,k}(x)\int_0^1 (n-1)P_{n-2,k-1}(t)f(t)dt\\
&\times\left(\frac{(1-x)k(k-1) + x(n-k)(n-k-1) - n(n-1)\varphi(x)}{n(n-1)\varphi(x)}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} P_{n,k}(x)\int_0^1 (n-1)P_{n-2,k-1}(t)f(t)dt\\
&\times\left(\left(\frac{k-nx}{\varphi(x)}\right)^2 - \frac{n\varphi(x) + (k-nx)(1-2x)}{\varphi^2(x)}\right)\frac{\varphi(x)}{n(n-1)}.
\end{aligned}$$

От друга страна понеже $P'_{n,k}(x) = \dfrac{k-nx}{\varphi(x)}P_{n,k}(x)$, то имаме, че

$$P''_{n,k}(x) = P_{n,k}(x)\left(\left(\frac{k-nx}{\varphi(x)}\right)^2 - \frac{n\varphi(x) + (k-nx)(1-2x)}{\varphi^2(x)}\right). \tag{1.3.1}$$

Следователно, ako функция $f \in L_\infty[0,1]$, то за разликата $D_{n-1}(f,x) - D_n(f,x)$ получаваме

$$D_{n-1}(f,x) - D_n(f,x) = \frac{\varphi(x)}{n(n-1)} D''_n(f,x). \tag{1.3.2}$$

За другата част от разликата $U_{n-1}(f,x) - U_n(f,x)$ тривиално имаме

$$A_{n-1}(f,x) - A_n(f,x) = f(0)(x^{n-1}(1-x) + f(1)x(1-x)^{n-1} = \frac{\varphi(x)}{n(n-1)} A''_n(f,x). \tag{1.3.3}$$

Накрая като сумираме резултатите в (1.3.2) и (1.3.3) получаваме твърдението на Лема 1.3.1.

□

Забележка 1.3.1 Лема 1.3.1 е формален граничен аналог на Теорема 5 от [2]. По-точно казано U_n е формален граничен аналог на операторите от [2]). Методът за доказателство, който е използван там (развитие на функция в ред на Якоби) в нашия случай е неприложим. Фактът, че този и някой други интересни резултати за U_n са същите като при операторите от [2], ни позволява да смятаме разглеждания от нас оператор като "граничен случай на оператор от тип на Бернщайн с тегла на Якоби".

Ще използваме следното означение:

$$W^2_\infty(\varphi)\{0;1\} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in W^2_\infty(\varphi) \ \mid \ \lim_{x\to 0+0} \varphi(x) f''(x) = \lim_{x \to 1-0} \varphi(x) f''(x) = 0 \right\}.$$

Лема 1.3.2 *За всяка функция $f \in W^2_\infty(\varphi)\{0;1\}$ е в сила*

$$\varphi(x) U''_n(f,x) = U_n(\varphi f'', x),$$

т.е. U_n комутира с диференциалния оператор D зададен с $Df \stackrel{\text{def}}{=} \varphi f''$.

Доказателство. Имаме, че $U_n(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}(f) P_{n,k}(x)$, където

$$u_{n,k}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(0), & k = 0; \\ \int_0^1 (n-1) P_{n-2,k-1}(t) f(t)dt, & 1 \le k \le n-1; \\ f(1), & k = n; \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Тогава за първата производна на $U_n(f,x)$ се получава равенството

$$\begin{aligned}
U_n'(f,x) &= \sum_{k=0}^{n} u_{n,k}(f)\binom{n}{k}\left(kx^{k-1}(1-x)^{n-k}-(n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} u_{n,k}(f)\binom{n}{k}kx^{k-1}(1-x)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n-1} u_{n,k}(f)\binom{n}{k}(n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}\\
&= n\sum_{k=1}^{n} u_{n,k}(f)\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}-n\sum_{k=0}^{n-1} u_{n,k}(f)\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1}\\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} u_{n,k+1}(f)\binom{n-1}{k}x^{k}(1-x)^{n-k-1}-n\sum_{k=0}^{n-1} u_{n,k}(f)\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1}\\
&= n\sum_{k=0}^{n-1}(u_{n,k+1}(f)-u_{n,k}(f))P_{n-1,k}(x)\\
&= n\sum_{k=0}^{n-1}\Delta^1 u_{n,k}(f)P_{n-1,k}(x),
\end{aligned}$$

където $\Delta^1 u_{n,k}(f) \stackrel{\text{def}}{=} u_{n,k+1}(f)-u_{n,k}(f)$. Абсолютно по същия начин за втората производна на $U_n(f,x)$ получаваме

$$\begin{aligned}
U_n''(f,x) &= n\sum_{k=0}^{n-1}\Delta^1 u_{n,k}(f)\binom{n-1}{k}\\
&\times\left(kx^{k-1}(1-x)^{n-1-k}-(n-1-k)x^k(1-x)^{n-2-k}\right)\\
&= n\sum_{k=1}^{n-1}\Delta^1 u_{n,k}(f)\binom{n-1}{k}kx^{k-1}(1-x)^{n-1-k}\\
&-n\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^1 u_{n,k}(f)\binom{n-1}{k}(n-1-k)x^k(1-x)^{n-2-k}\\
&= n(n-1)\sum_{k=1}^{n-1}\Delta^1 u_{n,k}(f)\binom{n-2}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-1-k}\\
&-n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^1 u_{n,k}(f)\binom{n-2}{k}x^k(1-x)^{n-2-k}\\
&= n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^1 u_{n,k+1}(f)\binom{n-2}{k}x^k(1-x)^{n-2-k}\\
&-n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^1 u_{n,k}(f)\binom{n-2}{k}x^k(1-x)^{n-2-k}\\
&= n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}(u_{n,k+2}(f)-2u_{n,k+1}(f)+u_{n,k}(f))P_{n-2,k}(x)\\
&= n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\Delta^2 u_{n,k}(f)P_{n-2,k}(x),
\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

където $\Delta^2 u_{n,k}(f) \stackrel{\text{def}}{=} u_{n,k+2}(f) - 2u_{n,k+1}(f) + u_{n,k}(f)$.

Сега ще докажем, че за $0 \le k \le n-2$ е в сила равенството

$$\Delta^2 u_{n,k}(f) = \frac{1}{n}\int_0^1 f^{''}(t) P_{n,k+1}(t) dt. \tag{1.3.5}$$

В случаите, когато $1 \le k \le n-3$, като използваме интегриране по части, ще получим

$$\begin{aligned}
\Delta^2 u_{n,k}(f) &= \int_0^1 (n-1)\left(P_{n-2,k+1}(t) - 2P_{n-2,k}(t) + P_{n-2,k-1}(t)\right) f(t) dt \\
&= \frac{1}{n}\int_0^1 P^{''}_{n,k+1}(t) f(t) dt \\
&= -\frac{1}{n}\int_0^1 P^{'}_{n,k+1}(t) f^{'}(t) dt \\
&= \frac{1}{n}\int_0^1 P_{n,k+1}(t) f^{''}(t) dt.
\end{aligned}$$

В случаите, когато $k = 0$ и $k = n-2$, аналогично ще получим

$$\begin{aligned}
\Delta^2 u_{n,0}(f) &= \int_0^1 (n-1)\left(P_{n-2,1}(t) - 2P_{n-2,0}(t)\right) f(t) dt + f(0) \\
&= \frac{1}{n}\int_0^1 P^{''}_{n,1}(t) f(t) dt + f(0) \\
&= -\frac{P^{'}_{n,1}(0) f(0)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 P^{'}_{n,1}(t) f^{'}(t) dt + f(0) \\
&= \frac{1}{n}\int_0^1 P_{n,1}(t) f^{''}(t) dt.
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\Delta^2 u_{n,n-2}(f) &= f(1) + \int_0^1 (n-1)\left(-2P_{n-2,n-2}(t) + P_{n-2,n-3}(t)\right) f(t) dt \\
&= f(1) + \frac{1}{n}\int_0^1 P^{''}_{n,n-1}(t) f(t) dt \\
&= f(1) + \frac{P^{'}_{n,n-1}(1) f(1)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 P^{'}_{n,n-1}(t) f^{'}(t) dt \\
&= \frac{1}{n}\int_0^1 P_{n,n-1}(t) f^{''}(t) dt.
\end{aligned}$$

Така доказахме (1.3.5) за всяко $0 \le k \le n-2$. Сега от равенства (1.3.4) и (1.3.5) се получава

$$U_n''(f,x) = \sum_{k=0}^{n-2} P_{n-2,k}(x) \int_0^1 (n-1) f''(t) P_{n,k+1}(t)dt.$$

Следователно

$$\begin{aligned}
\varphi(x)U_n''(f,x) &= \sum_{k=0}^{n-2} P_{n,k+1}(x) \int_0^1 (n-1) f''(t) P_{n-2,k}(t)\varphi(t)dt \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} P_{n,k}(x) \int_0^1 (n-1) f''(t) P_{n-2,k-1}(t)\varphi(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) \int_0^1 (n-1) f''(t) P_{n-2,k-1}(t)\varphi(t)dt \\
&= U_n(\varphi f'', x),
\end{aligned}$$

защото от $f \in W^2_\infty(\varphi)\{0;1\}$ следва, че можем да добавим и членовете за $k=0$ и $k=n$.

□

От Теорема 1.2.2 следва, че за всяка функция $f \in W^2_\infty(\varphi)$ е вярно $\lim\limits_{n\to\infty} U_n f = f$ (в смисъл на $L_\infty-$норма). Тогава като сумираме равенствата, получени от Лема 1.3.1, по индекса на оператора от $n+1$ до ∞ ще получим

$$U_n(f,x) - f(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} U_{k-1}(f,x) - U_k(f,x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varphi(x)U_k''(f,x)}{k(k-1)}. \tag{1.3.6}$$

Сега може да използваме (1.3.6) за подобряване на резултата от Теорема 1.2.2 за оператора U_n и функция $f \in W^2_\infty(\varphi)\{0;1\}$. От (1.3.6), Лема 1.3.2 и ограничеността на оператора (1.1.8) имаме, че

$$\begin{aligned}
\|U_n f - f\|_\infty &= \| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{U_k(\varphi f'', \cdot)}{k(k-1)} \|_\infty \\
&\le \|\varphi f''\|_\infty \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} \\
&= \frac{1}{n} \|\varphi f''\|_\infty.
\end{aligned}$$

За функцията $f_0(x)$ от (1.3.6) ще получим

$$\begin{aligned}
U_n(f_0,x)-f_0(x) &= \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\varphi(x)U_k''(f_0,x)}{k(k-1)}\\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{U_k(\varphi f_0'',x)-x^k-(1-x)^k}{k(k-1)}\\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{U_k(1,x)-x^k-(1-x)^k}{k(k-1)}\\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1-x^k-(1-x)^k}{k(k-1)}
\end{aligned}$$

Следователно

$$\|U_nf_0-f_0\|_\infty=\frac{1}{n}-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}k(k-1)}.$$

По такъв начин получаваме оценката

$$\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\le\|U_nf_0-f_0\|_\infty\le\frac{1}{n} \tag{1.3.7}$$

Сега вече (1.3.7) и Лема 1.2.2 дават резултата

$$\|U_nf-f\|_\infty\le\frac{1}{n}\|\varphi f''\|_\infty. \tag{1.3.8}$$

Това неравенство от тип на Whitney за оператора U_n е по-добро от полученото в Теорема 1.2.2. Нещо повече, константата 1 в неравенство (1.3.8) е точна. За да докажем този факт ще допуснем противното. Да допуснем, че съществува константа $c\in(0,1)$ такава, че

$$\|U_nf-f\|_\infty\le\frac{1-c}{n}\|\varphi f''\|_\infty \tag{1.3.9}$$

за всяка функция $f\in W^2_\infty(\varphi)$ и всяко $n\in\mathbb{N}$. Тогава в частност за $f=f_0$ е сила:

$$\|U_nf_0-f_0\|_\infty\le\frac{1-c}{n}. \tag{1.3.10}$$

От (1.3.7) и (1.3.10) следва, че $\dfrac{1}{2^n}\ge c$ за всяко $n\in\mathbb{N}$. Това очевидно не е вярно и следователно допускането (1.3.9) ни води до противоречие. Следователно в сила е следната теорема от тип на Jackson.

Теорема 1.3.1 *За всяка функция $f \in W^2_\infty(\varphi)$ е в сила*

$$\|U_n f - f\|_\infty \le \frac{1}{n}\|\varphi f''\|_\infty$$

като константата 1 *е точна.*

§1.4 Обратна теорема.

За да докажем обратната теорема, т.е. дясното неравенство в (1.1.4), ние се нуждаем от следните две помощни леми.

Лема 1.4.1 *Нека* $S \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in W^2_\infty(\varphi) \;\mid\; \varphi f'' \in W^2_\infty(\varphi) \right\}$. *Тогава за всяка функция* $f \in S$ *е изпълнено*

$$\|U_n f - f - \frac{1}{n}\varphi f''\|_\infty \le \frac{1}{2n^2}\|\varphi(\varphi f'')''\|_\infty.$$

Доказателство. От Лема 1.3.2, (1.3.6) и Теорема 1.3.1 имаме, че е изпълнено

$$\|U_n f - f - \frac{1}{n}\varphi f''\|_\infty = \|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{U_k(\varphi f'') - \varphi f''}{k(k-1)}\|_\infty \le \|\varphi(\varphi f'')''\|_\infty \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k-1)}.$$

Остава да оценим отгоре сумата, която стои в дясната страна. Имаме, че

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k-1)} \quad & < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(n+2)k}{(n+1)(k+1)k^2(k-1)} \\
&= \frac{n+2}{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k^2-1)} \\
&= \frac{n+2}{2(n+1)}\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k-1} \right) \\
&= \frac{n+2}{2(n+1)}\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{2n^2}.
\end{aligned}$$

Така Лема 1.4.1 е доказана.

□

Лема 1.4.2 *За всяка функция* $f \in L_{\infty[0,1]}$ *и за всяко* $n \in \mathbb{N}$ *е в сила*

$$\|\varphi U_n'' f\|_\infty \le \sqrt{2} n \|f\|_\infty.$$

Доказателство. Като използваме (1.3.1), ние получаваме

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) U_n''(f,x)| &= n \left| \sum_{k=0}^{n} u_{n,k}(f) P_{n,k}(x) \left(\frac{n(\frac{k}{n}-x)^2}{\varphi(x)} - 1 - \frac{(\frac{k}{n}-x)(1-2x)}{\varphi(x)} \right) \right| \\
&\le n\|f\|_\infty \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) \left| \frac{n(\frac{k}{n}-x)^2}{\varphi(x)} - 1 - \frac{(\frac{k}{n}-x)(1-2x)}{\varphi(x)} \right|.
\end{aligned}$$

Сега нека в горното неравенство приложим неравенството на Caushi-Schwarz за линейния положителен оператор B_n (т.е. оператора на Бернщайн). Ще получим:

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) U_n''(f,x)| &\le n\|f\|_\infty \sqrt{B_n\left(\left(\frac{n(t-x)^2}{\varphi(x)} - 1 - \frac{(t-x)(1-2x)}{\varphi(x)} \right)^2, x \right) B_n(1,x)} \\
&= n\|f\|_\infty \left(\frac{n^2}{\varphi^2(x)} B_n((t-x)^4,x) + 1 + \frac{(1-2x)^2}{\varphi^2(x)} B_n((t-x)^2,x) \right. \\
&\left. -\frac{2n}{\varphi(x)} B_n((t-x),x) + \frac{2(1-2x)}{\varphi^2(x)} B_n((t-x)^3,x) \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.4.1)
\end{aligned}$$

Тук ще приложим следните свойства на оператора на Бернщайн взети от [16] :

$$\begin{aligned}
&B_n(1,x) = 1; \\
&B_n(t,x) = x; \\
&B_n(t^2,x) = x^2 + \frac{\varphi(x)}{n}; \\
&B_n(t^3,x) = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} x^3 + \frac{3(n-1)}{n^2} + \frac{x}{n^2}; \\
&B_n(t^4,x) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} x^4 + \frac{6(n-1)(n-2)}{n^3} + \frac{7(n-1)}{n^3} + \frac{x}{n^3}.
\end{aligned}$$

Тогава са в сила следните равенства:

$$B_n(t-x,x) = 0; \qquad (1.4.2)$$

$$B_n((t-x)^2,x) = \frac{\varphi(x)}{n}; \qquad (1.4.3)$$

$$B_n((t-x)^3,x) = -2\frac{x\varphi(x)}{n^2} + \frac{\varphi(x)}{n}; \qquad (1.4.4)$$

$$B_n((t-x)^4,x) = 3\frac{(n-2)\varphi^2(x)}{n^2} + \frac{\varphi(x)}{n^3}. \qquad (1.4.5)$$

Като заместим резултатите от (1.4.2), (1.4.3), (1.4.4) и (1.4.5) в (1.4.1) ще получим

$$|\varphi(x)U_n^{''}(f,x)| \leq n\|f\|_\infty\sqrt{2-\frac{2}{n}}.$$

Сега вече като вземем в последното неравенство максимум по всички $x \in [0,1]$ доказваме Лема 1.4.2.

□

С помощта на горните леми ще докажем обратна теорема от силен тип за разлеждания от нас оператор.

Теорема 1.4.1 *За всяка функция $f \in L_{\infty[0,1]}$ и за всяко $n \in \mathbb{N}$ е в сила*

$$K\left(f,n^{-1}\right)_\infty \leq (6+2\sqrt{2})\|f-U_nf\|_\infty.$$

Доказателство. Като приложим Лема 1.4.1 за функцията U_n^2f (тук под U_n^kf разбираме k пъти приложен оператора U_n ние получаваме

$$\|U_n^3f-U_n^2f-\frac{1}{n}\varphi(U_n^2f)^{''}\|_\infty \leq \frac{1}{2n^2}\|\varphi(\varphi(U_n^2f)^{''})^{''}\|_\infty =\leq \frac{1}{2n^2}\|\varphi U_n^{''}(\varphi(U_n^{''}f))\|_\infty.$$

В последното неравенство ще приложим последователно Лема 1.4.2, неравенството на триъгълника за норма и пак Лема 1.4.2. Имаме, че

$$\begin{aligned}\|U_n^3f-U_n^2f-\frac{1}{n}\varphi(U_n^2f)^{''}\|_\infty \quad & \leq \frac{\sqrt{2}}{2n}\|\varphi U_n^{''}f\|_\infty \\ & \leq \frac{\sqrt{2}}{2n}\|\varphi(U_n^2f)^{''})\|_\infty + \frac{\sqrt{2}}{2n}\|\varphi U_n^{''}(f-U_nf)\|_\infty \\ & \leq \frac{\sqrt{2}}{2n}\|\varphi(U_n^2f)^{''})\|_\infty + \|U_nf-f\|_\infty.\end{aligned}$$

Като използваме това неравенство и (1.1.8) (т.е.ограничеността на оператора U_n) получаваме

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\|\varphi(U_n^2f^{''}))\|_\infty \quad & \leq \|U_n^3f-U_n^2f-\frac{1}{n}\varphi(U_n^2f)^{''}\|_\infty + \|U_n^3f-U_n^2f\|_\infty \\ & \leq 2\|U_nf-f\|_\infty + \frac{\sqrt{2}}{2n}\|\varphi(U_n^2f)^{''})\|_\infty\end{aligned}$$

От тук получаваме $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2n}\|\varphi(U_n^2f)^{''})\|_\infty \leq 2\|U_nf-f\|_\infty$, и тогава

$$\frac{1}{n}\|\varphi(U_n^2 f)'')\|_\infty \leq (4+2\sqrt{2})\|U_n f - f\|_\infty. \tag{1.4.6}$$

Сега вече имаме всичко необходимо за оценка на К функционала отгоре. Като използваме дефиницията на К функционала, неравенството на триъгълника за норма свойство (1.1.8) и неравенство (1.4.6) имаме, че

$$\begin{aligned}
\left(f, \frac{1}{n}\right)_\infty \quad &= \inf_{g\in W_\infty^2(\varphi)} \left\{ \|f-g\|_\infty + \frac{1}{n}\|\varphi g''\|_\infty \right\} \\
&\leq \|f - U_n^2 f\|_\infty + \frac{1}{n}\|\varphi(U_n^2 f)''\|_\infty \\
&\leq \|f - U_n f\|_\infty + \|U_n f - U_n^2 f\|_\infty + (4+2\sqrt{2})\|U_n f - f\|_\infty \\
&\leq (6+2\sqrt{2})\|U_n f - f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Теорема 1.4.1 е доказана.

$\square$

Теорема 1.2.2 и Теорема 1.4.1 доказват основния резултат в тази глава Теорема 1.1.1.

$\square$

Забележка 1.4.1 Ако сега разгледаме връзката между $\|f - U_n f\|_\infty$ и $K\left(f, \frac{1}{2n}\right)_\infty$, можем да получим по същия начин оценката

$$\frac{1}{2}\|f - U_n f\|_\infty \leq K\left(f, \frac{1}{2n}\right)_\infty \leq (4+\sqrt{2})\|f - U_n f\|_\infty$$

имаща по малко частно $\frac{c_2}{c_1}$ за константите c_2 и c_1 от Теорема 1.1.1.

Глава 2. Характеризация на най-добрите алгебрични приближения отдолу и отгоре в многомерен случай.

В тази глава е получена характеризация на най-добрите алгебрични приближения отдолу и отгоре в многомерен случай. Първо са доказани права и обратна теорема за най-добрите алгебрични приближения отдолу и отгоре в многомерен случай с помощта на подходящ K функционал с ограничение. След това е направена характеризация на този K функционал в термините на подходящи модули на гладкост. Резултатът е многомерно обобщение на [7]. Използваните модули са многомерен аналог на дефинираните за едномерния случай в [7] модули.

§2.1 Постановка на задачата.

Ще разглеждаме измерими реалнозначни и ограничени (съответно отдолу и отгоре) функции, дефинирани във всяка точка на паралелепипеда $\Omega = \Pi[-\mathbf{1}; \mathbf{1}]$, където

$$\Pi[\mathbf{a}; \mathbf{b}] \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \;\mid\; x_i \in [\min\{a_i, b_i\}, \max\{a_i, b_i\}] \qquad \forall\; i = 1, \ldots, d \right\}.$$

$\mathbb{R}^d$ се разглежда като нормирано векторно пространство с елементи
$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{h}$ и норма дефинирана по следния начин
$\|\mathbf{x}\| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_d|\}$.
$\mathbf{1}$ и $-\mathbf{1}$ означават съответно $(1, ..., 1)$ и $(-1, ..., -1)$.

Нека X е измеримо подмножество на Ω. Ще разглеждаме следните пространства

$$L_p(X) = \left\{ f \;\mid\; \|f\|_{p(X)} = \left\{ \int_X |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

за $p \in [1, \infty)$ (с d$\mathbf{x}$ означаваме лебеговата мярка в X) и

$$L_\infty(X) = \left\{ f \;\mid\; \|f\|_{\infty(X)} = \sup_{\mathbf{x} \in X} |f(\mathbf{x})| \} < \infty \right\},$$

за $p = \infty$.

Нека α, β са мултииндекси. Ако $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_d)$, $\alpha_s \geq 0$ за всяко $s = 1, ..., d$, то ще използваме следните означения: $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ за дължина на α, $\alpha \geq \beta$ за това, че $\alpha_s \geq \beta_s$ за всяко $s = 1, ..., d$, $\alpha! = \Pi_{s=1}^d \alpha_s!$ и $\binom{\alpha}{\beta} = \Pi_{s=1}^d \binom{\alpha_s}{\beta_s}$.

Нека r е естествено число. С $W_p^r(X)$ ще означаваме следното пространство на Соболев

$$W_p^r(X) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \;\mid\; \sum_{|\alpha|=r} \|D^\alpha f\|_{p(X)} < \infty \right\},$$

където $D^\alpha = \prod_{i=1}^d \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}$.

Нека $\psi(t, v) \stackrel{\text{def}}{=} t\sqrt{1 - v^2} + t^2$ ако $v \in [-1, 1]$ и $t > 0$. За $\mathbf{x} \in \Omega$ дефинираме функциите $\Psi(t, \mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{s=1}^d \psi(t, x_s)$ и $\Psi^\alpha(t, \mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{s=1}^d \psi(t, x_s)^{\alpha_s}$. $\Psi(t, \mathbf{x})$-околност на точката $\mathbf{x} \in \Omega$ дефинираме така

$$U(t, \mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{y} \in \Omega \;\mid\; |x_s - y_s| \leq \psi(t, x_s) \;\forall\; s = 1, ..., d\}.$$

Навсякъде в тази глава c означава положително число, което може и да зависи от r и d.В различните случаи c-тата може да са различни числа. Ако някоя константа c, зависи и от някой друг параметър, ще показваме това изполвайки индекси.

Нека H_n е множеството от всички алгебрични полиноми в $\mathbb{R}^d$ от сумарна степен, не по-висока от n. Най-доброто приближение с алгебрични полиноми ще означаваме с

$$E(f, H_n)_{p(X)} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{Q \in H_n} \left\{ \|f - Q\|_{p(X)} \right\},$$

а най-доброто приближение с алгебрични полиноми отдолу и отгоре съответно с

$$E^-(f, H_n)_{p(X)} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{Q \in H_n \;\; , Q \leq f} \left\{ \|f - Q\|_{p(X)} \right\} \tag{2.1.1}$$

и

$$E^+(f, H_n)_{p(X)} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{Q \in H_n \;\; , Q \geq f} \left\{ \|f - Q\|_{p(X)} \right\}, \tag{2.1.2}$$

като тук разбира се искаме f да е ограничена съответно отдолу и отгоре.

Нека $l = \max\left\{ \left[\frac{d}{p}\right] + 1 \;,\; r \right\}$ ($[\cdot]$ е цялата част). Ще изследваме К функционалите

$$\begin{aligned} K_r^-(f, t)_p &= K^-\left(f, \Psi(t); L_p, W_p^r, W_p^l\right) \qquad (2.1.3)\\ &\stackrel{\text{def}}{=} \inf_{g \leq f \;\; , \; g \in W_p^l(\Omega)} \left\{ \|f - g\|_{p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=r,l} \|\Psi^\alpha(t) D^\alpha g\|_{p(\Omega)} \right\}, \end{aligned}$$

$$K_r^+(f,t)_p = K^+\left(f,\Psi(t);L_p,W_p^r,W_p^l\right) \tag{2.1.4}$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} \inf_{g\geq f\ ,\ g\in W_p^l(\Omega)} \left\{ \|f-g\|_{p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=r,l} \|\Psi^\alpha(t)D^\alpha g\|_{p(\Omega)} \right\},$$

$$K_r(f,t)_p = K\left(f,\Psi(t);L_p,W_p^r\right) \tag{2.1.5}$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} \inf_{g\in W_p^r(\Omega)} \left\{ \|f-g\|_{p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=r} \|\Psi^\alpha(t)D^\alpha g\|_{p(\Omega)} \right\}$$

и

$$K_{r,l}(f,t)_p = K\left(f,\Psi(t);L_p,W_p^r,W_p^l\right) \tag{2.1.6}$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} \inf_{g\in W_p^l(\Omega)} \left\{ \|f-g\|_{p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=r,l} \|\Psi^\alpha(t)D^\alpha g\|_{p(\Omega)} \right\}.$$

В параграф 2.4 ще докажем следните прави и обратни неравенства за най-добрите алгебрични приближения с ограничения в термините на К функционала.

Теорема 2.1.1 *Нека $1\leq p\leq\infty$, r и n са естествени числа, $* =$ “$-$“ или “$+$“ и нека $f\in L_p(\Omega)$ да е ограничена съответно отдолу и отгоре. Тогава е в сила*

$$(d) \qquad E^*(f,H_{n-1})_{p(\Omega)} \leq cK^*\left(f,\Psi(n^{-1});L_p,W_p^r,W_p^l\right);$$
$$(i) \qquad K^*\left(f,\Psi(n^{-1});L_p,W_p^r,W_p^l\right) \leq c\left(E^*(f,H_{n-1})_{p(\Omega)} + K\left(f,\Psi(n^{-1});L_p,W_p^r\right)\right).$$

Тези неравенства са основата за следващите изследвания в тази глава.

Основният резултат в тази глава Теорема 2.5 е характеризацията за $r=1$ и $r=2$ на К-функционала (2.1.3) с помощта на подходящи модули. Тогава, като следствие, имаме и характеризация на най-добрите алгебрични приближения отдолу. Същите резултати за К-функционала (2.1.4) и за най-добрите алгебрични приближения отгоре се получават като следствие от $E^+(f)=E^-(-f)$ и $K^+(f)=K^-(-f)$ (при едни и същи стойности на параметрите).

Резултатите са в сила за всяко $1\leq p\leq\infty$. Поради тривиалността на случая $p=\infty$, където е в сила $E^+=E^-=2E$, доказателствата са дадени само за $1\leq p<\infty$.

Като междинна стъпка при характеризацията на K-функционала (2.1.3) в параграф 2.5 ще докажем следната еквивалентност между K-функционала и една характеристика, базирана на най-добрите локални алгебрични приближения отдолу.

Теорема 2.1.2 *Нека $f \in L_p(\Omega)$ $(p \in [1, \infty])$ е ограничена отдолу и нека r е естествено число. Тогава*

$$K_r^-(f, t)_p \sim \|\Psi(t, \cdot)^{-\frac{1}{p}} E^-(f, H_{r-1})_{p(U(t,\cdot))}\|_{p(\Omega)} \quad \forall \quad t \in (0, 1].$$

Нека $U \subset \mathbb{R}^d$ бъде изпъкнало тяло. Дефинираме

$$\omega_r(f, U)_p \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d} \left\{ \|\Delta_{\mathbf{h},U}^r f(\cdot)\|_{p(U)} \right\}, \tag{2.1.7}$$

където

$$\Delta_{\mathbf{h},U}^r f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \Delta_{\mathbf{h}}^r f(\mathbf{x}) & \mathbf{x}, \mathbf{x} + r\mathbf{h} \in U; \\ 0 & \mathbf{x} \vee \mathbf{x} + r\mathbf{h} \notin U \end{cases}$$

и

$$\Delta_{\mathbf{h}}^r f(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f(\mathbf{x} + i\mathbf{h}).$$

В хода на изследванията на най-добрите локални алгебрични приближения отдолу за $r = 1$ и $r = 2$ ще използваме следните характеристика

$$\tau_r^-(f, U)_p = \left\| \sup_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d} \{\Lambda_{\mathbf{h},U}^r f(\cdot)\} \right\|_{p(U)} \tag{2.1.8}$$

и усреднен модул на ограничена отдолу функция

$$\tau_r^-(f, \Psi(t))_{p(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \sup_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d} \{\Lambda_{\mathbf{h},U(t,\cdot)}^r f(\cdot)\} \right\|_{p(\Omega)},$$

където

$$\Lambda_{\mathbf{h},U}^1 f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) & \mathbf{x},\ \mathbf{x} + \mathbf{h} \in U; \\ 0 & \mathbf{x} \vee \mathbf{x} + \mathbf{h} \notin U \end{cases}$$

и

$$\Lambda_{\mathbf{h},U}^2 f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 2f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) & \mathbf{x} - \mathbf{h},\ \mathbf{x} + \mathbf{h} \in U; \\ 0 & \mathbf{x} - \mathbf{h} \vee \mathbf{x} + \mathbf{h} \notin U. \end{cases}$$

Горните характеристики ще използваме в следната теорема от тип на Whitney.

Теорема 2.1.3 *Нека $f \in L_p(\Pi)$ $(\Pi = \Pi[\mathbf{a}; \mathbf{b}],\ \ p \in [1, \infty])$ е ограничена отдолу. Тогава*

$$\begin{array}{ll} (I) & E^-(f, H_0)_{p(\Pi)} = \tau_1^-(f, \Pi)_p; \\ (II) & E^-(f, H_1)_{p(\Pi)} \sim \omega_2(f, \Pi)_p + \tau_2^-(f, \Pi)_p. \end{array}$$

Тази теорема ще бъде доказана в параграф 2.6.

Нека $\Pi = \Pi[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$ и $\pi = \Pi[\mathbf{c}; \mathbf{d}]$ са такива, че

$$\pi \subseteq \left(\Pi - \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}\right) \subseteq R.\pi \tag{2.1.9}$$

за някое $R \geq 1$, където за $U \subset \mathbb{R}^d$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ и $t > 0$ означаваме

$$U + \mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \ \mid \ \mathbf{x} - \mathbf{y} \in U\}$$

и

$$tU \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \ \mid \ t^{-1}\mathbf{x} \in U\}.$$

Ще използваме и следната усреднена характеристика на функция $f \in L_p(\Pi)$

$$\tau_r(f, \pi)_{p,p(\Pi)} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \int_\Pi \frac{1}{\mu(\pi)} \int_\pi |\Delta^r_{\mathbf{v},\Pi} f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{v} d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{2.1.10}$$

Тук с $\mu(V)$ бележим мярката на Лебег на измеримото множество V. Връзката между (2.1.7) и (2.1.10), която ще докажем в параграф 2.3 е

Теорема 2.1.4 *Ако условие (2.1.9) е удовлетворено и* $f \in L_p(\Omega)$ $(p \in [1, \infty])$, *тогава*

$$c\tau_r(f, \pi)_{p,p(\Pi)} \leq \omega_r(f, \Pi)_p \leq cR^{d+r} \tau_r(f, \pi)_{p,p(\Pi)}.$$

Нека

$$B(t, \mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \ \mid \ |y_s| \leq \psi(t, x_s) \ \forall \ \ s = 1, ..., d\right\}.$$

В тази глава ще работим със следния усреднен модул на гладкост, дефиниран от К. Иванов в [13].

$$\tau_r(f, \Psi(t))_{p,p(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \int_\Omega \Psi(t, \mathbf{x})^{-1} \int_{B(t,\mathbf{x})} |\Delta^r_{\mathbf{v},\Omega} f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{v} d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{2.1.11}$$

Като използваме резултатите от Теорема 2.1.2, Теорема 2.1.3 и Теорема 2.1.4 в параграф 2.7 ще получим характеризацията за $r = 1$ и $r = 2$ на К-функционала (2.1.3) с помощта на подходящи модули.

Теорема 2.1.5

$$\begin{aligned} K^-(f, t, L_p, W_p^1(\Psi), W_p^{l_1}(\Psi)) \quad &\sim \quad \tau_1^-(f, \Psi(t))_{p(\Omega)}; \\ K^-(f, t, L_p, W_p^2(\Psi), W_p^{l_2}(\Psi)) \quad &\sim \quad \tau_2^-(f, \Psi(t))_{p(\Omega)} + \tau_2(f, \Psi(t))_{p,p(\Omega)}, \end{aligned}$$

където съответно $l_1 = \left[\frac{d}{p}\right] + 1$ *и* $l_2 = \max\left\{2, \left[\frac{d}{p}\right] + 1\right\}$.

Като комбинираме резултатите на Теорема 2.1.1 и Теорема 2.1.5 получаваме и характеризация на най-добрите алгебрични приближения отдолу в многомерен случай в термините на подходящи модули на гладкост.

Теорема 2.1.6

$$E^-(f, H_{n-1})_{p(\Omega)} \le c\tau_1^-(f, \Psi(n^{-1}))_{p(\Omega)};$$

$$E^-(f, H_{n-1})_{p(\Omega)} \le c\{\tau_2^-(f, \Psi(n^{-1}))_{p(\Omega)} + \tau_2(f, \Psi(n^{-1}))_{p,p(\Omega)}\}$$

и за $r = 1$ *и* $r = 2$

$$\tau_r^-(f, \Psi(n^{-1}))_{p(\Omega)} \le c\{E^-(f, H_{n-1})_{p(\Omega)} + \tau_r(f, \Psi(n^{-1}))_{p,p(\Omega)}\}.$$

В хода на доказателството на Теорема 2.1.3(II) се получава резултат от теорията на изпъкналите функции, които поне автора на настоящата работа не успя да открие като известен в научната литература.

Нека $U \subset \mathbb{R}^d$ е изпъкнало тяло. Функцията $f : U \to \mathbb{R}$ се нарича *средно изпъкнала* в точката $\mathbf{x}$, ако за всяко $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ такова, че $\mathbf{x}-\mathbf{h}, \mathbf{x}+\mathbf{h} \in U$ е изпълнено $2f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x}-\mathbf{h}) + f(\mathbf{x}+\mathbf{h})$.

Като следствие от резултатите в параграф 2.6 се получава

Теорема 2.1.7 *Нека функция* $f : \Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ *е почти навсякъде средно изпъкнала. Тогава* f *съвпада почти навсякъде с изпъкнала функция* g*, като освен това* $f \ge g$*.*

§2.2 Някои означения и помощни резултати.

Нека N е фиксирано естествено число. Полагаме

$$\mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \{0,\ 1,\ ...,\ N-1\}^d\ ;\ \ \mathbb{Z}' \stackrel{\text{def}}{=} \{0,\ 1,\ ...,\ N\}^d\ ;\ \ \mathbb{E} \stackrel{\text{def}}{=} \{0,\ 1\}^d;$$

$$z_k = cos(\pi - \frac{k\pi}{N}),\ k = 0, 1, ..., N,\ z_{-1} = z_0 = -1,\ \ z_{N+1} = z_N = 1.$$

За всяко $\mathbf{j} = (j_1,\ j_2,\ ...,\ j_d) \in \mathbb{Z}$ означаваме

$$\Omega_{\mathbf{j}} \stackrel{\text{def}}{=} [z_{j_1},\ z_{j_1+1}] \times\ ...\ \times [z_{j_d},\ z_{j_d+1}]$$

и за всяко $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}'$ означаваме

$$\Omega'_{\mathbf{j}} \stackrel{\text{def}}{=} [z_{j_1-1},\ z_{j_1+1}] \times\ ...\ \times [z_{j_d-1},\ z_{j_d+1}].$$

Нека $\mu(v) = \int_0^v e^{\frac{-1}{u-u^2}} du / \int_0^1 e^{\frac{-1}{u-u^2}} du$ за $0 < v < 1$, $\mu(v) = 0$ за $v \leq 0$ и $\mu(v) = 1$ за $v \geq 1$. Следователно $\mu \in C^\infty(\mathbb{R})$ и нека

$$\begin{aligned}
&\mu_0(v) = 1 - \mu((v - z_0)/(z_1 - z_0));\\
&\mu_s(v) = \mu((v - z_{s-1})/(z_s - z_{s-1}))(1 - \mu((v - z_s)/(z_{s+1} - z_s))) \quad s = 1, ...,\ N-1;\\
&\mu_N(v) = \mu((v - z_{N-1})/(z_N - z_{N-1})).
\end{aligned}$$

Накрая за всяко $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}'$ означаме $\mu_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \Pi_{s=1}^d \mu_{j_s}(x_s)$. Следователно за всяко $\mathbf{x} \in \Omega$ имаме

$$0 \leq \mu_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \leq 1;\ \ \mu_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \ = \ 0 \ \ if \ \ \mathbf{x} \notin \Omega'_{\mathbf{j}}; \tag{2.2.1}$$

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}'} \mu_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) \ = \ 1. \tag{2.2.2}$$

Нека $0 < t \leq \frac{1}{2}$ и $N = \left[\frac{2\pi}{t}\right] + 1$. Тогава за горните величини са в сила следните твърдения:

$$\Psi(t, \mathbf{x}) \leq meas(U(t, \mathbf{x})) \leq 2^d \Psi(t, \mathbf{x}); \tag{2.2.3}$$

$$\Psi(t, \mathbf{x}) \sim \Psi(t, \mathbf{y})\ \forall\ \mathbf{y} \in U(t, \mathbf{x}); \tag{2.2.4}$$

$$\Psi(t, \mathbf{x}) \sim \Psi(t, \mathbf{x} + \mathbf{y})\ \forall\ \mathbf{y} \in B(t, \mathbf{x}); \tag{2.2.5}$$

$$c\Psi(t, \mathbf{x}) \leq meas(\Omega'_{\mathbf{j}}) \leq c\Psi(t, \mathbf{y})\ \forall\ \ \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \Omega'_{\mathbf{j}}; \tag{2.2.6}$$

$$\Omega'_{\mathbf{j}} \subset U(t, \mathbf{x})\ \forall\ \ \mathbf{x} \in \Omega'_{\mathbf{j}}. \tag{2.2.7}$$

Неравенствата (2.2.3), (2.2.4), (2.2.6) и (2.2.7) са доказани в [8]. (2.2.5) следва от (2.2.3), (2.2.4) и дефиницията на $B(t, \mathbf{x})$.

В хода на доказателството на Теорема 2.1.1 се нуждаем от следните леми.

Лема 2.2.1 *Нека $1 \leq p \leq \infty$, r и n са естествени числа и $g \in W_p^l(\Omega)$. Тогава е в сила*

$$E^-(g, H_{n-1})_{p(\Omega)} \leq \mathbf{c} \sum_{|\alpha|=r,l} \|\Psi^\alpha(n^{-1}) D^\alpha g\|_{p(\Omega)}.$$

Тази лема е тривиално следствие от Теорема 1 и Теорема 2 от [8], защото грешката на най-доброто алгебрично приближение отдолу е по-малка от грешката на най-доброто едностранно алгебрично приближене.

Лема 2.2.2 *Нека* $1 \le p \le \infty$, r *и* n *са естествени числа и* $f \in L_p(\Omega)$ *е ограничена отдолу. Тогава*

$$E^-(f, H_{n-1})_{p(\Omega)} \le \mathbf{c} K^- \left(f, \Psi(n^{-1}); L_p, W_p^r, W_p^l\right).$$

Тази лема следва от Лема 2.1 и Теорема 4.1 от [9] приложени към най-доброто алгебрично приближение отдолу.

Лема 2.2.3 *Нека* f *и* g *принадлежат на* $L_p(\Omega)$. *Тогава*

$$\tau_r(f+g, \Psi(t))_{p,p(\Omega)} \le \tau_r(f, \Psi(t))_{p,p(\Omega)} + \tau_r(g, \Psi(t))_{p,p(\Omega)}; \tag{2.2.8}$$

$$\tau_r(f, \Psi(t))_{p,p(\Omega)} \le \mathbf{c}\|f\|_{p(\Omega)} \quad 0 < t \le \frac{1}{2}; \tag{2.2.9}$$

$$\tau_r(f, \Psi(t_1))_{p,p(\Omega)} \le \mathbf{c}(A)\tau_r(f, \Psi(t_2))_{p,p(\Omega)}, \quad t_1 \le t_2 \le At_1. \tag{2.2.10}$$

Доказателство. Неравенствата (2.2.8) и (2.2.10) се получават директно от дефиниция (2.1.10). За доказателството на (2.2.9) ще използваме (2.2.5)

$$\begin{aligned}
\tau_r(f, \Psi(t))_{p,p(\Omega)} \quad & \le \|f\|_{p(\Omega)} + \mathbf{c}\left\{\int_\Omega \Psi(t,\mathbf{x})^{-1} \int_{rB(t,\mathbf{x})} |f(\mathbf{x}+\mathbf{y})|^p d\mathbf{y} d\mathbf{x}\right\}^{\frac{1}{p}} \\
& \le \|f\|_{p(\Omega)} + \mathbf{c}\left\{\int_\Omega \int_{rB(t,\mathbf{x})} |f(\mathbf{x}+\mathbf{y})|^p \Psi(t,\mathbf{x}+\mathbf{y})^{-1} d\mathbf{y} d\mathbf{x}\right\}^{\frac{1}{p}} \\
& \le \|f\|_{p(\Omega)} + \mathbf{c}\left\{\int_\Omega |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right\}^{\frac{1}{p}} \\
& \le \mathbf{c}\|f\|_{p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

§2.3 Едно ново представяне на $\omega_\mathbf{r}(\mathbf{f}, \Pi)_\mathbf{p}$.

Доказателство на Теорема 2.1.4. Очевидно е, че

$$\begin{aligned}
\tau_r(f, \pi)_{p,p(\Pi)} \quad & \le \mathbf{c}\left\{\frac{1}{meas(\pi)} \int_\pi \sup_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^d} \{\int_\Pi |\Delta^r_{\mathbf{w},\Pi} f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\} d\mathbf{w}\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (2.3.1) \\
& \le \mathbf{c}\omega_r(f, \Pi)_p.
\end{aligned}$$

От [22] имаме, че ако f е дефинирана за всяко $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, то тогава за всеки $\mathbf{h},\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ r-тата крайна разлика удовлетворява равенството

$$\Delta^r_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} \left\{ \Delta^r_{\frac{i}{r}(\mathbf{v}-\mathbf{h})} f(\mathbf{x}+i\mathbf{h}) - \Delta^r_{\mathbf{h}+\frac{i}{r}(\mathbf{v}-\mathbf{h})} f(\mathbf{x}) \right\}. \tag{2.3.2}$$

За $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ полагаме $\Pi_{\mathbf{h}} = \Pi \cap (\Pi - r\mathbf{h})$. Това множество $\Pi_{\mathbf{h}}$ е също паралелепипед и съществува, ако

$$\mathbf{h} \in 2r^{-1} \left(\Pi - \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} \right). \tag{2.3.3}$$

Нека (2.3.3) е удовлетворено. Разделяме $\Pi_{\mathbf{h}}$ и $r^{-1}\pi$ на 2^d паралелепипеди съответно $B_1, \dots, B_{2^d}$ чрез хиперравнини минаващи през центъра и успоредни на координатните хиперравнини и $\pi_1, \dots, \pi_{2^d}$ чрез координатните хиперравнини, като номерацията им е такава, че π_i е противоположен на B_i. При предположение, че $\mathbf{x} \in B_s$ и $\mathbf{v} \in r^{-1}\pi_s$ от (2.1.9) имаме

$$\mathbf{x},\ \ \mathbf{x}+i\mathbf{v} \quad \wedge \quad \mathbf{x}+(r-i)\mathbf{h}+i\mathbf{v} \quad \in \Pi \ \ \forall\, i. \tag{2.3.4}$$

От тук за всяко $\mathbf{x} \in B_s$ като използваме (2.3.2) и (2.3.4) получаваме

$$meas(\pi_s)|\Delta^r_{\mathbf{h},\Pi} f(\mathbf{x})|^p \le \mathbf{c} \int_{\pi_s} \left(\sum_{i=1}^{r} |\Delta^r_{\frac{i}{r}(\mathbf{v}-\mathbf{h}),\Pi} f(\mathbf{x}+i\mathbf{h})| + |\Delta^r_{\mathbf{h}+\frac{i}{r}(\mathbf{v}-\mathbf{h}),\Pi} f(\mathbf{x})| \right)^p d\mathbf{v}.$$

Така за всяко $\mathbf{x} \in \Pi_{\mathbf{h}}$

$$|\Delta^r_{\mathbf{h},\Pi} f(\mathbf{x})|^p \le \mathbf{c} \sum_{s=1}^{2^d} \frac{1}{meas(\pi)} \int_{\pi_s} \left(\sum_{i=1}^{r} |\Delta^r_{\frac{i}{r}(\mathbf{v}-\mathbf{h}),\Pi} f(\mathbf{x}+i\mathbf{h})| + |\Delta^r_{\mathbf{h}+\frac{\mathbf{i}}{\mathbf{r}}(\mathbf{v}-\mathbf{h}),\Pi} f(\mathbf{x})| \right)^p d\mathbf{v}.$$

Като вземем $L_p(\Pi_{\mathbf{h}})-$норма по отношение на $\mathbf{x}$ в горното неравенство и използваме

$$\int_{\Pi_{\mathbf{h}}} |\Delta^r_{\mathbf{h},\Pi} f(\mathbf{x})|^p dx = \int_{\Pi} |\Delta^r_{\mathbf{h},\Pi} f(\mathbf{x})|^p dx$$

в лявата страна и $\mathbf{x},\ \mathbf{x}+i\mathbf{h} \in \Pi$ в дясната страна, получаваме

$$\begin{aligned} \|\Delta^r_{\mathbf{h},\Pi} f(\cdot)\|_{p(\Pi)} \quad & \le \mathbf{c} \sum_{i=1}^{r} \left[\left\{ \int_{\Pi} \frac{1}{meas(\pi)} \int_{r^{-1}\pi} |\Delta^r_{\frac{i}{r}(\mathbf{v}-\mathbf{h}),\Pi} f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{v} d\mathbf{y} \right\}^{\frac{1}{p}} \right. \\ & \left. + \left\{ \int_{\Pi} \frac{1}{meas(\pi)} \int_{r^{-1}\pi} |\Delta^r_{\mathbf{h}+\frac{i}{r}(\mathbf{v}-\mathbf{h}),\Pi} f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{v} d\mathbf{y} \right\}^{\frac{1}{p}} \right]. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Нека $\mathbf{v} \in r^{-1}\pi$. Тогава от (2.1.9)

$$\frac{i}{r}(\mathbf{v}-\mathbf{h}) \ \ \wedge \ \ \mathbf{h}+\frac{i}{r}(\mathbf{v}-\mathbf{h}) \ \ \in \ \ \frac{2R+1}{r}\pi. \tag{2.3.6}$$

Прилагайки (2.3.5) и (2.3.6), получаваме

$$\|\Delta^r_{\mathbf{h},\Pi} f(\cdot)\|_{p(\Pi)} \leq \mathbf{c} \left\{ \int_{\Pi} \frac{1}{meas(\pi)} \int_{\frac{2R+1}{r}\pi} |\Delta^r_{\mathbf{v},\Pi} f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{v} d\mathbf{y} \right\}^{\frac{1}{p}}. \qquad (2.3.7)$$

Нуждаем се от следното неравенство

$$\|\Delta^r_{\mathbf{h},\Pi} f(\cdot)\|_{p(\Pi)} \leq \mathbf{c} R^{r+d} \left\{ \int_{\Pi} \frac{1}{meas(\pi)} \int_{\pi} |\Delta^r_{\mathbf{v},\Pi} f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{v} d\mathbf{y} \right\}^{\frac{1}{p}}. \qquad (2.3.8)$$

Ако $\frac{2R+1}{r} \leq 1$, то (2.3.8) е тривиално следствие от (2.3.7). В противен случай, нека $n = \left[\frac{2R+1}{r}\right] + 1$. От (2.3.7) имаме, че

$$\|\Delta^r_{\mathbf{h},\Pi} f(\cdot)\|_{p(\Pi)} \leq \mathbf{c} \left\{ \int_{\Pi} \frac{1}{meas(\pi)} \int_{n\pi} |\Delta^r_{\mathbf{v},\Pi} f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{v} d\mathbf{y} \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Като извършим смяна на $\mathbf{v}$ с $n\mathbf{w}$ получаваме

$$\|\Delta^r_{\mathbf{h},\Pi} f(\cdot)\|_{p(\Pi)} \leq \mathbf{c} R^{d} \left\{ \int_{\Pi} \frac{1}{meas(\pi)} \int_{\pi} |\Delta^r_{n\mathbf{w},\Pi} f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{w} d\mathbf{y} \right\}^{\frac{1}{p}}. \qquad (2.3.9)$$

От дефиницията на r-тата крайна разлика имаме, че ако f е дефинирана за всяко $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, то тогава за всяко $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ е изпълнено следното неравенство

$$\Delta^r_{n\mathbf{w}} f(\mathbf{y}) = \sum_{k_1=0}^{n-1} \dots \sum_{k_r=0}^{n-1} \Delta^r_{\mathbf{w}} f(\mathbf{y} + k_1\mathbf{w} + \dots + k_r\mathbf{w})$$

и от тук

$$\Delta^r_{n\mathbf{w},\Pi} f(\mathbf{y}) = \sum_{k_1=0}^{n-1} \dots \sum_{k_r=0}^{n-1} \Delta^r_{\mathbf{w},\Pi} f(\mathbf{y} + k_1\mathbf{w} + \dots + k_r\mathbf{w}).$$

Накрая последното равенство и (2.3.9) дават

$$\begin{aligned} \|\Delta^r_{\mathbf{h},\Pi} f(\cdot)\|_{p(\Pi)} \quad &\leq \mathbf{c} R^d n^r \left\{ \int_{\Pi} \frac{1}{meas(\pi)} \int_{\pi} |\Delta^r_{\mathbf{w},\Pi} f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{w} d\mathbf{y} \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= \mathbf{c} R^{d+r} \left\{ \int_{\Pi} \frac{1}{meas(\pi)} \int_{\pi} |\Delta^r_{\mathbf{w},\Pi} f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{w} d\mathbf{y} \right\}^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

което е и твърдението на (2.3.8). Благодарение на него имаме, че

$$\sup_{\mathbf{h} \in \frac{2}{r}(\Pi - \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2})} \left\{ \left\| \Delta^r_{\mathbf{h},\Pi} f(\cdot) \right\|_{p(\Pi)} \right\} \leq \mathbf{c} R^{r+d} \tau_2^-(f,\pi)_{p,p(\Pi)}.$$

Ако $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d \setminus \frac{2}{r}(\Pi - \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2})$, то е вярно, че $\|\Delta^r_{\mathbf{h},\Pi} f(\cdot)\|_{p(\Pi)} = 0$ и тогава

$$\sup_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d} \left\{ \left\| \Delta^r_{\mathbf{h},\Pi} f(\cdot) \right\|_{p(\Pi)} \right\} \le \mathbf{c} R^{r+d} \tau_2^-(f,\pi)_{p,p(\Pi)}.$$

Това неравенство и (2.3.1) доказват Теорема 2.1.4.

□

Забележка 2.3.1. Нека $U \subset \mathbb{R}^d$ е изпъкнала околност на $\mathbf{0}$-та със строго положителен минимален радиус R_1 и с краен максимален радиус R_2. Т.е. $B(R_1) \subset U \subset B(R_2)$, където $B(\rho) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d;\ \ \|\mathbf{x}\| \le \rho\}$. Ако разгледаме

$$\tau_r(f,U)_{p,p(\Pi)} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \int_\Pi \frac{1}{meas(U)} \int_U |\Delta^r_{\mathbf{v},\Pi} f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{v} d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{p}},$$

то и за тази функционална характеристика може да се докаже подобен на Теорема 2.1.4 резултат.

§2.4 Прави и обратни неравенства за най-добрите алгебрични приближения с ограничения в термините на K функционала.

Тук, като използваме метод базиран на идеите от [10], ще докажем, че K функционалите (2.1.5) и (2.1.6) и модулът на гладкост (2.1.8) са еквивалентни.

Теорема 2.4.1 *Нека* $1 \le p \le \infty$, r *е естествено число,* $l = \max\left\{ \left[\frac{d}{p}\right] + 1\ ,\ r \right\}$ *и* $f \in L_p(\Omega)$. *Тогава са в сила*

(r)
$$\mathbf{c}\tau_r(f,\Psi(t))_{p,p(\Omega)} \le K\left(f,\Psi(t),L_p,W_p^r\right) \le \mathbf{c}\tau_r(f,\Psi(t))_{p,p(\Omega)};$$

(r,l)
$$\mathbf{c}\tau_r(f,\Psi(t))_{p,p(\Omega)} \le K\left(f,\Psi(t),L_p,W_p^r,W_p^l\right) \le \mathbf{c}\tau_r(f,\Psi(t))_{p,p(\Omega)}.$$

С помощта на тази еквивалентност ще докажем Теорема 2.1.1.

Ще докажем най-напред следната лема.

Лема 2.4.1 *Нека* $1 \le p \le \infty$ *и* $t < \frac{1}{2}$. *Тогава за всяка функция* $f \in L_p(\Omega)$ *е изпълнено*

$$\tau_r(f, \Psi(t))_{p,p(\Omega)} \le \mathbf{c} K\left(f, \Psi(t), L_p, W_p^r\right); \tag{2.4.1}$$

$$K\left(f, \Psi(t), L_p, W_p^r, W_p^l\right) \le \mathbf{c}\tau_r(f, \Psi(t))_{p,p(\Omega)}. \tag{2.4.2}$$

Доказателство. Ще докажем най-напред (2.4.2). Нека положим

$$N = \left[\frac{2\pi}{t}\right] + 1 \tag{2.4.3}$$

и да използваме означенията $\Omega_{\mathbf{j}}$, $\Omega'_{\mathbf{j}}$ и $\mu_{\mathbf{j}}$ от началочо на параграф 2.2. Означаваме с $Q_{\mathbf{j}} \in H_{r-1}$ полинома на най-добро алгебрично L_p приближение от степен $r-1$ за функцията f в $\Omega'_{\mathbf{j}}$, $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}'$. Тогава от теоремата на Whitney и Теорема 2.1.4 имаме, че

$$\|f - Q_{\mathbf{j}}\|_{p(\Omega'_{\mathbf{j}})} \le \mathbf{c}\omega_r(f, \Omega'_{\mathbf{j}})_{p(\Omega'_{\mathbf{j}})} \le \mathbf{c}\tau_r(f, \Omega'_{\mathbf{j}})_{p,p(\Omega'_{\mathbf{j}})}. \tag{2.4.4}$$

Полагаме

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}'} \mu_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) Q_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}). \tag{2.4.5}$$

От (2.4.3)-(2.4.5), (2.2.6) и (2.2.7) получаваме

$$\begin{aligned}
\|f - g\|_{p(\Omega)}^p &= \|\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}'} \mu_{\mathbf{j}}(f - Q_{\mathbf{j}})\|_{p(\Omega)}^p \\
&\le \mathbf{c}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}'} \int_{\Omega'_{\mathbf{j}}} |f(\mathbf{x}) - Q_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \\
&\le \mathbf{c}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}'} \tau_r(f, \Omega'_{\mathbf{j}})_{p,p(\Omega'_{\mathbf{j}})}^p \\
&= \mathbf{c}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}'} \int_{\Omega'_{\mathbf{j}}} \frac{1}{meas(\Omega'_{\mathbf{j}})} \int_{\Omega'_{\mathbf{j}}} |\Delta_{\mathbf{v},\Omega'_{\mathbf{j}}}^r f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{v} d\mathbf{x} \\
&\le \mathbf{c}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}'} \int_{\Omega'_{\mathbf{j}}} \Psi(t, \mathbf{x})^{-1} \int_{B(t,\mathbf{x})} |\Delta_{\mathbf{v},\Omega}^r f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{v} d\mathbf{x} \\
&= \mathbf{c}\tau_r(f, \Psi(t))_{p,p(\Omega)}^p.
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Нека α е фиксиран мултииндекс с $|\alpha| = r$ или $|\alpha| = l$ и нека $\mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{j}}$, $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}$. От дефинициите на $\mu(\mathbf{x})$, $Q_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ имаме

$$g(\mathbf{x}) = Q_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) + \sum_{\epsilon\in\mathbb{E}} \mu_{\mathbf{j}+\epsilon}(\mathbf{x}) \left(Q_{\mathbf{j}+\epsilon}(\mathbf{x}) - Q_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})\right),$$

където

$$\mu_{\mathbf{j}+\epsilon}(\mathbf{x}) = \prod_{s;\,\epsilon_s=1} \mu\left(\frac{x_s - z_{j_s}}{z_{j_s+1} - z_{j_s}}\right) \cdot \prod_{s;\,\epsilon_s=0} \mu\left(1 - \left(\frac{x_s - z_{j_s}}{z_{j_s+1} - z_{j_s}}\right)\right)$$

и тогава от последното неравенство и $D^\alpha Q_{\mathbf{j}} = 0$ следва, че

$$D^\alpha g(\mathbf{x}) = \sum_{\epsilon\in\mathbb{E}} \sum_{0\le\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta}\mu_{\mathbf{j}+\epsilon}(\mathbf{x}) D^\beta \left(Q_{\mathbf{j}+\epsilon}(\mathbf{x}) - Q_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})\right)$$

Сега като използваме (2.2.6), (2.2.7), дефинициите на $\mu_{\mathbf{j}}$ и $Q_{\mathbf{j}}$ и неравенството на Марков (или също така Лема 2.4 от [10]) ($(b-a)^i \|g^{(i)}\|_{p[a,b]} \le c(r)\|g\|_{p[a,b]}$ за $g \in H_r$) получаваме

$$\begin{aligned}
\|\Psi^\alpha(t) D^\alpha g\|_{p(\Omega_{\mathbf{j}})} &\le c\Psi^\alpha(t, z_{\mathbf{j}}) \|D^\alpha g\|_{p(\Omega_{\mathbf{j}})} \\
&\le c\Psi^\alpha(t, z_{\mathbf{j}}) \sum_{\epsilon\in\mathbb{E}} \sum_{\mathbf{0}\le\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|D^{\alpha-\beta}\mu_{\mathbf{j}+\epsilon}\|_{\infty(\Omega_{\mathbf{j}})} \|D^\beta \left(Q_{\mathbf{j}+\epsilon} - Q_{\mathbf{j}}\right)\|_{p(\Omega_{\mathbf{j}})} \\
&\le c\Psi^\alpha(t, z_{\mathbf{j}}) \sum_{\epsilon\in\mathbb{E}} \sum_{\mathbf{0}\le\beta\le\alpha} \prod_{s=1}^{d} \frac{\|\mu^{(|\alpha-\beta|)}\|_{\infty[0,1]}}{|z_{j_s+1} - z_{j_s}|^{\alpha_s-\beta_s}} \|D^\beta \left(Q_{\mathbf{j}+\epsilon} - Q_{\mathbf{j}}\right)\|_{p(\Omega_{\mathbf{j}})} \\
&\le c \sum_{\epsilon\in\mathbb{E}} \sum_{\mathbf{0}\le\beta\le\alpha} \prod_{s=1}^{d} |z_{j_s+1} - z_{j_s}|^{\beta_s} \|D^\beta \left(Q_{\mathbf{j}+\epsilon} - Q_{\mathbf{j}}\right)\|_{p(\Omega_{\mathbf{j}})} \\
&\le c \sum_{\epsilon\in\mathbb{E}} \|Q_{\mathbf{j}+\epsilon} - Q_{\mathbf{j}}\|_{p(\Omega_{\mathbf{j}})} \\
&\le c \sum_{\epsilon\in\mathbb{E}} \left(\|f - Q_{\mathbf{j}+\epsilon}\|_{p(\Omega_{\mathbf{j}})} + \|f - Q_{\mathbf{j}}\|_{p(\Omega_{\mathbf{j}})}\right) \\
&\le \mathbf{c}\tau_r(f, \Omega'_{\mathbf{j}})_{p,p(\Omega'_{\mathbf{j}})}.
\end{aligned}$$

От тук получаваме, че

$$\begin{aligned}
\|\Psi^\alpha(t) D^\alpha g\|_{p(\Omega)}^p &\le \mathbf{c} \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}'} \tau_r(f, \Omega'_{\mathbf{j}})_{p,p(\Omega'_{\mathbf{j}})}^p \\
&= \mathbf{c} \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}'} \int_{\Omega'_{\mathbf{j}}} \frac{1}{meas(\Omega'_{\mathbf{j}})} \int_{\Omega'_{\mathbf{j}}} |\Delta_{\mathbf{v},\Omega'_{\mathbf{j}}}^r f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{v} d\mathbf{x} \\
&\le \mathbf{c} \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}'} \int_{\Omega'_{\mathbf{j}}} \Psi(t, \mathbf{x})^{-1} \int_{B(t,\mathbf{x})} |\Delta_{\mathbf{v},\Omega}^r f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{v} d\mathbf{x} \\
&= \mathbf{c}\tau_r(f, \Psi(t))_{p,p(\Omega)}^p.
\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

По този начин (2.4.2) следва от (2.4.6), (2.4.7) и (2.1.5).

Сега да се спрем на (2.4.1). Нека $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_d)$, $|\alpha| = r$ е мултииндекс и $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_d) \in \mathbb{R}^d$. Дефинираме за удобство

$$|\mathbf{z}^\alpha| = \Pi_{i=1}^d |z_i|^{\alpha_i} \quad \wedge \quad |\mathbf{z}| = \sqrt{\sum_{i=1}^d z_i^2}.$$

Непосредствено от дефиницията на крайната разлика (виж също така [10]) имаме

$$\Delta^r_{\mathbf{z},\Omega} f(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{z}} ... \int_0^{\mathbf{z}} f^{(r)}_{\mathbf{z}}(\mathbf{x} + \mathbf{y_1} + ... + \mathbf{y_r}) d\mathbf{y_1} ... d\mathbf{y_r}$$

за f от $W^r_p(\Omega)$, като додефинираме $f^{(r)}_{\mathbf{z}}(\mathbf{y}) = 0$, когато $\mathbf{y}$ не принадлежи на Ω.

От друга страна

$$f^{(r)}_{\mathbf{z}}(\mathbf{y}) = \sum_{|\alpha|=r} \binom{\mathbf{r}}{\alpha} D^\alpha f(\mathbf{y}) |\mathbf{z}^\alpha| |\mathbf{z}|^{-r}.$$

След смяна на променливите в последното равенство и прилагане на неравенството на Hölder имаме

$$\begin{aligned}
|\Delta^r_{\mathbf{z},\Omega} f(\mathbf{x})| \quad & \leq \sum_{|\alpha|=r} |\mathbf{z}^\alpha| |\mathbf{z}|^{-r} \binom{\mathbf{r}}{\alpha} \int_0^{\mathbf{z}} ... \int_0^{\mathbf{z}} |D^\alpha f(\mathbf{x} + \mathbf{y_1} + ... + \mathbf{y_r})| d\mathbf{y_1} ... d\mathbf{y_r} \\
& = \sum_{|\alpha|=r} |\mathbf{z}^\alpha| |\mathbf{z}|^{-1} \binom{\mathbf{r}}{\alpha} \int_0^{r\mathbf{z}} |D^\alpha f(\mathbf{x} + \mathbf{y})| d\mathbf{y} \\
& \leq \mathbf{c} \sum_{|\alpha|=r} |\mathbf{z}^\alpha| |\mathbf{z}|^{-1} |r\mathbf{z}|^{1-\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^{r\mathbf{z}} |D^\alpha f(\mathbf{x} + \mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \right\}^{\frac{1}{p}} \\
& = \mathbf{c} \sum_{|\alpha|=r} |\mathbf{z}^\alpha| |\mathbf{z}|^{-\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^{r\mathbf{z}} |D^\alpha f(\mathbf{x} + \mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \right\}^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

И тук както по-горе предполагаме за удобство $D^\alpha f(\mathbf{y}) = 0$, когато $\mathbf{y}$ не е от Ω. Тогава

$$\begin{aligned}
& \left\{ \Psi(t, \mathbf{x})^{-1} \int_{B(t,\mathbf{x})} |\Delta^r_{\mathbf{z},\Omega} f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{z} \right\}^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \mathbf{c} \sum_{|\alpha|=r} \left\{ \Psi(t, \mathbf{x})^{-1} \int_{B(t,\mathbf{x})} |\mathbf{z}^\alpha|^p |\mathbf{z}|^{-1} \int_0^{r\mathbf{z}} |D^\alpha f(\mathbf{x} + \mathbf{y})|^p d\mathbf{y} d\mathbf{z} \right\}^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \mathbf{c} \sum_{|\alpha|=r} \left\{ \Psi(t, \mathbf{x})^{-1} \int_{rB(t,\mathbf{x})} |D^\alpha f(\mathbf{x} + \mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \int_{B(t,\mathbf{x}) \setminus \frac{1}{r} B(t,\mathbf{x})} |\mathbf{z}^\alpha|^p |\mathbf{z}|^{-1} d\mathbf{z} \right\}^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \mathbf{c} \sum_{|\alpha|=r} \left\{ \Psi(t, \mathbf{x})^{-1} \Psi(t, \mathbf{x})^\alpha \int_{rB(t,\mathbf{x})} |D^\alpha f(\mathbf{x} + \mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \right\}^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

От последното неравенство, (2.1.10) и (2.2.5) получаваме

$$
\begin{aligned}
\tau_r(f,\Psi(t))_{p,p(\Omega)} \quad & \leq \mathbf{c}\sum_{|\alpha|=r}\left\{\int_\Omega \Psi(t,\mathbf{x})^{-1}\Psi(t,\mathbf{x})^\alpha \int_{rB(t,\mathbf{x})}|D^\alpha f(\mathbf{x}+\mathbf{y})|^p d\mathbf{y}d\mathbf{x}\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (2.4.8)\\
& \leq \mathbf{c}\sum_{|\alpha|=r}\left\{\int_\Omega \Psi(t,\mathbf{x})^\alpha \int_{rB(t,\mathbf{x})}|D^\alpha f(\mathbf{x}+\mathbf{y})|^p \Psi(t,\mathbf{x}+\mathbf{y})^{-1} d\mathbf{y}d\mathbf{x}\right\}^{\frac{1}{p}}\\
& \leq \mathbf{c}\sum_{|\alpha|=r}\left\{\int_\Omega \Psi(t,\mathbf{x})^\alpha |D^\alpha f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right\}^{\frac{1}{p}}\\
& \leq \mathbf{c}\sum_{|\alpha|=r}\|\Psi^\alpha(t)D^\alpha f\|_{p(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Сега ще докажем (2.4.1). Нека g е произволна функция от $W_p^r(\Omega)$. Като използваме Лема 2.2.3(по-специално неравенства (2.2.8) и (2.2.10)) и (2.4.8) имаме

$$
\begin{aligned}
\tau_r(f,\Psi(t))_{p,p(\Omega)} \quad & = \tau_r((f-g)+g,\Psi(t))_{p,p(\Omega)}\\
& \leq \mathbf{c}\tau_r((f-g),\Psi(t))_{p,p(\Omega)} + \tau_r(g,\Psi(t))_{p,p(\Omega)}\\
& \leq \mathbf{c}\left(\|f-g\|_{p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=r}\|\Psi^\alpha(t)D^\alpha g\|_{p(\Omega)}\right).
\end{aligned}
$$

Вземайки инфимум по всички $g \in W_p^r(\Omega)$ в последното неравенство ние доказваме (2.4.1).

□

Доказателство на Теорема 2.4.1.

Ще разгледаме само случая за $t > \frac{1}{2}$, защото за $0 < t \leq \frac{1}{2}$ Теорема 2.4.1 и Лема 2.4.1 съвпадат. От Теорема 2.1.4, Лема 2.4.1 (2.4.1) при $t = \frac{1}{2}$ и монотонността на K-функционала (2.1.5) по отношение на t се получава

$$
\begin{aligned}
& \tau_r(f,\Psi(t))_{p,p(\Omega)} \leq \mathbf{c}\omega_r(f,\Omega)_p \leq \mathbf{c}\tau_r(f,\Psi(2^{-1}))_{p,p(\Omega)} \qquad (2.4.9)\\
& \leq \mathbf{c}K\left(f,\Psi\left(\frac{1}{2}\right);L_p,W_p^r\right) \leq \mathbf{c}K\left(f,\Psi(t);L_p,W_p^r\right),
\end{aligned}
$$

което доказва лявото неравенство на Теорема 2.4.1(r).

От [14] имаме, че съществува полином $R \in H_{r-1}$ такъв, че

$$\|f-R\|_{p(\Omega)} \leq \mathbf{c}\omega_r(f,\Omega)_p.$$

Тогава от (2.1.5), Теорема 2.1.4 и Лема 2.2.3(неравенство (2.2.10)) следва

$$K\left(f, \Psi(t); L_p, W_p^r, W_p^l\right) \leq \mathbf{c}\|f - R\|_{p(\Omega)} \leq \mathbf{c}\omega_r(f, \Omega)_p \tag{2.4.10}$$
$$\leq \mathbf{c}\tau_r(f, \Psi(2^{-1}))_{p,p(\Omega)} \leq \mathbf{c}\tau_r(f, \Psi(t))_{p,p(\Omega)}.$$

Това е дясното неравенство от Теорема 2.4.1(r, l). Тогава от (2.4.9), (2.4.10) и тривиалното неравенство

$$K\left(f, \Psi(t), L_p, W_p^r\right) \leq K\left(f, \Psi(t), L_p, W_p^r, W_p^l\right)$$

получаваме Теорема 2.4.1.

□

Доказателство на Теорема 2.1.1.

Ще докажем първо Теорема 2.1.1 за приближенията отдолу, т.е. в случая на $* = -$.

Неравенството (d) следва непосредсрвено от Лема 2.2.2 и Теорема 4.1 от [9]. От Теорема 2.4.1 имаме

$$K\left(f, \Psi(t); L_p, W_p^r, W_p^l\right) \leq \mathbf{c}K\left(f, \Psi(t); L_p, W_p^r\right). \tag{2.4.11}$$

Неравенство (2.4.11) и Теорема 4.2 от [9] доказват Теорема 2.1.1 за приближенията отдолу. Да отбележим, че Теорема 4.2 от [9] е в сила заради Теорема 2.5 от [9] и (2.4.11), но може да се получи и като резултат от идеите в параграф 5d) от [9].

Отчитайки, че $E^+(f) = E^-(-f)$, $K^+(f) = K^-(-f)$ (при едни и същи стойности на параметрите) допълваме доказателството на Теорема 2.1.1.

□

Нека споменем, че "класическото"обратно неравенство за най-добрите приближения с ограничения

$$K^*\left(f, \Psi(n^{-1}); L_p, W_p^r, W_p^l\right) \leq \mathbf{c}\left(E^*(f, H_{n-1})_{p(\Omega)} + K\left(f, \Psi(n^{-1}); L_p, W_p^r, W_p^l\right)\right).$$

е по-слабо от полученото тук.

§2.5 Характеризация на (1.3) в термините на най-добрите локални приближения отдолу с алгебрични полиноми.

Тук като използваме методи базирани на идеите от [7], [8] и параграф 2.3 ще докажем Теорема 2.1.2.

Нека първо докажем следните две леми.

Лема 2.5.1 *Нека* $1 \le p \le \infty$ *и* $t < \frac{1}{2}$*. Тогава за всяка функция* $G \in L_p(\Omega)$ *е изпълнено*

$$\|\Psi^{-\frac{1}{p}}(t,\cdot)\|G\|_{p(U(t,\cdot))}\|_{p(\Omega)} \sim \|G\|_{p(\Omega)}.$$

Доказателство. Ще използваме същите аргументи като в доказателството на Лема 4 от [8]. Полагаме за удобство $G(\mathbf{x}) = 0$ за $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Като използваме (2.2.4) и теоремата на Fubini имаме

$$\begin{aligned}
\|\Psi(t,\cdot)^{-\frac{1}{p}}\|G\|_{p(U(t,\cdot))}\|_{p(\Omega)} &= \left\{\int_\Omega \Psi(t,\mathbf{x})^{-1}\int_{\mathbf{x}+B(t,\mathbf{x})}|G(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y}d\mathbf{x}\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\sim \left\{\int_\Omega \int_{U(t,\mathbf{x})} \Psi(t,\mathbf{y})^{-1}|G(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y}d\mathbf{x}\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\{\int_\Omega \frac{meas\,\{\mathbf{x} \ | \ \mathbf{y} \in \{\mathbf{x}+B(t,\mathbf{x})\}\}}{\Psi(t,\mathbf{y})}|G(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y}\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\{\int_\Omega \prod_{s=1}^{d} \frac{meas\{x_s \ | \ \ |x_s-y_s| \le \psi(t,x_s)\}}{\psi(t,y_s)}|G(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y}\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\sim \|G\|_{p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Да отбележим, че тук благодарение на (2.2.4) при $d = 1$ (виж също Лема 3 от [8]) е в сила $\dfrac{1}{4}\psi(t,y_s) \le meas\{x_s \ | \ \ |x_s-y_s| \le \psi(t,x_s)\} \le 12\psi(t,y_s)$ за всяко $s = 1,\ldots,d$.

□

Лема 2.5.2 *Нека* $1 \le p \le \infty$ *и* $0 < t \le \frac{1}{2}$*. Тогава за всяка функция* $f \in L_p(\Omega)$ *е изпълнено*

$$\|\Psi(t,\cdot)^{-\frac{1}{p}}E^-(f,H_{r-1})_{p(U(t,\cdot))}\|_{p(\Omega)} \le cK_r^-(f,t)_p; \qquad (2.5.1)$$

$$K_r^-(f,t)_p \le c\|\Psi(t,\cdot)^{-\frac{1}{p}}E^-(f,H_{r-1})_{p(U(t,\cdot))}\|_{p(\Omega)}. \qquad (2.5.2)$$

Доказателство. Ще започнем с доказателството на (2.5.1). Нека

$$N = \left[\frac{2\pi}{t}\right] + 1 \qquad (2.5.3)$$

и нека $Q_{\mathbf{j}} \in H_{r-1}$ е полинома на най-добро алгебрично L_p-приближение отдолу от степен $r-1$ за функцията f в $\Omega'_{\mathbf{j}}$, $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}'$. Полагаме

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}'} \mu_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) Q_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}). \tag{2.5.4}$$

От (2.5.3), (2.5.4), (2.2.3), (2.2.6) и (2.2.7) се получава

$$\begin{aligned}
\|f-g\|^p_{p(\Omega)} &= \|\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}'} \mu_{\mathbf{j}}(f-Q_{\mathbf{j}})\|^p_{p(\Omega)} \qquad (2.5.5)\\
&\leq c\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}'} \int_{\Omega'_{\mathbf{j}}} |f(\mathbf{x}) - Q_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\\
&= c\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}'} E^-(f, H_{r-1})^p_{p(\Omega'_{\mathbf{j}})}\\
&= c\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}'} meas(\Omega'_{\mathbf{j}})^{-1} \int_{\Omega'_{\mathbf{j}}} E^-(f, H_{r-1})^p_{p(\Omega'_{\mathbf{j}})} d\mathbf{x}\\
&\leq c\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}'} meas(\Omega'_{\mathbf{j}})^{-1} \int_{\Omega'_{\mathbf{j}}} E^-(f, H_{r-1})^p_{p(U(t,\mathbf{x}))} d\mathbf{x}\\
&\leq c\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}'} \int_{\Omega'_{\mathbf{j}}} (\Psi(t,\mathbf{x}))^{-1} E^-(f, H_{r-1})^p_{p(U(t,\mathbf{x}))} d\mathbf{x}\\
&\leq c\int_{\Omega} (\Psi(t,\mathbf{x}))^{-1} E^-(f, H_{r-1})^p_{p(U(t,\mathbf{x}))} d\mathbf{x}\\
&\leq c\|\Psi(t,\cdot)^{-\frac{1}{p}} E^-(f, H_{r-1})_{p(U(t,\cdot))}\|^p_{p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Нека α е фиксиран мултииндекс с $|\alpha| = r$ или $|\alpha| = l$ и нека $\mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{j}}$, $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}$. От дефинициите на $\mu(\mathbf{x})$, $Q_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ имаме

$$g(\mathbf{x}) = Q_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) + \sum_{\epsilon\in\mathbb{E}} \mu_{\mathbf{j}+\epsilon}(\mathbf{x}) \left(Q_{\mathbf{j}+\epsilon}(\mathbf{x}) - Q_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})\right),$$

където

$$\mu_{\mathbf{j}+\epsilon}(\mathbf{x}) = \prod_{s;\,\epsilon_s=1} \mu\left(\frac{x_s - z_{j_s}}{z_{j_s+1} - z_{j_s}}\right) \cdot \prod_{s;\,\epsilon_s=0} \mu\left(1 - \left(\frac{x_s - z_{j_s}}{z_{j_s+1} - z_{j_s}}\right)\right)$$

и тогава от последното неравенство и $D^\alpha Q_{\mathbf{j}} = 0$ следва, че

$$D^\alpha g(\mathbf{x}) = \sum_{\epsilon\in\mathbf{E}} \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta}\mu_{\mathbf{j}+\epsilon}(\mathbf{x}) D^\beta \left(Q_{\mathbf{j}+\epsilon}(\mathbf{x}) - Q_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})\right)$$

Сега като използваме (2.2.6), (2.2.7), дефинициите на $\mu_{\mathbf{j}}$, $\mathbb{E}$ и $Q_{\mathbf{j}}$ и неравенството на Марков (или също така Лема 2.4 от [10]) ($(b-a)^i \|g^{(i)}\|_{p[a,b]} \leq c(r)\|g\|_{p[a,b]}$ за $g \in H_r$)

получаваме

$$\begin{aligned}
\|\Psi^\alpha(t)D^\alpha g\|_{p(\Omega_\mathbf{j})} &\le c\Psi^\alpha(t,z_\mathbf{j})\|D^\alpha g\|_{p(\Omega_\mathbf{j})}\\
&\le c\Psi^\alpha(t,z_\mathbf{j})\sum_{\epsilon\in\mathbb{E}}\sum_{\mathbf{0}\le\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\|D^{\alpha-\beta}\mu_{\mathbf{j}+\epsilon}\|_{\infty(\Omega_\mathbf{j})}\|D^\beta\left(Q_{\mathbf{j}+\epsilon}-Q_\mathbf{j}\right)\|_{p(\Omega_\mathbf{j})}\\
&\le c\Psi^\alpha(t,z_\mathbf{j})\sum_{\epsilon\in\mathbb{E}}\sum_{\mathbf{0}\le\beta\le\alpha}\prod_{s=1}^{d}\frac{\|\mu^{(|\alpha-\beta|)}\|_{\infty[0,1]}}{|z_{j_s+1}-z_{j_s}|^{\alpha_s-\beta_s}}\|D^\beta\left(Q_{\mathbf{j}+\epsilon}-Q_\mathbf{j}\right)\|_{p(\Omega_\mathbf{j})}\\
&\le c\sum_{\epsilon\in\mathbb{E}}\sum_{\mathbf{0}\le\beta\le\alpha}\prod_{s=1}^{d}|z_{j_s+1}-z_{j_s}|^{\beta_s}\|D^\beta\left(Q_{\mathbf{j}+\epsilon}-Q_\mathbf{j}\right)\|_{p(\Omega_\mathbf{j})}\\
&\le c\sum_{\epsilon\in\mathbb{E}}\|Q_{\mathbf{j}+\epsilon}-Q_\mathbf{j}\|_{p(\Omega_\mathbf{j})}\\
&\le c\sum_{\epsilon\in\mathbb{E}}\left(\|f-Q_{\mathbf{j}+\epsilon}\|_{p(\Omega_\mathbf{j})}+\|f-Q_\mathbf{j}\|_{p(\Omega_\mathbf{j})}\right)\\
&\le cE^-(f,H_{r-1})^p_{p(\Omega'_\mathbf{j})}.
\end{aligned}$$

От тук

$$\begin{aligned}
\|\Psi^\alpha(t)D^\alpha g\|^p_{p(\Omega)} &\le c\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}'}E^-(f,H_{r-1})^p_{p(\Omega'_\mathbf{j})} \qquad (2.5.6)\\
&= c\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}'}meas(\Omega'_\mathbf{j})^{-1}\int_{\Omega'_\mathbf{j}}E^-(f,H_{r-1})^p_{p(\Omega'_\mathbf{j})}d\mathbf{x}\\
&\le c\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}'}meas(\Omega'_\mathbf{j})^{-1}\int_{\Omega'_\mathbf{j}}E^-(f,H_{r-1})^p_{p(U(t,\mathbf{x}))}d\mathbf{x}\\
&\le c\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}'}\int_{\Omega'_\mathbf{j}}(\Psi(t,\mathbf{x}))^{-1}E^-(f,H_{r-1})^p_{p(U(t,\mathbf{x}))}d\mathbf{x}\\
&\le c\int_{\Omega}(\Psi(t,\mathbf{x}))^{-\frac{1}{p}}E^-(f,H_{r-1})^p_{p(U(t,\mathbf{x}))}d\mathbf{x}\\
&\le c\|\Psi(t,\cdot)^{-\frac{1}{p}}E^-(f,H_{r-1})_{p(U(t,\cdot))}\|^p_{p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

По този начин (2.5.2) следва от дефиницията (2.1.3) на К функционала "отдолу (2.5.5) и (2.5.6).

Да се спрем сега на (2.5.1).

Нека $\alpha=(\alpha_1,..,\alpha_d)$ е мултииндекс с дължина $|\alpha|=r$ и $\mathbf{z}=(z_1,...,z_d)\in\mathbb{R}^d$. Дефинираме

$$|\mathbf{z}^\alpha|=\Pi_{i=1}^d|z_i|^{\alpha_i}$$

Нека $\Pi = \Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}]$ и нека $g \in W_p^l(\Pi)$. Като следствие от Теорема 2 и Теорема 1 от [8] имаме

$$E^-(g, H_{r-1})_{p(\Pi)} \le c \sum_{|\alpha|=r,l} |(\mathbf{b}-\mathbf{a})^\alpha| \ \ \|D^\alpha g\|_{p(\Pi)}. \tag{2.5.7}$$

Нека g е произволна функция от $W_p^l(\Omega)$, $g(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Тогава отчитайки, че $Q \le g$ влече $Q \le f$, получаваме

$$E^-(f, H_{r-1})_{p(U(t,\mathbf{x}))} \le E^-(g, H_{r-1})_{p(U(t,\mathbf{x}))} + \|f-g\|_{p(U(t,\mathbf{x}))}$$

и тогава

$$\begin{aligned} &\|\Psi(t,\cdot)^{-\frac{1}{p}} E^-(f, H_{r-1})_{p(U(t,\cdot))}\|_{p(\Omega)} \\ &\le \|\Psi(t,\cdot)^{-\frac{1}{p}} E^-(g, H_{r-1})_{p(U(t,\cdot))}\|_{p(\Omega)} + \|\Psi(t,\cdot)^{-\frac{1}{p}} \|f-g\|_{p(U(t,\cdot))}\|_{p(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

От друга страна от (2.5.7), (2.2.3) и (2.2.4) следва

$$\begin{aligned} E^-(g, H_{r-1})_{p(U(t,\mathbf{x})))} \ &\le c \sum_{|\alpha|=r,l} \Psi^\alpha(t,\mathbf{x}) \|D^\alpha g\|_{p(U(t,\mathbf{x}))} \\ &\le c \sum_{|\alpha|=r,l} \|\Psi^\alpha(t,\cdot) D^\alpha g\|_{p(U(t,\mathbf{x}))}. \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

Сега от (2.5.9) и Лема 2.5.1 получаваме

$$\|\Psi^{-\frac{1}{p}}(t,\cdot)\|f-g\|_{p(U(t,\cdot))}\|_{p(\Omega)} \le c\|f-g\|_{p(\Omega)};$$

$$\|\Psi^{-\frac{1}{p}}(t,\cdot) E^-(g, H_{r-1})_{p(U(t,\cdot))}\|_{p(\Omega)} \le cE^-(g, H_{r-1})_{p(\Omega)}.$$

Накрая, вземайки в предвид (2.5.8) и последните две неравенства имаме, че

$$\|\Psi^{-\frac{1}{p}}(t,\cdot) E^-(f, H_{r-1})_{p(U(t,\cdot))}\|_{p(\Omega)} \le c \left\{ \|f-g\|_{p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=r,l} \|\Psi^\alpha(t,\cdot) D^\alpha g\|_{p(\Omega)} \right\}.$$

Като вземем инфимум по всички $g \in W_p^r(\Omega)$, $g \le f$ в горното неравенство получаваме (2.5.1).

□

Доказателство на Теорема 2.1.2. Ще разгледаме само случая $t \in (\frac{1}{2}, 1]$, защото за $t \in (0, \frac{1}{2}]$ Теорема 2.1.2 и Лема 2.5.2 съвпадат. Нека $t \in (\frac{1}{2}, 1]$. Тогава от дефинициите на

$\Psi(t, \mathbf{x})$ и $U(t, \mathbf{x})$ следва, че

$$\left\|\Psi^{-\frac{1}{p}}(t,\cdot)E^{-}(f,H_{r-1})_{p(U(t,\cdot))}\right\|_{p(\Omega)} \le 4^d E^{-}(f,H_{r-1})_{p(\Omega)}$$
$$\le c\left\|\Psi^{-\frac{1}{p}}(\frac{1}{2},\cdot)E^{-}(f,H_{r-1})_{p(U(t,\cdot))}\right\|_{p(\Omega)} \le c\left\|\Psi^{-\frac{1}{p}}(t,\cdot)E^{-}(f,H_{r-1})_{p(U(t,\cdot))}\right\|_{p(\Omega)}.$$

Лема 2.5.2(неравенство (2.5.1)) с $t = \frac{1}{2}$ и монотонността на К-функционала (2.1.3) по отношение на t дават

$$\left\|\Psi^{-\frac{1}{p}}(t,\cdot)E^{-}(f,H_{r-1})_{p(U(t,\cdot))}\right\|_{p(\Omega)} \le cK_r^{-}(f,\frac{1}{2})_p \le cK_r^{-}(f,t)_p\ ;$$
$$K_r^{-}(f,t)_p \le cE^{-}(f,H_{r-1})_{p(\Omega)} \le c\left\|\Psi^{-\frac{1}{p}}(t,\cdot)E^{-}(f,H_{r-1})_{p(U(t,\cdot))}\right\|_{p(\Omega)}.$$

□

§2.6 Теореми от тип на Whitney за най-добрите алгебрични приближения отдолу.

Нека да отбележим най-напред следните свойства на функционалната характеристика (2.1.8), доказателствата, на които следват непосредствено от дефиницията:

(2.6.1) $\quad \tau_r^{-}(f,U)_p \le\ r\,\|f\|_{p(U)}$ *за* $r=1$ *и* 2, *ако* $f(\mathbf{x}) \ge 0$ *за всяко* $\mathbf{x} \in U$;

(2.6.2) $\quad \tau_2^{-}(f,U)_p = 0$ *ако* f *е изпъкнала в* U;

(2.6.3) $\quad \tau_r^{-}(f+g,U)_p \le \tau_r^{-}(f,U)_p\ +\ \tau_r^{-}(g,U)_p$ *за* $r=1$ *и* 2;

(2.6.4) $\quad \tau_2^{-}(f_+,U)_p \le \tau_2^{-}(f,U)_p,$ *където* $f_+(\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \textit{ako}\ \ f(\mathbf{x}) \ge 0; \\ 0 & \textit{ako}\ \ f(\mathbf{x}) < 0. \end{cases}$

Забележка 2.6.1. В (2.6.1) и (2.6.3) използваме следния факт
$\sup\limits_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d}\left\{\Lambda^r_{\mathbf{h},U}f(\mathbf{x})\right\} \ge \Lambda^r_{\mathbf{0},U}f(\mathbf{x}) = 0.$

Забележка 2.6.2. $\tau_r^{-}(f-g,U)_p \le \tau_r^{-}(f,U)_p\ +\ \tau_r^{-}(g,U)_p$ не е изпълнено в общия случай. Например при $d=1$, $r=2$, $U=[-1,1]$, $f(x) = const$ и $g(x) = x^2$.

Забележка 2.6.3. В (2.6.4) използваме, че ако $f(\mathbf{x}) \geq 0$, то

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d}\left\{\Lambda^2_{\mathbf{h},U} f_+(\mathbf{x})\right\} &= \sup_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d}\left\{2f(\mathbf{x}) - f_+(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f_+(\mathbf{x}-\mathbf{h})\right\} \\ &\leq \sup_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d}\left\{\Lambda^2_{\mathbf{h},U} f(\mathbf{x})\right\}, \end{aligned}$$

а ако $f(\mathbf{x}) < 0$ то $\sup\limits_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d}\left\{\Lambda^2_{\mathbf{h},U} f_+(\mathbf{x})\right\} = 0 \leq \sup\limits_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d}\left\{\Lambda^2_{\mathbf{h},U} f(\mathbf{x})\right\}$.

Доказателство на Теорема 2.1.3(I). Твърдение (I) от Теорема 2.1.3 е подобно на Теорема 4.1 от [7] и неговото доказателство е същото. Нека $M = \inf\limits_{\mathbf{y}\in\Pi}\{f(\mathbf{y})\}$, където $\Pi = \Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}]$. Тогава $E^-(f, H_0)_{p(\Pi)} = \|f - M\|_{p(\Pi)}$ и за всяко $\mathbf{x} \in \Pi$ имаме, че

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - M &= f(\mathbf{x}) - \inf_{\mathbf{y}\in\Pi}\{f(\mathbf{y})\} \\ &= \sup_{\mathbf{x}+\mathbf{h}\in\Pi}\{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}+\mathbf{h})\} \\ &= \sup_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d}\{\Lambda^1_{\mathbf{h},\Pi} f(\mathbf{x})\}. \end{aligned}$$

Сега като вземем L_p-норма в последното равенство ние доказваме исканото от нас твърдение.

$\square$

Нека сега обърнем внимание на доста по-сложния случай при $r = 2$(т.е. Теорема 2.1.3 (II)). Ще започнем с няколко леми, свързани с най-добрите многомерни алгебрични приближения отдолу за изпъкнали функции.

Лема 2.6.1 *Нека $E \subset \Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}] \subset \mathbb{R}^d$ е отворено и изпъкнало тяло, чиято мярка $\mu(E) < \dfrac{1}{2^d d!}\mu(\Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}])$. Тогава съществуват число $k \in \{1, ..., d\}$ и измерими подмножества E_{k-} и E_{k+} такива, че за всяко $\mathbf{x} \in E$ еднозначно се определят $s(\mathbf{x}) \in \partial E$ и $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \in \Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}] \setminus (E \cup \partial E)$ такива, че:*

1) $E = E_{k-} \cup E_{k+}$;

2) Ако $\mathbf{x} \in E_{k*}$ ($* = +$ или $-$), то $\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{s}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = t_{\mathbf{x}} e_k$, където e_k е "k-тия" единичен координатен вектор и $sign(t_{\mathbf{x}}) = *$.

Доказателство. Нека $\mathbf{x} \in E$ и $k \in \{1, ..., d\}$. Дефинираме

$$E_k(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{y} \in E \mid y_i = x_i \ \forall i = 1, ..., d\ ,\ i \neq k\ \},$$

$$m^-_{k,E}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{y} \in E_k(\mathbf{x})} \{\ y_k\ \}$$

и

$$m^+_{k,E}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathbf{y} \in E_k(\mathbf{x})} \{\ y_k\ \}.$$

От $\mu(E) < \dfrac{1}{2^d d!}\mu(\Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}])$ и изпъкналостта на E имаме, че съществува някое $k \in \{1, ..., d\}$ такова, че $m^+_{k,E}(\mathbf{x}) - m^-_{k,E}(\mathbf{x}) < \frac{|b_k - a_k|}{2}$ за всяко $\mathbf{x} \in E$. Нека само да отбележим, че допускането на противното, благодарение на изпъкналостта на E, води до съществуването на политоп (т.е. изпъкнала комбинация на краен брой точки) изцяло вътрешен за E с обем по-голям от този на E.

Така ние редуцирахме проблема за $E \subset \mathbb{R}^d$ до проблема за $E_k(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^1$.

Нека дефинираме

$$c_{k,E}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} m^+_{k,E}(\mathbf{x}) & \frac{b_k+a_k}{2} \leq m^-_{k,E}(\mathbf{x}) \\ m^-_{k,E}(\mathbf{x}) + m^+_{k,E}(\mathbf{x}) - \frac{b_k+a_k}{2} & \frac{b_k+a_k}{2} \in \left(m^-_{k,E}(\mathbf{x}), m^+_{k,E}(\mathbf{x})\right) \\ m^-_{k,E}(\mathbf{x}) & \frac{b_k+a_k}{2} \geq m^+_{k,E}(\mathbf{x}) \end{cases}$$

и да положим

$E_{k-} = \left\{\mathbf{y} \in E \mid y_k \in (m^-_{k,E}(\mathbf{y}), c_{k,E}(\mathbf{y})]\right.$, и $E_{k+} = \left\{\mathbf{y} \in E \mid y_k \in (c_{k,E}(\mathbf{y}), m^+_{k,E}(\mathbf{y})\right)$. Нека $s(\mathbf{x}) = (s(\mathbf{x})_1, ..., s(\mathbf{x})_d)$ е такова, че

$$s(\mathbf{x})_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_i & i \neq k \\ m^*_{k,E}(\mathbf{x}) & i = k \ \wedge \ \mathbf{x} \in E_{k*},\ \ * = + \ \vee \ - \ . \end{cases}$$

Функциите $m^-_{k,E}(\mathbf{x})$ и $m^+_{k,E}(\mathbf{x})$ са непрекъснати, защото са "лицеви"функции за изпъкналото тяло E. Тогава от конструкцията на подмножествата E_{k-} и E_{k+} те имат непрекъсната граница и от тук те са измерими. Пак от конструкцията на подмножествата E_{k-} и E_{k+} имаме, че $E = E_{k-} \cup E_{k+}$, $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{s}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \in \Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}] \setminus (E \cup \partial E)$ и ако $\mathbf{x} \in E_{k*}$ $(* = \ + \ or \ - \ )$ то $\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{s}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = t_{\mathbf{x}} e_k$, където e_k е “k-тия“ единичен координатен вектор и $sign(t_{\mathbf{x}}) = *$.

$\square$

Лема 2.6.2 *Нека f е изпъкнала функция, дефинирана в* $\Pi[\mathbf{0};\mathbf{a}]$, $\ f(\mathbf{x}) \geq 0$, $\ f(\mathbf{0}) = 0$

и $p \in [1, \infty)$. *Тогава е в сила*

$$\|f\|_{p(\Pi[\mathbf{0};\mathbf{a}])} \leq cE(f, H_0)_{p(\Pi[\mathbf{0};\mathbf{a}])}.$$

Доказателство. Нека M е такава константа, че $E^{-}(f, H_0)_p = \|f - M\|_p$. Ако $M = 0$ (което е възможно например, когато $p = 1$ и $f = 0$ в множество E с мярка $\mu(E) \geq \frac{1}{2}\mu(\Pi[\mathbf{0};\mathbf{a}])$), то твърдението на Лема 2.6.2 е изпълнено като равенство с константа $c = 1$. В останалите случаи (когато $M > 0$), полагаме $E_* = \{\mathbf{x} \in \Pi[\mathbf{0};\mathbf{a}] \ | \ sign(f(\mathbf{x}) - M) = *\}$, когато $* = $ “ $-$ “ $\vee$ “ $+$ “ .

Нека $E_0 = \partial E_-$. За $\mathbf{x} \in E_-$ дефинираме $g(\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} t_{\mathbf{x}}M$, когато $\mathbf{x} = t_{\mathbf{x}}\mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \in E_0$. Понеже $\int_{E_-}(M - f)^p \geq \int_{E_-}(M - g)^p$ и

$$\mu\{\mathbf{x} \in E_- \ | \ (1 - t_{\mathbf{x}})^p \geq \theta\} = \mu\left\{\mathbf{x} \in E_- \ | \ t_{\mathbf{x}} \leq (1 - \theta^{\frac{1}{p}})\right\} = \mu(E_-)(1 - \theta^{\frac{1}{p}})^d,$$

то имаме, че

$$\begin{aligned}
\int_{E_-}(M - f(\mathbf{x}))^p d\mathbf{x} \quad &\geq \int_{E_-}(M - g(\mathbf{x}))^p d\mathbf{x} \\
&= M^p \int_{E_-}(1 - t_{\mathbf{x}})^p d\mathbf{x} \\
&= M^p \int_{E_-}\int_0^{(1-t_{\mathbf{x}})^p} 1 d\theta d\mathbf{x} \\
&= M^p \int_0^1 \int_{(1-\theta^{\frac{1}{p}})^d E_-} 1 d\mathbf{x} d\theta \\
&= M^p \mu(E_-) \int_0^1 (1 - \theta^{\frac{1}{p}})^d d\theta \\
&= M^p \mu(E_-) p \int_0^1 t^d (1 - t)^{p-1} dt \\
&= \binom{p+d}{d}^{-1} \int_{E_-} M^p.
\end{aligned} \tag{2.6.5}$$

От (2.6.5) и тривиалното неравенство $\int_{E_-} f^p \leq \int_{E_-} M^p$ получаваме

$$\int_{E_-} f^p \leq \binom{p+d}{d} \int_{E_-}(M - f)^p. \tag{2.6.6}$$

$f - M$ и M са положителни в E_+. Тогава изпъкналостта на x^p дава

$$\int_{E_+} f^p \leq 2^{p-1}\int_{E_+}(f - M)^p + 2^{p-1}\int_{E_+} M^p. \tag{2.6.7}$$

Ако допуснем, че $\mu(E_-) < \dfrac{1}{2^d d!}\mu(\Pi[\mathbf{0};\mathbf{a}])$ то от Лема 2.6.1 (с $E = E_-$) и изпъкналостта на f имаме, че $M - f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}(\mathbf{x})) - M \quad (f(\mathbf{s}(\mathbf{x})) = M)$ за всяко $\mathbf{x} \in E_-$. Като повдигнем на степен $p-1$ двете страни на последното неравенство и интегрираме по $\mathbf{x} \in E_-$, ще получим

$$\int_{E_-} (M - f(\mathbf{x}))^{p-1} d\mathbf{x} \leq \int_{E_-} (f(\mathbf{y}(\mathbf{x})) - M)^{p-1} d\mathbf{x} < \int_{E_+} (f(\mathbf{y}) - M)^{p-1} d\mathbf{y}.$$

Но това е в противоречие с характеризацията на елемента на най-добро приближение (виж [23]), според която, ако M е този елемент то е изпълнено:

$$\int_{\Pi[\mathbf{0};\mathbf{a}]} (f(\mathbf{x}) - M)^{p-1} sign(f(\mathbf{x}) - M) d\mathbf{x} = 0.$$

Следователно $\mu(E_-) \geq \frac{1}{2^d d!}\mu(\Pi[\mathbf{0};\mathbf{a}])$ т.е. $\mu(E_+) \leq (2^d d! - 1)\mu(E_-)$.

Сега като използваме последното неравенство, (2.6.5), (2.6.6) и (2.6.7) ние получаваме

$$\int_{E_+} f^p \leq 2^{p-1} \int_{E_+} (f - M)^p + 2^{p-1} \binom{p+d}{d} (2^d d! - 1) \int_{E_-} (M - f)^p. \tag{2.6.8}$$

Най-накрая от (2.6.6) и (2.6.8) следва, че

$$\|f\|_{p(\Pi[\mathbf{0};\mathbf{a}])} \leq c \|f - M\|_{p(\Pi[\mathbf{0};\mathbf{a}])}.$$

$\square$

Лема 2.6.3 *Нека f е изпъкнала функция в $\Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}]$, тогава*

$$E^-(f, H_1)_{p(\Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}])} \leq c\, E(f, H_1)_{p(\Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}])}.$$

Доказателство. С оглед на закл?чението на лемата, без ограничение на общността, можем да предполагаме, че $f(\mathbf{y}) = \liminf\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{y}} f(\mathbf{x})$ за всяка гранична точка $\mathbf{y}$ на $\Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}]$. Нека $Q(\mathbf{x})$ е алгебричния полином от първа степен на най-добро L_p-приближение за f. Тогава функцията $f - Q$ е изпъкнала и нека нейния минимум (с оглед на по-горната забележка) се достига в точка $\mathbf{u} \in \Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}]$. Прилагайки Лема 2.6.2 към изпъкналата функция

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{x}) - (f(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u})),$$

поотделно в паралелепипедите $\Pi[\mathbf{u};\alpha\mathbf{a}+(\mathbf{1}-\alpha)\mathbf{b}]$, където $\alpha=(\alpha_1\dots\alpha_d)\in\{0,1\}^d$ имаме, че

$$\|g\|_{p(\Pi[\mathbf{u};\alpha\mathbf{a}+(\mathbf{1}-\alpha)\mathbf{b}])}\le c\,E(g,H_0)_{p(\Pi[\mathbf{u};\alpha\mathbf{a}+(\mathbf{1}-\alpha)\mathbf{b}])}\le c\|g+(f(\mathbf{u})-Q(\mathbf{u}))\|_{p(\Pi[\mathbf{u};\alpha\mathbf{a}+(\mathbf{1}-\alpha)\mathbf{b}])}$$

за всяко $\alpha\in\{0,1\}^d$. (Длъжни сме да отбележим, че ако $\mathbf{u}$ е гранична точка, то някои от горните паралелепипеди може да са "плоски т.е. да са с мярка нула.)

Сега, събирайки повдигнатите на степен p, горни неравенства за всички "неплоски"паралелепипеди и вземайки след това степен $\frac{1}{p}$ получаваме

$$\|f-Q-(f(\mathbf{u})-Q(\mathbf{u}))\|_{p(\Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}])}\le c\|f-Q\|_{p(\Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}])}=c\,E(f,H_1)_{p(\Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}])}.$$

Но $f(\mathbf{x})\ge Q(\mathbf{x})+f(\mathbf{u})-Q(\mathbf{u})$ и $Q(x)+f(\mathbf{u})-Q(\mathbf{u})\in H_1$. Тогава

$$E^-(f,H_1)_{p(\Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}])}\le\|f-Q-(f(\mathbf{u})-Q(\mathbf{u}))\|_{p(\Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}])}\le c\,E(f,H_1)_{p(\Pi[\mathbf{a};\mathbf{b}])}.$$

$\square$

В хода на получаване на резултата за най-доброто алгебрично приближение отдолу за произволна ограничена отдолу функция с афинни функции ние се нуждаем от някои твърдения, които са доста по-усложнени отколкото при случая $d=1$.

Нека $A=\mathbf{A}_1\dots\mathbf{A}_{d+1}$ е $d-$размерен симплекс. Ако $\mathbf{x}\in A$, тогава $\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{d+1}\alpha_i(\mathbf{x})\mathbf{A}_i$, където $\alpha_i(\mathbf{x})\ge 0$ и $\sum_{i=1}^{d+1}\alpha_i(\mathbf{x})=1$. $\alpha_1(\mathbf{x}),...,\alpha_{d+1}(\mathbf{x})$ както обичайно ще наричаме *барицентрични координати* на $\mathbf{x}$ по отношение на $\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_{d+1}$.

За $n>d$ и $i=1\dots n-1$ ще разглеждаме следните подмножества на A

$$M^n_{k,i}=\{\mathbf{x}\in A\ \mid\ \alpha_k(\mathbf{x})\ge\frac{i}{n}\ \}.\tag{2.6.9}$$

Нека $i_k(\mathbf{x})=[\alpha_k(\mathbf{x})n]$, т.е. $\alpha_k(\mathbf{x})\in\left[\frac{i_k(\mathbf{x})}{n},\ \frac{i_k(\mathbf{x})+1}{n}\right)$. Като използваме $\sum_{k=1}^{d+1}\alpha_k(\mathbf{x})=1$ получаваме, че

$$\sum_{k=1}^{d+1}i_k(\mathbf{x})\in[n-d,\ n].\tag{2.6.10}$$

Лема 2.6.4 *Нека $A = \mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{d+1}$ е $d-$размерен симплекс в $\mathbb{R}^d$, $p \in [1\ ,\ \infty)$, $f \in L_p(A)$ е неотрицателна в A и $f(\mathbf{A}_i) = 0$ за всяко $i = 1, \ldots, d+1$. Тогава*

$$\|f\|_{p(A)} \leq c\tau_2^-(f, A)_p.$$

Доказателство. Нека $n > d$ и $i = 1, ..., n-1$ са цели числа. Дефинираме

$$D_{\mathbf{x}}^{n,i} f(\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} -if(\mathbf{y}) + nf(\mathbf{x}) - (n-i)f(\mathbf{y} + \frac{n}{n-i}(\mathbf{x} - \mathbf{y})). \tag{2.6.11}$$

Нуждаем се от следното неравенство

$$D_{\mathbf{x}}^{n,i} f^p(\mathbf{A}_k) \leq (D_{\mathbf{x}}^{n,i} f(\mathbf{A}_k))_+^p, \quad ako\ \ \mathbf{x} \in M_{k,i}^n. \tag{2.6.12}$$

От (2.6.11) и $f(\mathbf{A}_k) = 0$ следва, че

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) \ &= \frac{1}{n} D_{\mathbf{x}}^{n,i} f(\mathbf{A}_k) + \frac{i}{n} f(\mathbf{A}_k) + \frac{n-i}{n} f\left(\mathbf{A}_k + \frac{n}{n-i}(\mathbf{x} - \mathbf{A}_k)\right) \\ &= \frac{1}{n} D_{\mathbf{x}}^{n,i} f(\mathbf{A}_k) + \frac{i-1}{n} f(\mathbf{A}_k) + \frac{n-i}{n} f\left(\mathbf{A}_k + \frac{n}{n-i}(\mathbf{x} - \mathbf{A}_k)\right) \end{aligned}$$

Тогава тривиалното неравенство $D_{\mathbf{x}}^{n,i} f(\mathbf{A}_k) \leq (D_{\mathbf{x}}^{n,i} f(\mathbf{A}_k))_+$ и изпъкналостта на x^p за $p \geq 1$ дават

$$\begin{aligned} f^p(\mathbf{x}) \ &\leq \left(\frac{1}{n}(D_{\mathbf{x}}^{n,i} f(\mathbf{A}_k))_+ + \frac{i-1}{n} f(\mathbf{A_k}) + \frac{n-i}{n} f\left(\mathbf{A}_k + \frac{n}{n-i}(\mathbf{x} - \mathbf{A}_k)\right)\right)^p \\ &\leq \frac{1}{n}\left(D_{\mathbf{x}}^{n,i} f(\mathbf{A}_k)\right)_+^p + \frac{i-1}{n} f^p(\mathbf{A}_k) + \frac{n-i}{n} f^p\left(\mathbf{A_k} + \frac{n}{n-i}(\mathbf{x} - \mathbf{A}_k)\right). \end{aligned}$$

Отново от (2.6.11) и $f^p(\mathbf{A}_k) = 0$ следва, че

$$\begin{aligned} f^p(\mathbf{x}) \ &= \frac{1}{n} D_{\mathbf{x}}^{n,i} f^p(\mathbf{A}_k) + \frac{i}{n} f^p(\mathbf{A}_k) + \frac{n-i}{n} f^p\left(\mathbf{A}_k + \frac{n}{n-i}(\mathbf{x} - \mathbf{A}_k)\right) \\ &= \frac{1}{n} D_{\mathbf{x}}^{n,i} f^p(\mathbf{A}_k) + \frac{i-1}{n} f^p(\mathbf{A}_k) + \frac{n-i}{n} f^p\left(\mathbf{A}_k + \frac{n}{n-i}(\mathbf{x} - \mathbf{A}_k)\right). \end{aligned}$$

Последните две неравенства доказват (2.6.12). Сега вече като се възползваме от (2.6.9), (2.6.10) и (2.6.12) получаваме

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{d+1}\sum_{i=1}^{n-1}\int_{M_{k,i}^n}\left(D_{\mathbf{x}}^{n,i}f(\mathbf{A}_k)\right)_+^p d\mathbf{x} \qquad (2.6.13)\\
&\geq \sum_{k=1}^{d+1}\sum_{i=1}^{n-1}\int_{M_{k,i}^n} nf^p(\mathbf{x})-(n-i)f^p\left(\mathbf{A}_k+\frac{n}{n-i}(\mathbf{x}-\mathbf{A}_k)\right)d\mathbf{x}\\
&= n\left(\sum_{k=1}^{d+1}\sum_{i=1}^{n-1}\int_{M_{k,i}^n} f^p(\mathbf{x})d\mathbf{x}-(d+1)\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{n-i}{n}\right)^{d+1}\int_A f^p(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right)\\
&= n\left(\sum_{k=1}^{d+1}\sum_{i=1}^{n-1} i\int_{M_{k,i}^n\setminus M_{k,i+1}^n} f^p(\mathbf{x})d\mathbf{x}-(d+1)\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^{d+1}\int_A f^p(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right)\\
&= n\left(\sum_{k=1}^{d+1}\int_A i_k(\mathbf{x})f^p(\mathbf{x})d\mathbf{x}-(d+1)n\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{d+1}\int_A f^p(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right)\\
&\geq n\left((n-d)-(d+1)n\int_0^1 t^{d+1}dt\right)\int_A f^p(\mathbf{x})d\mathbf{x}\\
&= n\frac{n-d(d+2)}{d+2}\int_A f^p(\mathbf{x})d\mathbf{x}.
\end{aligned}
$$

Да отбележим, че тук на третия ред използваме, че изображението $\mathbf{x}\mapsto \mathbf{A}_k+\frac{n}{n-i}(\mathbf{x}-\mathbf{A}_k)$ е хомотетия с център в $\mathbf{A}_k$ "разтягаща"симплекса $M_{k,i}^n$ до големия симплекс A.

Непосредствено от (2.6.11) (т.е. дефиницията на $D_{\mathbf{x}}^{n,i}f(\mathbf{y})$) имаме, че

$$D_{\mathbf{x}}^{n,1}f(\mathbf{y})=\sum_{j=1}^{n-1} j\Lambda^2_{\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{n-1}}f\left(\mathbf{y}+j\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{n-1}\right)$$

и

$$D_{\mathbf{x}}^{n,i}f(\mathbf{y})=iD_{\mathbf{x}}^{n-i+1,1}f(\mathbf{y})+(n-i)D^{i,1}_{\mathbf{y}+\frac{n-i+1}{n-i}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}f\left(\mathbf{y}+\frac{n}{n-i}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right)$$

От тук

$$D_{\mathbf{x}}^{n,i}f(\mathbf{y})=i\sum_{s=1}^{n-i}s\Lambda^2_{\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{n-i}}f\left(\mathbf{y}+s\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{n-i}\right)+(n-i)\sum_{s=n-i+1}^{n-1}(n-s)\Lambda^2_{\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{n-i}}f\left(\mathbf{y}+s\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{n-i}\right).$$

Прилагаме последното равенство, (2.6.12) и дефиниция (2.1.6) и получаваме

$$
\begin{aligned}
&\left\{\sum_{k=1}^{d+1}\sum_{i=1}^{n-1}\int_{M_{k,i}^n}\left(D_{\mathbf{x}}^{n,i}f(\mathbf{A}_k)\right)_+^p d\mathbf{x}\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (2.6.14)\\
&\le \sum_{k=1}^{d+1}\sum_{i=1}^{n-1}\left\{\int_{M_{k,i}^n}\left(D_{\mathbf{x}}^{n,i}f(\mathbf{A}_k)\right)_+^p d\mathbf{x}\right\}^{\frac{1}{p}}\\
&\le \sum_{k=1}^{d+1}\sum_{i=1}^{n-1}\left(i\sum_{s=1}^{n-i}s\left\{\int_{M_{k,i}^n}\left(\Lambda^2_{\frac{\mathbf{x}-\mathbf{A}_k}{n-i}}f\left(\mathbf{A}_k+s\frac{\mathbf{x}-\mathbf{A}_k}{n-i}\right)\right)_+^p d\mathbf{x}\right\}^{\frac{1}{p}}\right.\\
&\left.+(n-i)\sum_{s=n-i+1}^{n-1}(n-s)\left\{\int_{M_{k,i}^n}\left(\Lambda^2_{\frac{\mathbf{x}-\mathbf{A}_k}{n-i}}f\left(\mathbf{A}_k+s\frac{\mathbf{x}-\mathbf{A}_k}{n-i}\right)\right)_+^p d\mathbf{x}\right\}^{\frac{1}{p}}\right)\\
&\le \sum_{k=1}^{d+1}\sum_{i=1}^{n-1}\left(i\sum_{s=1}^{n-i}s\left\{\int_{M_{k,i}^n}\left(\sup_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d}\left\{\tilde{?}\Delta^2_{\mathbf{h},A}f\left(\mathbf{A}_k+s\frac{\mathbf{x}-\mathbf{A}_k}{n-i}\right)\right\}\right)^p d\mathbf{x}\right\}^{\frac{1}{p}}\right.\\
&\left.+(n-i)\sum_{s=n-i+1}^{n-1}(n-s)\left\{\int_{M_{k,i}^n}\left(\sup_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d}\left\{\tilde{?}\Delta^2_{\mathbf{h},A}f\left(\mathbf{A}_k+s\frac{\mathbf{x}}{-}\mathbf{A}_k n-i\right)\right\}\right)^p d\mathbf{x}\right\}^{\frac{1}{p}}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{d+1}\sum_{i=1}^{n-1}\left(i\sum_{s=1}^{n-i}s\left(\frac{n-i}{s}\right)^{\frac{d}{p}}\left\{\int_{M_{k,n-s}^n}\left(\sup_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d}\{\Lambda^2_{\mathbf{h},A}f(\mathbf{x})\}\right)^p d\mathbf{x}\right\}^{\frac{1}{p}}\right.\\
&\left.+(n-i)\sum_{s=n-i+1}^{n-1}(n-s)\left(\frac{n-i}{s}\right)^{\frac{d}{p}}\left\{\int_{M_{k,n-s}^n}\left(\sup_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d}\{\Lambda^2_{\mathbf{h},A}f(\mathbf{x})\}\right)^p d\mathbf{x}\right\}^{\frac{1}{p}}\right)\\
&\le \left[\sum_{k=1}^{d+1}\sum_{i=1}^{n-1}\left(i\sum_{s=1}^{n-i}s\left(\frac{n-i}{s}\right)^{\frac{d}{p}}+(n-i)\sum_{s=n-i+1}^{n-1}(n-s)\left(\frac{n-i}{s}\right)^{\frac{d}{p}}\right)\right]\\
&\times\left\{\int_A\left(\sup_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d}\{\Lambda^2_{\mathbf{h},A}f(\mathbf{x})\}\right)^p d\mathbf{x}\right\}^{\frac{1}{p}}\\
&\le c_n\tau_2^-(f,A)_p.
\end{aligned}
$$

Накрая неравенства (2.6.13) и (2.6.14) при $n=(d+1)^2$ доказват лемата.

$\square$

Нека $U\subset\mathbb{R}^d$ е политоп и $f\in L_p(U)$ $(p\in[1,\infty)$) е ограничена отдолу. Полагаме

$$
C_U f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\left\{\sum_{i=1}^{d+1}\alpha_i f(\mathbf{x}_i)\right\}, \qquad (2.6.15)
$$

където инфимума е взет върху всички $\mathbf{x}_i\in U$, $i=1,...,d+1$, за които $\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{d+1}\alpha_i\mathbf{x}_i$, където

$\alpha_i \geq 0$, $i = 1, ..., d+1$ и $\sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i = 1$.

Непосредствено от (2.6.15) и [21] имаме:

(2.6.16) *$C_U f$ е изпъкнала в U, непрекъсната във всяко отворено подмножество на U и удовлетворява условието на* Lipschitz *във всеки компакт, намиращ се във вътрешността на U;*

(2.6.17) Ако $h(\mathbf{x})$ е изпъкнала и се мажорира от f в U, то $h(\mathbf{x}) \leq C_U f(\mathbf{x})$ за всяко $\mathbf{x} \in U$, т.е. $C_U f$ е най-голямата изпъкнала миноранта на f в U.

За $g : U \to \mathbb{R}$ под *епиграфика* на g ще разбираме $epi(g) = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \mathbf{x} \in U,\ t \geq g(\mathbf{x})\}$. Ще казваме, че $\mathbf{x} \in U$ е *екстремална по отношение на изпъкналата функция* g, ako $g(\mathbf{x}) < \infty$ и g не е афинна функция във всеки относително отворен интервал съдържащ $\mathbf{x}$, т.е. $\mathbf{x}$ е екстремална по отношение на g, тогава и само тогава, когато $(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$ е екстремална точка на $epi(g)$.

Нека означим с $EP(g) \subset U$ множеството от екстремалните точки по отношение на изпъкналата функция g. Тогава от (2.6.15) и (2.6.17) следва, че

(2.6.18) *за всяко положително ϵ и за всяко $\mathbf{x} \in EP(C_U f)$ съществува $\mathbf{y} \in U$, такова, че* $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \epsilon$ и $|f(\mathbf{y}) - C_U f(\mathbf{x})| < \epsilon$.

Лема 2.6.5 *Нека $\Pi = \Pi[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$ и $f \in L_p(\Pi)$ ($p \in [1, \infty)$) е ограничена отдолу. Тогава*

$$\|f - C_\Pi f\|_{p(\Pi)} \leq \tau_2^-(f, \Pi)_p.$$

Доказателство. Нека означим с $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_{2^d}$ върховете на Π. От дефиницията (2.6.15) следва, че $\inf_{\mathbf{y} \in \Pi}\{f(\mathbf{y})\} \leq C_\Pi f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$ за всяко $\mathbf{x} \in \Pi$ и от тук $f - C_\Pi f \in L_p(\Pi)$.

Нека ϵ бъде произволно положително число. От абсол?тната непрекъснатост на интеграла на Лебег следва, че съществува положително число $\eta < \frac{1}{2} \min\{\max\{a_i; b_i\} - \min\{a_i; b_i\} \mid i = 1, ..., d\}$ такова, че

$$\|f - C_\Pi f\|_{p(\Pi \setminus \Pi(\eta))} \leq \epsilon, \tag{2.6.19}$$

където $\Pi(\eta) = \Pi[\mathbf{c}; \mathbf{h}]$, $c_i \stackrel{\text{def}}{=} \min\{a_i; b_i\} + \eta$ и $h_i \stackrel{\text{def}}{=} \max\{a_i; b_i\} - \eta$ за всяко $i = 1, ..., d$.

Множеството $\Pi(\eta)$ е компактно подмножество на вътрешността на Π и тогава по (2.6.16) имаме,че съществува положителна константа L такава, че

$$|C_\Pi f(\mathbf{x}) - C_\Pi f(\mathbf{y})| \leq L\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \;\forall\, \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \Pi(\eta). \tag{2.6.20}$$

Нека за $i = 1, ..., d$ положим $n_i \stackrel{\text{def}}{=} \left[\epsilon \dfrac{|h_i - c_i|}{3L}\right] + 1$ и означим
$\mathbb{Z}(\epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d \,|\, j_i \in [0, n_i], \quad i = 1, ..., d\right\}$. Сега за всяко $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}(\epsilon)$ нека
$\mathbf{z_j} \stackrel{\text{def}}{=} \left(c_1 + j_1 \dfrac{(h_1 - c_1)}{n_1}, ..., c_d + j_d \dfrac{(h_d - c_d)}{n_d}\right) \in \Pi(\eta)$.

Като следствие от Теоремата на J.-C. Aggeri (виж [1]) се получава, че за всяко $\mathbf{x} \in \Pi(\eta)$ и всяко $\delta > 0$ съществуват точки $\mathbf{y}_i(\mathbf{x},\delta) \in EP(C_\Pi f)$ $i = 1, ..., d+1$ за които $\mathbf{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i \mathbf{y}_i(\mathbf{x},\delta)$, $\sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$ и такива, че $C_\Pi f(\mathbf{x}) \geq \displaystyle\sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i C_\Pi f(\mathbf{y}_i(\mathbf{x},\delta)) - \delta$.
Да означим с $EP(\epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\mathbf{y}_i(\mathbf{z_j}, \dfrac{\epsilon}{3}) \mid i = 1, ..., d+1,\ \mathbf{j} \in \mathbb{Z}(\epsilon)\right\}$.
Това е $m-$точково множество, където $m \leq (d+1)\prod_{i=1}^{d}(n_i + 1)$.

Дефинираме

$$s_1(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \min\left\{\sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i C_\Pi f(\mathbf{a}_i)\right\},$$

където минимума е взет върху всички $\mathbf{a}_i \in EP(\epsilon)$, $i = 1, ..., d+1$, за които $\mathbf{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i \mathbf{a}_i$,

kъдето $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, ..., d+1$ и $\displaystyle\sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i = 1$.

Това е интерполационен изпъкнал сплайн от първа степен за функцията $C_\Pi f$ с възли в $EP(\epsilon)$.

За $\mathbf{x} \in \Pi(\eta)$ имаме, че съществува множество от точки $\left\{\mathbf{z}_{\mathbf{j}(\mathbf{x},i)}\right\}_{i=1}^{d+1}$ такива, че $\mathbf{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i \mathbf{z}_{\mathbf{j}(\mathbf{x},i)}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$, $\mathbf{j}(\mathbf{x},i) \in \mathbb{Z}(\epsilon)$ и $|\mathbf{z}_{\mathbf{j}(\mathbf{x},i)} - \mathbf{x}| \leq \dfrac{\epsilon}{3L}$ за $i = 1, ..., d+1$. За тези точки (2.6.20) ни дава

$$|C_\Pi f(\mathbf{x}) - C_\Pi f(\mathbf{z}_{\mathbf{j}(\mathbf{x},i)})| \leq \frac{\epsilon}{3} \;\; \forall i = 1, ..., d+1.$$

Като използваме дефинициите на $s_1(\mathbf{x})$, $EP(\epsilon)$ и точките $\left\{\mathbf{z}_{\mathbf{j}(\mathbf{x},i)}\right\}_{i=1}^{d+1}$ и последното неравенство получаваме

$$
\begin{aligned}
0 \le s_1(\mathbf{x}) - C_\Pi f(\mathbf{x}) \quad &\le \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i \sum_{k=1}^{d+1} \alpha_{i,k} C_\Pi f\left(\mathbf{y}_k\left(\mathbf{z}_{\mathbf{j}(\mathbf{x},i)}, \frac{\epsilon}{3}\right)\right) - C_\Pi f(\mathbf{x}) \\
&\le \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i \left(C_\Pi f(\mathbf{z}_{\mathbf{j}(\mathbf{x},i)}) + \frac{\epsilon}{3}\right) - C_\Pi f(\mathbf{x}) \\
&\le \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i \left((C_\Pi f(\mathbf{x}) + \frac{\epsilon}{3}) + \frac{\epsilon}{3}\right) - C_\Pi f(\mathbf{x}) \\
&\le \epsilon \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Сега вече използвайки s_1 от (2.6.18) можем да получим интерполационен за функцията f изпъкнал сплайн от първа степен $s(\mathbf{x})$ с възли
$\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\} \in \Pi$ такъв, че $C_\Pi f(\mathbf{x}) \le s(\mathbf{x}) \le C_\Pi f(\mathbf{x}) + \epsilon$ за $\mathbf{x} \in \Pi(\eta)$.

Предполагаме, че $\Pi(\eta) \subset \cup_{i=1}^{k} D_i$, където $D_i = \mathbf{y}_{i_1} \dots \mathbf{y}_{i_{d+1}} \quad (\{\mathbf{y}_{i_1}, \dots, \mathbf{y}_{i_{d+1}}\}$ $\subset \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\})$ са $d-$размерни симплекси такива, че рестрикциите на $s(\mathbf{x})$ върху D_i са афинни функции.
Тогава от (2.6.19) следва

$$
\begin{aligned}
\|f - C_\Pi f\|_{p(\Pi)}^p \quad &= \|f - C_\Pi f\|_{p(\Pi(\eta))}^p + \|f - C_\Pi f\|_{p(\Pi \setminus \Pi(\eta))}^p \\
&\le \sum_{i=1}^{k} \|f - C_\Pi f\|_{p(D_i \cap \Pi(\eta))}^p + \epsilon^p.
\end{aligned} \tag{2.6.21}
$$

Като използваме дефинициите на $C_\Pi f$ и s, тривиалното равенство $(f - s) = (f - s)_+ - (s - f)_+$, Лема 2.6.4 за $(f - s)_+$ в D_i и свойства (2.6.1), (2.6.2) и (2.6.4) получаваме

$$
\begin{aligned}
\|f - C_\Pi f\|_{p(D_i \cap \Pi(\eta))} \quad &\le \|f - s\|_{p(D_i \cap \Pi(\eta))} + \|s - C_\Pi f\|_{p(D_i \cap \Pi(\eta))} \\
&\le \|(f - s)_+\|_{p(D_i \cap \Pi(\eta))} + \|(s - f)_+\|_{p(D_i \cap \Pi(\eta))} + \epsilon \mu(D_i \cap \Pi(\eta))^{\frac{1}{p}} \\
&\le \|(f - s)_+\|_{p(D_i)} + \|(s - f)_+\|_{p(D_i \cap \Pi(\eta))} + \epsilon \mu(D_i \cap \Pi(\eta))^{\frac{1}{p}} \\
&\le c\tau_2^-((f - s)_+, D_i)_p + \|s - C_\Pi f\|_{p(D_i \cap \Pi(\eta))} + \epsilon \mu(D_i \cap \Pi(\eta))^{\frac{1}{p}} \\
&\le c\tau_2^-((f - s), D_i)_p + 2.\epsilon \mu(D_i \cap \Pi(\eta))^{\frac{1}{p}} \\
&\le c\tau_2^-((f - s), D_i)_p + 2.\epsilon \mu(D_i)^{\frac{1}{p}} \\
&\le c\tau_2^-(f, D_i)_p + 2\epsilon \mu(D_i)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{2.6.22}
$$

Неравенства (2.6.21) и (2.6.22) дават

$$\begin{aligned}
\|f - C_\Pi f\|_{p(\Pi)} &\le c\left\{\sum_{i=1}^{k}(\tau_2^-(f,D_i)_p + 2\epsilon\mu(D_i)^{\frac{1}{p}})^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \epsilon \\
&\le c\left\{\sum_{i=1}^{k}\tau_2^-(f,D_i)_p^p\right\}^{\frac{1}{p}} + 2\epsilon(\sum_{i=1}^{k}\mu(D_i))^{\frac{1}{p}} + \epsilon \\
&\le c\tau_2^-(f,\Pi)_p + (2\mu(\Pi)+1)\epsilon \\
&\le c(\tau_2^-(f,\Pi)_p + \epsilon).
\end{aligned}$$

С това Лема 2.6.5 е доказана.

$\square$

Лема 2.6.6 *При същите предположения като в Лема 2.6.5 е изпълнено*

$$E^-(f,H_1)_{p(\Pi)} \sim E(f,H_1)_{p(\Pi)} + \tau_2^-(f,\Pi)_p.$$

Доказателство. Неравенство $C_\Pi f \le f$ влече

$$E^-(f,H_1)_{p(\Pi)} \le E^-(C_\Pi f,H_1)_{p(\Pi)} + \|f - C_\Pi f\|_{p(\Pi)}.$$

Лема 2.6.3 приложена за $C_\Pi f$ дава

$$E^-(C_\Pi f,H_1)_{p(\Pi)} \le cE(C_\Pi f,H_1)_{p(\Pi)}.$$

Сега като комбинираме тези две неравенства и

$$E(C_\Pi f,H_1)_{p(\Pi)} \le E(f,H_1)_{p(\Pi)} + \|f - C_\Pi f\|_{p(\Pi)}$$

благодарение на Лема 2.6.5 получаваме

$$\begin{aligned}
E^-(f,H_1)_{p(\Pi)} &\le E^-(C_\Pi f,H_1)_{p(\Pi)} + \|f - C_\Pi f\|_{p(\Pi)} \\
&\le c\left(E(C_\Pi f,H_1)_{p(\Pi)} + \tau_2^-(f,\Pi)_p\right) \\
&\le c\left(E(f,H_1)_{p(\Pi)} + \|f - C_\Pi f\|_{p(\Pi)} + \tau_2^-(f,\Pi)_p\right) \\
&\le c\left(E(f,H_1)_{p(\Pi)} + \tau_2^-(f,\Pi)_p\right),
\end{aligned}$$

т.е. правото неравенство в Лема 2.6.6.

В хода на доказателството на обратното неравенство в Лема 2.6.6 ще оценим двете величини от дясната му страна чрез $E^-(f,H_1)_{p(\Pi)}$.

Очевидно $E(f, H_1)_{p(\Pi)} \leq E^-(f, H_1)_{p(\Pi)}$. Нека $Q \in H_1$ е такъв, че $f \geq Q$ и $E^-(f, H_1)_{p(\Pi)} = \|f - Q\|_{p(\Omega)}$. От свойство (2.6.1) имаме

$$\tau_2^-(f, \Pi)_p = \tau_2^-(f - Q, \Pi)_p \leq 2\|f - Q\|_{p(\Pi)} = 2E^-(f, H_1)_{p(\Pi)}.$$

От тук

$$E(f, H_1)_{p(\Pi)} + \tau_2^-(f, \Pi)_p \leq 3E^-(f, H_1)_{p(\Pi)}.$$

□

*Доказателство на Теорема 2.1.3(*II*).* Като използваме $E(f, H_{r-1})_{p(\Pi)} \sim \omega_r(f, \Pi)_p$ (виж[14]) и последната лема доказваме Теорема 2.1.3(II). (Да отбележим, че тук резултата за $p = \infty$ е тривиален.)

□

Доказателство на Теорема 2.1.7. Непосредствено от дефиницията имаме, че всяка почти навсякъде средноизпъкнала функция е ограничена отдолу. Тогава Теорема 2.1.7 следва от Лема 2.3.5.

□

§2.7 Основен резултат.

Доказателство на Теорема 2.1.5.

Тук ще използваме идеите от [7]. Като се възползваме от Теорема 2.1.3(I) и Теорема 2.1.2 получаваме характеризация на $K^-(f, t, L_p, W_p^1(\Psi), W_p^{l_1}(\Psi))$. Ще демонстрираме доказателството в по-сложния случай- $r = 2$.

Прилагаме $K_2^-(f, \rho t) \leq max\{1, \rho^{l_2}\}K_2^-(f, t)$ за $\rho > 0$, Теорема 2.1.2, Теорема 2.1.3(II), Теорема 2.1.4 (при $r=2$, $\pi=\dfrac{1}{2}B(t,\mathbf{x})$, $\Pi=U(t,\mathbf{x})$ и $R=2$), (2.1.8) и (2.1.9) и получаваме

$$\begin{aligned}
&K_2^-(f,t)_p \ \sim K_2^-(f,\rho t)_p && (2.7.1)\\
&\sim \|\Psi(t,\cdot)^{-\frac{1}{p}}E^-(f,H_{r-1})_{p(U(t,\cdot))}\|_{p(\Omega)}\\
&\sim \|\Psi(t,\cdot)^{-\frac{1}{p}}\{\omega_2(f,U(\rho t,\cdot))_p+\tau_2^-(f,U(\rho t,\cdot))_p\}\|_{p(\Omega)}\\
&\sim \|\Psi(t,\cdot)^{-\frac{1}{p}}\{\tau_2(f,\frac{1}{2}B(\rho t,\cdot))_{p,p(U(\rho t,\cdot))}+\tau_2^-(f,U(\rho t,\cdot))_p\}\|_{p(\Omega)}\\
&\sim \left\|\Psi(t,\cdot)^{-\frac{1}{p}}\left\{\int_{U(\rho t,\cdot)}\Psi(\rho t,\cdot)^{-1}\int_{\frac{1}{2}B(\rho t,\cdot)}|\Delta^2_{\mathbf{v},U(\rho t,\cdot)}f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{v}d\mathbf{y}\right\}^{\frac{1}{p}}\right\|_{p(\Omega)}\\
&+\left\|\Psi(t,\cdot)^{-\frac{1}{p}}\left\{\int_{U(\rho t,\cdot)}\left[\sup_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d}\{\Lambda^2_{\mathbf{h},U(\rho t,\cdot)}f(\mathbf{y})\}\right]^p d\mathbf{y}\right\}^{\frac{1}{p}}\right\|_{p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

От (2.2.4) при $d=1$ и дефинициите на $\Psi(t,\mathbf{x})$ и $U(t,\mathbf{x})$ (виж също така [8], Лема 3) получаваме

$$\Psi(\frac{1}{6}t,\mathbf{x})\le\Psi(t,\mathbf{y}) \quad \forall\ \mathbf{y}\in U(\frac{1}{6}t,\mathbf{x}) \quad \wedge \quad \forall\ \mathbf{x}\in\Omega \quad ; \qquad (2.7.2)$$

$$\Psi(t,\mathbf{y})\le\Psi(4t,\mathbf{x})\ \ \forall\ \mathbf{y}\in U(t,\mathbf{x}) \quad \wedge \quad \forall\ \mathbf{x}\in\Omega. \qquad (2.7.3)$$

Тогава от (2.2.3), (2.2.4), (2.7.2) и Лема 2.2.1 получаваме

$$\begin{aligned}
&\left\|\Psi(t,\cdot)^{-\frac{1}{p}}\left\{\int_{U(\frac{1}{6}t,\cdot)}\Psi(\frac{1}{6}t,\cdot)^{-1}\int_{\frac{1}{2}B(\frac{1}{6}t,\cdot)}|\Delta^2_{\mathbf{v},U(\frac{1}{6}t,\cdot)}f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{v}d\mathbf{y}\right\}^{\frac{1}{p}}\right\|_{p(\Omega)}\\
&\le c\left\|\Psi(t,\cdot)^{-\frac{1}{p}}\left\{\int_{U(\frac{1}{6}t,\cdot)}\Psi(t,\mathbf{y})^{-1}\int_{\frac{1}{2}B(t,\mathbf{y})}|\Delta^2_{\mathbf{v},U(t,\mathbf{y})}f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{v}d\mathbf{y}\right\}^{\frac{1}{p}}\right\|_{p(\Omega)}\\
&\sim\left\|\Psi(\frac{1}{6}t,\cdot)^{-\frac{1}{p}}\left\{\int_{U(\frac{1}{6}t,\cdot)}\Psi(t,\mathbf{y})^{-1}\int_{\frac{1}{2}B(t,\mathbf{y})}|\Delta^2_{\mathbf{v},U(t,\mathbf{y})}f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{v}d\mathbf{y}\right\}^{\frac{1}{p}}\right\|_{p(\Omega)}\\
&\sim\tau_2(f,\Psi(t))_{p,p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

При същите аргументи имаме

$$\left\|\Psi(t,\cdot)^{-\frac{1}{p}}\left\{\int_{U(\frac{1}{6}t,\cdot)}\sup_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d}\{\Lambda^2_{\mathbf{h},U(\frac{1}{6}t,\cdot)}f(\mathbf{y})\}^p d\mathbf{y}\right\}^{\frac{1}{p}}\right\|_{p(\Omega)}\le c\tau_2^-(f,\Psi(t))_{p(\Omega)}.$$

Тогава от (2.7.1) за $\rho=\frac{1}{6}$ получаваме неравенството

$$K^-(f,t,L_p,W_p^2(\Psi),W_p^{l_2}(\Psi))\le c\{\tau_2^-(f,\Psi(t))_{p(\Omega)}+\tau_2(f,\Psi(t))_{p,p(\Omega)}\}.$$

Доказателството на обратното неравенство е същото.

Като приложим Лема 2.5.2, (2.7.3) и (2.2.4) имаме, че

$$
\begin{aligned}
&\tau_2(f, \Psi(t))_{p,p(\Omega)} \\
&\sim \left\| \Psi(\frac{1}{2}t, \cdot)^{-\frac{1}{p}} \left\{ \int_{U(\frac{1}{2}t,\cdot)} \Psi(t, \mathbf{y})^{-1} \int_{\frac{1}{2}B(t,\mathbf{y})} |\Delta^2_{\mathbf{v},U(t,\mathbf{y})} f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{v} d\mathbf{y} \right\}^{\frac{1}{p}} \right\|_{p(\Omega)} \\
&\leq c \left\| \Psi(t, \cdot)^{-\frac{1}{p}} \left\{ \int_{U(\frac{1}{6}t,\cdot)} \Psi(t, \mathbf{y})^{-1} \int_{\frac{1}{2}B(t,\mathbf{y})} |\Delta^2_{\mathbf{v},U(t,\mathbf{y})} f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{v} d\mathbf{y} \right\}^{\frac{1}{p}} \right\|_{p(\Omega)} \\
&\leq c \left\| \Psi(t, \cdot)^{-\frac{1}{p}} \left\{ \int_{U(4t,\cdot)} \Psi(4t, \cdot)^{-1} \int_{\frac{1}{2}B(4t,\cdot)} |\Delta^2_{\mathbf{v},U(4t,\cdot)} f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{v} d\mathbf{y} \right\}^{\frac{1}{p}} \right\|_{p(\Omega)} .
\end{aligned}
$$

По същия начин имаме, че

$$
\tau_2^-(f, \Psi(t))_{p(\Omega)} \leq c \left\| \Psi(t, \cdot)^{-\frac{1}{p}} \left\{ \int_{U(4t,\cdot)} \sup_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d} \{\Lambda^2_{\mathbf{h},U(4t,\cdot)} f(\mathbf{y})\}^p d\mathbf{y} \right\}^{\frac{1}{p}} \right\|_{p(\Omega)} .
$$

Тогава от (2.7.1) за $\rho = 4$ получаваме неравенството

$$
\tau_2^-(f, \Psi(t))_{p(\Omega)} + \tau_2(f, \Psi(t))_{p,p(\Omega)} \leq cK^-(f, t, L_p, W_p^2(\Psi), W_p^{l_2}(\Psi)).
$$

И тук доказателството на теоремата дадохме за $p < \infty$, защото твърдението за $p = \infty$ е очевидно. □

Доказателство на Теорема 2.1.6. Прилагайки Теорема 2.1.5 заедно с Теорема 2.1.1 и Теорема 2.4.1(r) получаваме директно Теорема 2.1.6.

□

Глава 3. Оценка на грешката на най-добрите монотонни приближения със сплайни с помощта на усреднени модули на гладкост.

В тази част ще получим оценка от тип на Джексън за най-доброто приближение на монотонно ненамаляваща функция f с монотонно ненамаляващи сплайни с равноотдалечени възли в $L_p[0,1]$-норма $(1 \leq p \leq \infty)$. Оценката е направена чрез усреднени модули от висок ред и е сила за функции които са примитивни на ограничени и измерими функции. Резултатът обобщава и обединява резултатите на D. Leviatan и H. N. Mhaskar от [15].

§3.1 Постановка на задачата.

Нека за $1 \leq p < \infty$ с $L_p[0,1]$ означаваме пространството от измерими функции, чиято p-та степен е интегруема. С $L_\infty[0,1]$ ще означаваме пространството от измерими и ограничени функции. По дадена функция $f \in L_p[0,1]$ дефинираме нейния r-ти L_p-модул на гладкост така

$$\omega_r(f,h)_{p[0,1]} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0 \leq t \leq h} \left\{ \|\Delta^r_{t,[0,1]} f(\cdot)\|_{p[0,1]} \right\},$$

където

$$\Delta^r_{t,[0,1]} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f(x+it) & x, x+rt \ \in [0,1]; \\ 0 & x \ \vee \ x+rt \ \notin [0,1]. \end{cases}$$

Със $S(r,n) (r \geq 1)$ ще означаваме пространството от всички сплайни от ред r с $n+1$ равноотдалечени възли $\left\{\frac{i}{n}\right\}_{i=0}^n$, т.е. $s \in S(r,n)$, ако s е полином от степен $\leq r-1$ във всеки интервал $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ и $s^{(r-2)}$ е непрекъсната функция в интервала $[0,1]$. При $r = 1$ s е стъпаловидна функция, която може и да не е непрекъсната във възлите.

За монотонно ненамаляваща функция $f \in L_p[0,1]$ ще използваме следното означение за грешката на най-доброто приближение с монотонно ненамаляващи сплайни с равноотдалечени възли в $L_p[0,1]$-норма $(1 \leq p \leq \infty)$:

$$E_n^{\uparrow}(f,r)_{p[0,1]} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{s \in S(r,n)\ ,\ s\ \uparrow} \left\{ \|f - s\|_{p[0,1]} \right\}.$$

Символа $\uparrow$ използваме в смисъл "ненамалява".

В [15] D. Leviatan и H. N. Mhaskar доказват следните теореми.

Теорема 3.1.1 *Нека f притежава непрекъсната неотрицателна производна f' в [0,1]. Тогава съществува константа $c(r)$, зависеща само от $r \geq 2$ такава, че*

$$E_n^{\uparrow}(f,r)_{\infty[0,1]} \leq c(r)n^{-1}\omega_{r-1}(f',n^{-1})_{\infty[0,1]}.$$

Теорема 3.1.2 *Нека $1 \leq p < \infty$ и f е ненамаляваща функция, която е втора примитивна на функция $f'' \in L_p[0,1]$. Тогава съществува константа $c(r)$, зависеща само от $r \geq 3$ такава, че*

$$E_n^{\uparrow}(f,r)_{p[0,1]} \leq c(r)n^{-2}\omega_{r-2}(f'',n^{-1})_{p[0,1]}.$$

Нека функцията f, дефинирана в интервала [0,1], е ограничена. Дефинираме локален модул на гладкост от ред r в точка $x \in [0,1]$ следната функция (виж Дефиниция 1.4 от [22])

$$\omega_r(f,x;\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t,t+rh\in\left[x-\frac{r\delta}{2},x+\frac{r\delta}{2}\right]} \left\{|\Delta_{h,[0,1]}^r f(t)|\right\}$$

Нека сега $1 \leq p \leq \infty$. Дефинираме r-ти усреднен модул на гладкост на Сендов-Попов за ограничена и измерима в интервала $[0,1]$ функция f по следния начин (виж Дефиниция от 1.5 от [22])

$$\tau_r(f,\delta)_{p[0,1]} \stackrel{\text{def}}{=} \|\omega_r(f,\cdot;\delta)\|_{p[0,1]}.$$

Ще използваме следните свойства на усреднения модул τ_r (виж Теорема 1.5 и Свойство 5 от [22]): Нека $1 \leq p \leq \infty$ и функцията f е примитивна на $f' \in L_p[0,1]$. Тогава съществува константа $c(r)$, зависеща само от $r \geq 2$ такава, че

$$\tau_r(f,\delta)_{p[0,1]} \leq c(r)\delta\omega_{r-1}(f',\delta)_{p[0,1]}. \tag{3.1.1}$$

Нека функцията f е измерима и ограничена в интервала $[0,1]$ и k е естествено число. Тогава

$$\tau_r(f,k\delta)_{p[0,1]} \leq k^{r+1}\tau_r(f,\delta)_{p[0,1]}. \tag{3.1.2}$$

Главният резултат в тази част е следната по-силна оценка на грешката на най-доброто монотонно приближение със сплайни, която обобщава и обединява резултатите на Теорема 3.1.1 и Теорема 3.1.2.

Теорема 3.1.3 *Нека $1 \le p \le \infty$. Ако ненамаляващата функция f е примитивната на измерима и ограничена в интервала $[0,1]$ функция f', то тогава съществува константа $c(r)$, зависеща само от $r \ge 2$ такава, че*

$$E_n^{\uparrow}(f,r)_{p[0,1]} \le c(r)n^{-1}\tau_{r-1}(f',n^{-1})_{p[0,1]}.$$

Забележка 3.1.1 При $p=\infty$ Теорема 3.1.3 съвпада с Теорема 3.1.1 защото усреднения модул $\tau_r(f,\delta)_{\infty[0,1]}$ съвпада с $\omega_r(f,\delta)_{\infty[0,1]}$.

Забележка 3.1.2 От (3.1.1) е видно, че Теорема 3.1.2 следва от Теорема 3.1.3.

§3.2 Помощни резултати.

За да докажем твърдението на Теорема 3.1.3 ние ще използваме наготово някои помощни резултати от [15].

Лема 3.2.1 *Нека ненамаляващата функция f е примитивната на измерима и ограничена в интервала $[-1,1]$ функция f'. Тогава съществува ненамаляващ в $[-1,1]$ полином P от степен $\le r$ $(r \ge 1)$, интерполиращ f в точките 0 и 1 такъв, че*

$$\|f-P\|_{\infty[-1,1]} \le c(r)\ \omega_r(f,1)_{\infty[-1,1]}.$$

Забележка 3.2.1 Това е Лема 3.2(i) от [15], която там е доказана за функция с непрекъсната производна. В доказателството се използва теоремата на H. Whitney приложена за производната на функцията (тя очевидно е приложима, не само за непрекъсната но и за измерима и ограничена функция) и след това се използва полинома на най-добро приближение на производната и информация само за функцията, а не за нейната производна, за да се конструира нужния полином P.

Лема 3.2.2 *Нека ненамаляващата функция f е примитивната на измерима и ограничена в интервала $[-1,1]$ функция f'. За $r \ge 1$ съществува ненамаляваща непрекъсната в $[-1,1]$ функция g такава, че g интерполира f в точките -1, 0 и 1 и притежава следните свойства:*

(1) Рестрикциите на g в $[-1,0]$ и $[0,1]$ са полиноми от степен $\leq r$;

(2) $\|f-g\|_{\infty[-1,1]} \leq c(r)\ \omega_r(f',1)_{\infty[-1,1]}$;

(3) $\sum_{k=1}^{r} |g^{(k)}(0+) - g^{(k)}(0-)| \leq c(r)\ \omega_r(f',1)_{\infty[-1,1]}$.

Това е Теорема 3.1(i) от [15] с направените с оглед на предходната лема и забележката след нея промени. Да отбележим, че в Теорема 3.1(i) от [15] се използва резултата на Лема 3.2(i) от [15].

Лема 3.2.3 *Нека ненамаляващата функция f е примитивната на измерима и ограничена в интервала $[-2,2]$ функция f' и нека g_1 и g_1 са начасти полиномиалните функции гарантирани от Лема 3.2.2 съответно за интервалите $I=[-2,0]$ и $I=[0,2]$. Тогава*

$$\sum_{k=1}^{r} |g_2^{(k)}(0+) - g_1^{(k)}(0-)| \leq c(r)\ \omega_r(f',1)_{\infty[-2,2]}.$$

Това е Теорема 3.2(i) от [15] с оглед на направените в предходната лема промени. Да отбележим, че в Теорема 3.2(i) от [15] се използва резултата на Теорема 3.1(i) от [15].

Следващата Лема е подобна на Лема 3.2.2 и доказателството не се отличава от това на Лема 3.2.2.

Лема 3.2.4 *Нека ненамаляващата функция f е примитивната на измерима и ограничена в интервала $[-m,l]$ (m и l са естествени числа) функция f'. За $r \geq 1$ съществува ненамаляваща непрекъсната в $[-m,l]$ функция g такава, че g интерполира f в точките $-m$, 0 и l като притежава свойствата:*

(1) Рестрикциите на g в $[-\mathrm{m},0]$ и $[0,\mathrm{l}]$ са полиноми от степен $\leq r$;

(2) $\|f-g\|_{\infty[-m,l]} \leq c(r)\ \omega_r(f',1)_{\infty[-\max\{m,l\},\max\{m,l\}]}$;

... *(3)* $\sum_{k=1}^{r} |g^{(k)}(0+) - g^{(k)}(0-)| \leq c(r)\ \omega_r(f',1)_{\infty[-\min\{m,l\},-\min\{m,l\}]}$.

Ще използваме също следната фундаментална Лема на Chui, Smith и Ward (виж [3]).

Лема CSW. Нека $r \geq 2$, $d = 4r^2$ и нека g е ненамаляваща непрекъсната в $[-3d,3d]$ функция, рестрикциите на която в интервалите $[-3d,0]$ и $[0,3d]$ са полиноми от степен

$\leq r-1$. Тогава съществува ненамаляващ сплайн s от ред r с възли в целите числа такъв, че $s(x) = g(x)$ за всяко $x \in [-3d, -d] \cup [d, 3d]$ и

$$\|s-g\|_{p[-3d,3d]} = \|s-g\|_{p[-d,d]} \leq c(r) \sum_{k=1}^{r-1} |g^{(k)}(0+) - g^{(k)}(0-)|.$$

§3.3 Основен резултат.

Доказателство на Теорема 3.1.3. Очевидно, достатъчно е да докажем Теоремата за $n > 12d$, където $d = 4r^2$. Нека $F(t) = f\left(\frac{t}{n}\right)$, $t \in [0, n]$, и нека $m = 2\left[\frac{n}{6d}\right]$ ($[.]$ означава цяла част). Ще използваме и означенията $I_1 = [0, 3d]$, $I_2 = [3d, 6d], ..., I_{m-1} = [3(m-2)d, 3(m-1)d]$ и $I_m = [3(m-1)d, n]$. Съгласно Лема 3.2.2 за всяка двойка интервали $I_{2j-1} \cup I_{2j}$, $j = 1, 2, ..., \frac{m}{2}-1$, съществува монотонно ненамаляваща непрекъсната функция G_j интерполираща F във възлите $6(j-1)d$, $(6j-3)d$ и $6jd$, такава, че G_j е полином от степен $\leq r-1$ поотделно в интервалите I_{2j-1} и I_{2j}. Също така

$$\|F - G_j\|_{\infty(I_{2j-1} \cup I_{2j})} \leq c(r)\ \omega_{r-1}(F', 1)_{\infty(I_{2j-1} \cup I_{2j})}.$$

и

$$\sum_{k=1}^{r-1} \left| G_j^{(k)}((6j-3)d+) - G_j^{(k)}((6j-3)d-) \right| \leq c(r)\ \omega_{r-1}(F', 1)_{\infty(I_{2j-1} \cup I_{2j})}.$$

Да обърнем внимание, че константите в горните неравенства не зависят от интервалите, защото дължината на последните е по-голяма от 1. Трябва да отбележим също така, че дължината на последния интервал I_m може да бъде $> 3d$. Това е и причината за използването на Лема 3.2.4. Именно по нея за последната двойка интервали $I_{m-1} \cup I_m$, съществува монотонно ненамаляваща непрекъсната функция $G_{\frac{m}{2}}$, интерполираща F във възлите $3(m-2)d$, $3(m-1)d$ и n такава, че $G_{\frac{m}{2}}$ е полином от степен $\leq r-1$ в I_{m-1} и в I_m. Като и тук по същия начин

$$\|F - G_{\frac{m}{2}}\|_{\infty(I_{m-1} \cup I_m)} \leq c(r)\ \omega_{r-1}(F', 1)_{\infty(I_{m-2} \cup I_{m-1} \cup I_m)}. \tag{3.3.1}$$

и

$$\sum_{k=1}^{r-1} \left| G_{\frac{m}{2}}^{(k)}(3(m-1)d+) - G_{\frac{m}{2}}^{(k)}(3(m-1)d-) \right| \leq c(r)\ \omega_{r-1}(F', 1)_{\infty(I_{m-1} \cup I_m)}. \tag{3.3.2}$$

Тук в десните страни на (3.3.1) и (3.3.2) използваме, че $3d \leq n - 3(m-1)d \leq 6d$ и, че интервала I_{m-2} съществува поради това, че разглеждаме $m \geq 2$ $(n > 12d)$.

Сега вече използвайки Лема 3.2.3 ние можем да дефинираме монотонно ненамаляваща непрекъсната функция $G = G_j$ в интервала $I_{2j-1} \cup I_{2j}$, $j = 1, 2, ...,$ такава, че

$$\begin{array}{ll} \|F - G\|_{\infty(I_{2j-1}\cup I_{2j})} \leq c(r)\ \omega_{r-1}(F', 1)_{\infty(I_{2j-1}\cup I_{2j})}, & j < \frac{m}{2}; \\ \|F - G\|_{\infty(I_{m-1}\cup I_m)} \leq c(r)\ \omega_{r-1}(F', 1)_{\infty(I_{m-2}\cup I_{m-1}\cup I_m)}, & j = \frac{m}{2}. \end{array} \tag{3.3.3}$$

и за $i = 1, 2, ..., m-1$

$$\sum_{k=1}^{r-1} |G^{(k)}(3id+) - G^{(k)}(3id-)| \leq c(r)\ \omega_{r-1}(F', 1)_{\infty(I_i\cup I_{i+1})}. \tag{3.3.4}$$

ЛемаCSW приложена за всяка двойка интервали $I_i \cup I_{i+1}$ ни дава сплайн S_i дефиниран в $I_i \cup I_{i+1}$ такъв, че $S_i = G$ вън от интервала $[(3i-1)d, (3i+1)d]$ и по (3.3.4)

$$\|S_i - G\|_{\infty[(3i-1)d,(3i+1)d]} \leq c(r)\ \omega_{r-1}(F', 1)_{\infty(I_i\cup I_{i+1})}. \tag{3.3.5}$$

Дефинираме сплайна

$$S(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} S_i(t) & if\ \ t \in [(3i-1)d, (3i+1)d]\ , \quad i = 1, 2, ..., m-1; \\ G(t) & if\ \ t \notin [(3i-1)d, (3i+1)d]\ , \quad i = 1, 2, ..., m-1. \end{cases}$$

Нека сега $s(t) = S(nt)$, $0 \leq t \leq 1$. Тогава $s \in S(r, n)$, s е монотонно ненамаляващ и като използваме (3.3.3), (3.3.5) и (3.1.2) получаваме

$$
\begin{aligned}
&\|f-s\|_{p[0,1]}^p = \frac{1}{n}\|F-S\|_{p[0,n]}^p \\
&\le \frac{2^p}{n}\left(\|F-G\|_{p[0,n]}^p + \|G-S\|_{p[0,n]}^p\right) \\
&\le \frac{2^p}{n}\left(\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1}\|F-G\|_{p(I_{2j-1}\cup I_{2j})}^p + \|F-G\|_{p(I_{m-1}\cup I_m)}^p + \sum_{i=1}^{m-1}\|G-S\|_{p(I_i\cup I_{i+1})}^p\right) \\
&\le \frac{2^p}{n}c(r)\left(\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1}\int_{I_{2j-1}\cup I_{2j}}\omega_{r-1}^p(F',1)_{\infty(I_{2j-1}\cup I_{2j})}dt\right. \\
&\left.+\int_{I_{m-1}\cup I_m}\omega_{r-1}^p(F',1)_{\infty(I_{m-2}\cup I_{m-1}\cup I_m)}dt + \sum_{i=1}^{m-1}\int_{I_i\cup I_{i+1}}\omega_{r-1}^p(F',1)_{\infty(I_i\cup I_{i+1})}dt\right) \\
&\le \frac{2^p}{n}c(r)\left(\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1}\int_{I_{2j-1}\cup I_{2j}}\omega_{r-1}^p(F',t;c(r))dt + \int_{I_{m-1}\cup I_m}\omega_{r-1}^p(F',t;c(r))dt\right. \\
&\left.+\sum_{i=1}^{m-1}\int_{I_i\cup I_{i+1}}\omega_{r-1}^p(F',t;c(r))dt\right) \\
&\le \frac{2^p}{n}c(r)\tau_{r-1}^p(F',c(r))_{p[0,n]} \\
&= c(r)\left(n^{-1}\tau_{r-1}(f',c(r)n^{-1})_{p[0,1]}\right)^p \\
&\le c(r)\left(c(r)n^{-1}\tau_{r-1}(f',n^{-1})_{p[0,1]}\right)^p.
\end{aligned}
$$

Следователно

$$\|f-s\|_{p[0,1]} \le c(r)n^{-1}\tau_{r-1}(f',n^{-1})_{p[0,1]}.$$

С това Теорема 3.1.3 е доказана. $\square$

Литература

[1] A. BRØNSTED, Milman‘s Theorem for Convex Functions. *Math. Scand. 19,* (1966), 5-10.

[2] H. BERENS, Y. XU, On Bernstein-Durrmeyer Polinonials with Jacobi-weights. *in "Approximation Theory and Functional Analysis ed. C.K. Chui, Academic Press, Boston,* (1991) 25-46.

[3] C. K. CHUI, P. W. SMITH, J. D. WARD, Degree of L_p approximations by monotone splines. *SIAM J. Math.Anal.,* **11**, (1980), 436-447.

[4] Z. DITZIAN AND K. G. IVANOV, Strong Convers Inequalities. *J. d‘Analyse Mathematique,61,* (1991), 61-111.

[5] T. N. T. GOODMAN AND A. SHARMA, A Bernstein-type Operator on the Simplex. *Mathematica Balcanica (new series) 5,2,* (1991), 129-145.

[6] T. N. T. GOODMAN AND A. SHARMA, A Modified Bernstein-Shoenberg Operator. *Proc. of Conference on Constructive Theory of Functions, Varna‘87, Publ. House of Bulg. Acad. of Sci., Sofia,* (1987), 166-173.

[7] V. H. HRISTOV AND K. G. IVANOV, Characterization of Best Approximation from Below and from Above. *Proc. of the Conference on Appr. Theory, Kecskemet,* (1990).

[8] V. H. HRISTOV AND K. G. IVANOV, Operators for Onesided Approximation by Algebraic Polinomials in $L_p([-1,1]^d)$. *Mathematica Balcanica (new series) 2,4,* (1988), 374-390.

[9] V. H. HRISTOV AND K. G. IVANOV, Realization of K-functionals on Subsets and Constrained Approximation. *Mathematica Balcanica (new series) 4,3,* (1990), 236-257.

[10] K. G. IVANOV, A Characterization of Weighted Peetre K-Functionals. *Journal of Approximation Theory,56,2,* (1989),185-211

[11] K. G. IVANOV, Approximation by Bernstein Polinonials in L_p metric. *Proc. of Conference on Constructive Theory of Functions, Sofia‘85, Publ. House of Bulg. Acad. of Sci., Sofia,*(1985), 421-429.

[12] K. G. IVANOV, On a new characteristic of functions. *Serdica, 8,* (1982), 262-279.

[13] K. G. Ivanov, Approximations of Functions of two Variables by Algebraic Polinomials. *Int. Series of Numerical Mathematics, Vol. 65,* (1984), 249-255.

[14] H. Johnen and K. Scherer, On the Equavilance of the K-functional and Moduli of Continuity and some Applications. *in "Constructive Theory of Functions of Several Variables", Id. W. Schampp, K. Zeller,* (1977), 119-140.

[15] D. Leviatan, H. N. Mhaskar. The rate of monotone spline approximation in the L_p-norm. *SIAM J. Math.Anal.,* **13**, *5*, (1982), 866-874.

[16] G. G. Lorentz, Bernstein Polinonials. *Mathematical Expositions, 8, University of Toronto Press,* (1953).

[17] P. E. Parvanov, Characterization of Best Multivariate Approximatoin from Below and from Above in Terms of K-functional. *Mathematica Balcanica (new series), Vol.11, 1-2,* (1997), 37-50.

[18] P. E. Parvanov, Characterization of Best Algebraic Approximatoin from Below and from Above in the Multivariate Case. *East Journal of Approximation, 2*(1999) *под печат*

[19] P. E. Parvanov, An Estimation of the Best Monotone Spline Approximation with the Averaged Moduli of Smoothness. *Mathematica Balcanica (new series), под печат*

[20] P. E. Parvanov and B. D. Popov, The Limit Case of Bernstein's Operators with Jacobi-weights. *Mathematica Balcanica (new series), Vol.8, Fask.2-3,* (1994), 165-177.

[21] A. W. Roberts and D. E. Varberg, Convex functions. *Academic Press, New York and London,* (1973).

[22] Бл. Сендов и В. А. Попов, Усреднени модули на гладкост. *Издателство на БАН,* (1988).

[23] А. Ф. Тиман, Теория приближений функций действительного переменного. *Физматгиз, Москва,* (1960).